# SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28038

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

De plus, S étant l'aire du triangle, de la formule classique

$$16\,S^2 = 2\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4\ ,$$

il résulte que

$$4 = k = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,S}\right)^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2\ ; \quad (23)$$

d'où

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2\ . \quad (24)$$

En outre,

$$a^4 + b^4 + c^4 = 24\,S^2\ , \qquad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = 20\,S^2\ ,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,S\ . \quad (25)$$

*Remarque.* La relation (7) équivaut à celle-ci,

$$\sqrt{\cot A} + \sqrt{\cot B} = \sqrt{\cot C}\ ,$$

que nous avons déjà donnée (*Mathesis*, 1931, p. 284), et qui est aussi une conséquence des relations (24) et (25).

ERRATUM. — Dans la formule (22), *E. M.*, 34e année, il faut lire $\left(1 + \frac{nd}{2\,R}\right)$.

---

# SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

---

En relisant une Note sur le quotient de Fermat et les nombres de Bernoulli, que j'ai publiée en 1895 [1], je viens d'y découvrir deux erreurs dans l'énoncé et la démonstration des formules du paragraphe 2. La première est une faute d'impression, la seconde, plus importante, un *lapsus calami*. Je tiens à les corriger; je crois utile de compléter en même temps la démonstration de mes formules, que je m'étais borné à esquisser.

---

1 Sur la congruence $(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r \pmod{p}$. *Journ. für die reine und angew. Math.*, t. 115, p. 295-300.

Soient $B_k$ le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, $p$ un nombre premier impair et $\nu = \frac{p-1}{2}$.

En vertu d'un théorème connu de Kummer, les nombres $B_k$ et $B_{k+\nu}$ sont liés par la relation

$$\frac{B_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

pour tout $k$ non divisible par $\nu$.

Supposons de plus que les indices $k$ et $k+\nu$ soient premiers à $p$.

Si $B_k$ est alors divisible par $p$, il en est de même de $B_{k+\nu}$.

Posons

$$b_k = \frac{B_k}{p}, \qquad b_{k+\nu} = \frac{B_{k+\nu}}{p}.$$

Dans la note que je viens de citer, j'ai montré que les nombres $b_k$ et $b_{k+\nu}$ vérifient les relations suivantes

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1}\sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1}$$

$$\equiv \sum_{h=1}^{\nu}(q_h h^k)^2 + \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p}, \tag{2}$$

$q_h$ étant le quotient de Fermat de $h$ (mod. $p$).

Or, on avait imprimé, *loc. cit.*, p. 299, form. (9), et c'est en cela que consiste la faute d'impression dont je viens de parler, $\Sigma(q_h h^{2k})^2$ au lieu de $\Sigma(q_h h^k)^2$. Bien que cette erreur soit facile à corriger, puisque l'expression exacte s'obtient aussi d'une formule plus générale donnée à la fin de mon travail, j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de la signaler.

Quant au *lapsus calami* qui s'est glissé dans une formule auxiliaire (p. 300, ligne 2), j'aime mieux, avant de le corriger, reprendre la démonstration des formules (2).

Commençons par la première, qui s'écrit

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1}\sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p}. \tag{2'}$$

Comme je l'avais fait remarquer dans la note citée, cette congruence découle de la relation

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}}, \tag{3}$$

$(2k-1)!\,\psi(x)$ étant le polynôme de Bernoulli

$$\frac{x^{2k}}{2k} - \frac{x^{2k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \binom{2k-1}{2i-1} \frac{B_i}{2i} x^{2k-2i}.$$

En effet, l'égalité (3) entraîne la congruence

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1+p^2}{2}\right) \equiv (-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \pmod{p^2}, \tag{4}$$

si aucun des coefficients du polynôme de Bernoulli ne contient le facteur $p$ au dénominateur. Or, cette dernière condition est vérifiée pour $k < 2\nu$, car aucune des fractions $\frac{B_i}{2i}$ ne contient dans ce cas $p$ au dénominateur, sauf $\frac{B_\nu}{2\nu}$. Mais le nombre $B_\nu$, lorsqu'il figure dans le polynôme, est multiplié par le nombre entier

$$\binom{2k-1}{2\nu-1} = \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(2k-p+2)}{1\cdot 2\ldots(p-2)},$$

divisible par $p$, puisque $2k-1 \geqq 2\nu+1 = p$ et que $2k-p+2$ est, en vertu de notre hypothèse ($k < 2\nu$), inférieur à $p$.

