II. — Les domaines vectoriels. ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Il résulte de là que

1° la longueur de V est le double de celle de C;
2° le rayon de courbure de V en A est la somme des rayons de courbure de C en M et M'.

On déduit immédiatement de la deuxième propriété que si deux corps convexes plans ont même domaine vectoriel, et si leurs frontières ont même rayon de courbure en deux points (respectivement situés sur les deux frontières) où les tangentes sont parallèles, ces frontières *ont aussi même rayon de courbure aux points diamétralement opposés des précédents.*

Les courbes *orbiformes* [de largeur constante] limitent des corps convexes admettant des cercles pour domaines vectoriels. Toutes les orbiformes de même largeur d ont même longueur πd [la moitié de la longueur du domaine vectoriel commun]. En outre, une orbiforme et un cercle de même largeur peuvent toujours être amenés, d'une infinité de façons, à être bitangents en deux points diamétralement opposés.

II. — Les domaines vectoriels et la théorie des corps convexes.

Indépendamment de son intérêt propre, dû surtout à l'existence de relations extrémales fort remarquables établies par MM. Rademacher, Estermann et Ganapathi *(articles cités)* entre les volumes d'un corps convexe quelconque et de son domaine vectoriel, la notion de domaine vectoriel d'un corps convexe se prête à une étude remarquablement intuitive de nombreuses questions relatives aux corps convexes.

On sait à quelles difficultés on se heurte lorsqu'on essaye d'aborder, par l'analyse, les problèmes même les plus simples qui se présentent dans la théorie des corps convexes. Ces difficultés sont dans l'ordre logique des choses.

Il est incontestable que, depuis que Gauss a systématiquement employé les coordonnées curvilignes pour l'étude des propriétés des surfaces, créant ainsi la géométrie différentielle, des progrès considérables ont été réalisés en matière géomé-

trique, dont beaucoup auraient été impossibles sans le secours de l'analyse. Mais, si la géométrie doit beaucoup à l'analyse, il n'en est pas moins vrai que celle-là a grandement contribué au développement de celle-ci.

Si, par exemple, l'utilité d'une étude des corps convexes s'était manifestée au moment où l'analyse cherchait sa voie, il est très probable que l'évolution de cette dernière n'aurait pas été tout à fait ce qu'elle est. Il est très normal que certaines théories géométriques, telle précisément la théorie des corps convexes, résistent à un instrument analytique qui n'a pas été spécialement fait pour elles.

Les principaux progrès réalisés dans ce domaine de la géométrie sont dus surtout à l'intuition géométrique elle-même, qui a successivement amené Brun, Minkowski et, plus récemment, Bonnesen [1], à introduire les notions, si parfaitement adaptées au sujet, de série linéaire, de volumes mixtes, de couronne circulaire ou de couronne minima attachées à un ensemble convexe plan.

Dès qu'une de ces notions a été introduite, un grand pas en avant a été fait. La notion de domaine vectoriel d'un corps convexe me semble devoir se montrer d'une efficacité comparable à celle des notions qui viennent d'être rappelées.

Il suffit pour s'en convaincre de se reporter aux travaux de Ganapathi *(loc. cit.)*, relatifs à la structure des ovales du plan, ou à certaines inégalités isopérimétriques, telle par exemple l'inégalité

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 2M + \frac{(D - \Delta)^2}{4},$$

où L et S sont la longueur et l'aire d'une figure convexe plane quelconque C, D et Δ les diamètres maximum et minimum de C, M l'aire de la courbe moyenne de C [lieu des milieux des diamètres]; inégalité qui, dans le cas des orbiformes, se réduit à

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 2M.$$

[1] T. Bonnesen: *Le problème des isopérimètres et des isépiphanes.* Paris, Gauthier-Villars, 1929.

Récemment [Mémoire cité du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*], j'ai appliqué la notion de domaine vectoriel à la détermination des figures convexes dont la largeur *est donnée dans toute direction*. La construction à laquelle j'ai été conduit, remarquablement simple, donne en particulier les orbiformes si la largeur est supposée constante; en outre, elle s'étend tout naturellement à l'espace.

Dans deux Notes publiées dans les *Rendiconti dei Lincei* [1], M. B. SEGRE a énoncé un grand nombre de propriétés des arcs convexes, des ovales et des orbiformes du plan. Les résultats de M. Segre ont attiré l'attention de M. HADAMARD, qui a bien voulu me charger de les exposer dans une séance de son séminaire du Collège de France. Ignorant les démonstrations de M. Segre, j'ai cherché à établir ses propositions en les rattachant, autant que possible, à la notion de domaine vectoriel.

Il se trouve que quelques-unes en sont des conséquences presque immédiates, beaucoup d'autres s'y ramenant avec la plus grande facilité.

Pour illustrer par quelques nouveaux exemples la fécondité de la notion de domaine vectoriel, je vais reprendre, à ce nouveau point de vue, quelques-uns des résultats de M. B. Segre.

III. — LES RÉSULTATS DE M. SEGRE.

Les résultats de M. B. Segre sont, en grande partie, relatifs à la courbure des courbes convexes du plan. Les courbes considérées sont des courbes *intuitives* au sens de M. SEVERI, c'est-à-dire, tout entières situées à distance finie et douées, en chaque point, d'une tangente variant d'une façon continue et d'une courbure également continue et non nulle. Une ligne ouverte sera dite *un arc;* l'arc sera convexe lorsque, avec sa corde, il détermine une surface convexe.

Lorsqu'un point parcourt un arc dans un certain sens, la tangente correspondante tourne d'un certain angle que M. B. Segre, avec M. MUKOPADYAYA [2], appelle la *déflexion* de l'arc.

---

[1] 6me série, t. 20, 1934.
[2] *Collected geometrical papers of Calcutta*, 1931.