Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL
Autor: Turrière, E.
Kapitel: 3. — Etude de la dérivée de la pression.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. — Etude de la dérivée de la pression.

Partant des formules

$$v^2 + 2gy = v_0^2 , \qquad N = \cos\alpha + \frac{v^2}{g\rho} ,$$

nous obtenons par dérivations

$$v\frac{dv}{d\alpha} + g\rho\sin\alpha = 0 ,$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = -\sin\alpha + \frac{2v\,dv}{g\rho} - \frac{v^2}{g\rho^2}\frac{d\rho}{d\alpha} ,$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{3v}{g\rho}\frac{dv}{d\alpha} - \frac{v^2}{g\rho^2}\frac{d\rho}{d\alpha} ;$$

d'où finalement:

$$gv \cdot \frac{dN}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{v^3}{\rho}\right) .$$

Mais

$$\rho = \frac{ds}{da} = v \cdot \frac{dt}{d\alpha} , \qquad \frac{v^3}{\rho} = v^2\frac{d\alpha}{dt}$$

et, par suite aussi:

$$gv \cdot \frac{dN}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[v^2\frac{d\alpha}{dt}\right] .$$

v et α sont précisément les coordonnées polaires du point qui accompagne le point M et qui définit, par le lieu des positions successives qu'il occupe, l'*hodographe* du mouvement [1].

Dire que le mouvement sur l'hodographe de Hamilton est effectué suivant la loi des aires c'est interpréter la condition

$$v^2\frac{d\alpha}{dt} = \text{constante} .$$

---

[1] Hamilton, le premier, appela l'attention sur l'intérêt présenté par l'hodographe. Il a mis en évidence la propriété des mouvements célestes d'être représentés par des hodographes circulaires.

Plus récemment, G. Darboux tira parti de l'hodographe pour écrire élégamment les équations relatives aux trois intégrales de Laplace.

Sur les trois intégrales de Laplace, *Bulletin astronomique*, 1886, t. V, p. 89.

Voir aussi: F. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 121.

G. Schouten, *Niew Archief vor Wiskunde*, 1876, t. II, p. 76-96.

Et, par suite, la formule précédente conduit à mettre en évidence les courbes à pression constante par le théorème suivant:

Si, dans le mouvement sans frottement d'un point pesant sur une courbe plane, la pression est constante, le mouvement sur l'hodographe est effectué suivant la loi des aires et réciproquement.

Dans ce cas (N = const), la vitesse satisfait aux équations suivantes:

$$v^3 = C\rho \,.$$

$$v = \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{N - \cos\alpha} \,;$$

cette dernière relation exprime que, *dans le mouvement du point pesant sur la courbe de pression constante, l'hodographe est une conique de foyer* O.

L'excentricité de la conique est:

$$e = \frac{1}{N} = \frac{\text{poids du point matériel}}{\text{pression constante}} \,.$$

L'hodographe sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que la pression sera inférieure, égale ou supérieure au poids du point matériel.

Si la pression constante est supérieure au poids du point matériel, l'hodographe du mouvement est une ellipse, parcourue suivant la loi du mouvement képlérien des planètes.

4. — Equations générales de la courbe à pression constante.

Si l'équation de la tangente courante est mise sous la forme $x \cos\varphi + y \sin\varphi = \varpi$, les expressions des coordonnées du point courant d'une courbe semblable à la courbe de pression constante sont

$$x = -2\int \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{(a + \sin\varphi)^3} \,, \qquad y = \frac{-1}{(a + \sin\varphi)^2} \,.$$