Comme d'autre part

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1+p^2}{2}\right) = \sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1}, \tag{5}$$

nous pouvons écrire, pour $k < 2\nu$,

$$(-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} \pmod{p^2}. \tag{6}$$

Or, pour $k < 2\nu$,

$$\sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1} \pmod{p^2} . \tag{7}$$

On le vérifie directement pour $k = 1$, et pour l'établir, lorsque $1 < k < 2\nu$, il suffit de faire remarquer qu'on a

$$\sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} = \sum_{1}^{p} h^{2k-1} + \sum_{p+1}^{2p} h^{2k-1} + \ldots + \sum_{(\nu-1)p+1}^{\nu p} h^{2k-1} + \sum_{\nu p+1}^{\nu p+\nu} h^{2k-1}$$

$$\equiv \nu \sum_{1}^{p} h^{2k-1} + (2k-1)(1+2+\ldots+\nu-1)\, p \sum_{1}^{p} h^{2k-2} + \sum_{1}^{\nu} h^{2k-1}$$

$$+ (2k-1)\,\nu p \sum_{1}^{\nu} h^{2k-2} \pmod{p^2} ,$$

puisque $(h + ip)^{2k-1} \equiv h^{2k-1} + (2k-1)\, iph^{2k-2} \pmod{p^2}$.

Or, pour $1 < k < 2\nu$, le premier, le deuxième et le quatrième terme du second membre sont divisibles par $p^2$.

On voit donc que, pour $k < 2\nu$,

$$(-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1} \pmod{p^2} . \tag{8}$$

Si $k < \nu$, on a aussi

$$(-1)^{k+\nu} \frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \frac{2^{2(k+\nu)}-1}{2^{2(k+\nu)-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1+2\nu} \pmod{p^2} . \tag{8'}$$

Comme $h^{2\nu} \equiv 1 + q_h p \pmod{p^2}$, on tire de (8) et (8')

$$(-1)^{k-1} \left( \frac{b_k}{2k} - (-1)^{\nu} \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \right) \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p} .$$

Pour avoir (2'), il suffit de multiplier par $\dfrac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1}$, ce qui est permis, si $2^{2k} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

*Cas général.* — Nous avons supposé $k < \nu$, mais on peut s'affranchir de cette restriction en utilisant la congruence de Kummer, vraie pour tout $k$ non divisible par $\nu$,

$$\frac{B_k}{k} - (-1)^\nu 2 \frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} + \frac{B_{k+2\nu}}{k+2\nu} \equiv 0 \pmod{p^2} ,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{B_k}{k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} \equiv (-1)^\nu \left( \frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} - (-1)^\nu \frac{B_{k+2\nu}}{k+2\nu} \right) \pmod{p^2} .$$

Si donc (2′) est vraie pour $k$, elle est vraie pour $k + \nu$, et la première des relations (2) est établie.

Passons à la seconde, qui s'écrit

$$(-1)^{k-1} \left( \frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \right)$$
$$\equiv \sum_{h=1}^{\nu} (q_h h^k)^2 + \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p} . \qquad (2'')$$

Pour l'établir, il suffirait, dans le cas où $2^{2k} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, de montrer que

$$2^{2k-1} \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \equiv (2^{2k} - 1) \sum_{h=1}^{\nu} \left( (q_h h^k)^2 + q_h h^{2k-1} \right) \pmod{p} ,$$

ce qui peut être fait à l'aide d'une transformation élémentaire. La relation (2″) deviendrait une conséquence de (2′). Mais cette démonstration suppose $2^{2k} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Aussi ai-je préféré établir (2″) d'une manière plus directe.

Soient $x$ un nombre entier positif, premier à $p$, $Q_x$ le quotient de la division de $x$ par $p$.

Envisageons la somme

$$\sum_{h=1}^{x-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) = \sum_{h=1}^{x-1} h(1 - h^{p-1})^2 .$$

$(1 - h^{p-1})^2$ étant divisible par $p^2$ pour tout $h \not\equiv 0 \pmod{p}$, on a

$$\sum_{h=1}^{x-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv (1 + 2 + \ldots + Q_x)p$$

$$\equiv p\frac{Q_x(Q_x+1)}{2} \pmod{p^2} . \qquad (9)$$

Il en résulte, en remplaçant $x$ par $x^{p^m}$, $m$ étant un nombre entier $\geqq 1$ et $x < p$,

$$\sum_{h=1}^{x^{p^m}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv p\frac{q_x x(q_x x+1)}{2} \pmod{p^2} ,$$

puisque le quotient de $x^{p^m}$ par $p$ est congru à $xq_x \pmod{p}$, pour $x < p$. En particulier

$$\sum_{h=1}^{x^{p^2}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv p\frac{q_x x(q_x x+1)}{2} \pmod{p^2} . \qquad (9')$$

Dans le travail cité (p. 300, ligne 2) j'avais réuni, par mégarde, les congruences (9) et (9′) en substituant au second membre de (9) le second membre de (9′) — *lapsus calami* dont j'ai parlé au début de cette note. Mais la relation ainsi écrite n'est exacte qu'à la condition qu'on remplace la limite supérieure $x - 1$ de la somme par $x^{p^m} - 1$, en particulier par $x^{p^2} - 1$, le nombre $x$ étant inférieur à $p$. Les trois lignes qui suivent (*loc. cit.*, p. 300, lignes 3, 4 et 5) se rapportent à la congruence omise (9) et non à la congruence (9′).

Reprenons maintenant la démonstration de (2″). On tire de (9′)

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^{(2k-2)p^2} \sum_{h=1}^{x^{p^2}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1})$$

$$\equiv \frac{p}{2}\sum_{x=1}^{p-1} q_x x(q_x x+1)x^{(2k-2)p^2} \pmod{p^2} . \qquad (10)$$

Or, la somme qui figure au second membre est congrue à

$$2\sum_{x=1}^{\nu} q_x x(q_x x+1)x^{2k-2} \pmod{p}\ .$$

Le second membre se réduit donc à

$$p\sum_{h=1}^{\nu}\left(q_h^2 h^{2k}+q_h h^{2k-1}\right) \pmod{p^2}\ ,$$

en écrivant $h$ au lieu de $x$.

Quant au premier membre de (10), je ferai remarquer qu'on a, en posant $y = x^{p^2}$

$$\sum_{h=1}^{y-1} h^{2p-1} = \frac{y^{2p}}{2p} - \frac{y^{2p-1}}{2} + (2p-1)\frac{B_1}{2}y^{2p-2} - \ldots - \frac{2p-1}{2}B_{p-1}y^2\ ,$$

$$-2\sum_{h=1}^{y-1} h^p = -2\frac{y^{p+1}}{p+1} + 2\frac{y^p}{2} - 2p\frac{B_1}{2}y^{p-1} + \ldots + (-1)^\nu pB_\nu y^2\ ,$$

$$\sum_{h=1}^{y-1} h = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2}\ .$$

Pour avoir le premier membre de (10), il faut multiplier chacun de ces polynômes par $y^{2k-2} = x^{(2k-2)p^2}$, faire $x = 1, 2, \ldots, p-1$ et ajouter.

Or, les sommes de la forme $\Sigma y^{2m}$ sont congrues à 0 (mod. $p^3$), si $m$ n'est pas divisible par $\nu$, et à $p-1$, si $m$ est divisible par $\nu$. Ces dernières sont fournies par les termes contenant $B_k$ et $B_{k+\nu}$.

D'autre part,

$$\sum\left(-\frac{y^{2p-1}}{2} + 2\frac{y^p}{2} - \frac{y}{2}\right)y^{2k-2} = -\frac{1}{2}\sum y^{2k-1}(y^{p-1}-1)^2 \equiv 0 \pmod{p^2}\ .$$

Le premier membre de (10) est donc congru (mod. $p^2$) à

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}\binom{2p-1}{2k-1}\frac{B_k}{2k}\sum y^{2(p-1)} &\\ + (-1)^{k+\nu-1}\binom{2p-1}{2k+2\nu-1}\frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\sum y^{2\nu}&\\ \equiv (-1)^{k-1}p\left(-\frac{b_k}{2k}(p-1) + (-1)^\nu\frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}(p-1)\right)&\\ \equiv (-1)^{k-1}p\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)\frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \pmod{p^2}\ .&\end{aligned}$$

En divisant par $p$ la congruence (10) ainsi transformée, on obtient enfin la formule (2″).

On voit donc que le *lapsus calami* que j'ai signalé peut être corrigé de la manière suivante:

Page 300, ligne 2, au lieu de

$$(h = 1, 2, \ldots, x - 1) \quad \text{lire} \quad (h = 1, 2, \ldots, x^{p^2} - 1) ,$$

Page 300, ligne 3, au lieu de

« quelconque », lire « positif inférieur à $p$ ».

Page 300, lignes 4 et 5, au lieu de

$$x = 1^{p^2}, \ 2^{p^2}, \ldots, (p-1)^{p^2} \quad \text{lire} \quad x = 1, 2, \ldots, p - 1 .$$