Paul Lévy. — Théorie de l'Addition des Variables aléatoires (Monographies des Probabilities publiees sous la Direction de M. Emile Borel. Fascicule I). — Un volume gr. in-8° de XVIII-332 pages. Prix: 120 francs. Gauthier-Villars. Paris. 1937.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Barrières de potentiel de Gamow. Nous avons ici presque l'espoir d'apprendre pourquoi la matière est ce qu'elle est.

En VII, description de l'appareillage des laboratoires; curieux appareils automatiques signalant le passage d'un corpuscule ou d'un rayon cosmique. Chambre de Wilson. Compteur de Geiger. Prodigieux générateur électrostatique à 1.200.000 volts installé, hélas, à... Washington. Mais M. Thibaud ne désespère pas de voir, bientôt partout, de véritables usines de transmutation.

En VIII, Mécanique ondulatoire brillamment présentée comme une extension de la Mécanique classique. Ondes associées à tout mouvement. Trajectoires particulières non omnibus mais relatives comme l'onde à la particule mobile.

En IX, aperçus cosmogoniques. Etats stellaires ultra-denses provenant d'atomes réduits à leurs noyaux. Interprétation einsteinienne de l'Univers matériel au moyen de la notion de courbure. Histoire des rayons cosmiques.

En X, précieuses opinions d'un expérimentateur sur la géométrisation de la Physique. Albert Einstein, Louis de Broglie conduisent à Elie Cartan. Une Géométrie générale des Espaces couronnerait toutes les sciences par l'intermédiaire de la Physique.

Dans tout ce qui précède, M. Jean Thibaud a fait, sans insister, beaucoup de philosophie. Son titre, admirablement choisi, correspond bien aussi à des idées biologiques. Encore une fois nous ne pouvons créer des atomes mais nous pouvons influer sur leur évolution, les domestiquer, en attendant que leurs transformations libèrent des quantités d'énergie de plus en plus grandes dont il faut espérer que l'homme saura enfin se servir dans le sens du perfectionnement moral. A. Buhl (Toulouse).

Paul Lévy. — **Théorie de l'Addition des Variables aléatoires** (Monographies des Probabilités publiées sous la Direction de M. Emile Borel. Fascicule I). — Un volume gr. in-8° de xviii-332 pages. Prix: 120 francs. Gauthier-Villars. Paris. 1937.

Le Calcul des Probabilités s'étend toujours de façon prodigieuse. Nous avons dit précédemment (p. 124) toute l'admiration qui nous était inspirée par l'œuvre récente de M. Maurice Fréchet. Il est impossible d'être moins élogieux pour celle de M. Paul Lévy qui commence d'ailleurs une série de Monographies à ajouter, selon les modalités variables des procédés de découverte, au grand Traité publié sous la direction de M. Emile Borel, Traité aujourd'hui achevé.

Le nouvel ouvrage a le grand mérite d'être indépendant de tous préliminaires tant soit peu spéciaux; il ne dépend même pas du livre publié par l'auteur en 1925 et qui fut analysé ici-même (**24,** 1924-1925, p. 341). Il s'agit donc d'un instrument de travail pouvant être immédiatement utilisé par tout néophyte.

Une fois de plus, il apparaît que le Calcul des Probabilités actuel est un schéma homéomorphe à la Théorie des fonctions, cette expression désignant d'ailleurs tantôt la Théorie des fonctions analytiques, tantôt celle des fonctions de variables réelles, tantôt celle des fonctionnelles. Mais ce schéma a sa valeur propre, très grande, ainsi que ses intuitions spéciales que M. Paul Lévy a grandement raison de défendre. On n'évalue pas des probabilités, dans des domaines tant soit peu généraux, sans compter, sans mesurer

sans intégrer; dans les définitions fondamentales, le continu joue souvent un rôle plus clair que le dénombrable d'où une science qui peut être fondée sur des invariants intégraux (p. 7), de même qu'il y a des géométries constructibles à partir des notions de distance ou d'aire. Ce polymorphisme est une chose essentielle qu'il faut plutôt développer que restreindre pour l'accorder avec l'indéniable polymorphisme des intelligences.

Le Calcul des Probabilités peut donc commencer avec les généralités ensemblistes, par exemple avec les curiosités, facilement intuitives le plus souvent, des ensembles non dénombrables de mesure nulle. Nous avons (p. 14) l'intéressant exemple des nombres (compris entre 0 et 1) qui s'écrivent, dans le système décimal, sans employer un chiffre déterminé.

Pour des ensembles non mesurables, y a-t-il des extensions de la notion de mesure ? Certes, mais M. Paul Lévy fait ressortir le caractère artificiel de ces extensions. C'est plutôt, si l'on peut s'exprimer ainsi, à l'intérieur de la notion de mesure qu'il faut en rechercher la structure ainsi que des modifications utiles. D'où la notion, à coup sûr interne, de *partition*.

Ceci est bientôt suivi de l'intégrale de Stieltjes ayant, pour ainsi dire, une structure propre *dans l'élément d'intégration*. Il y a alors, tout naturellement, quelque chose d'analogue dans la *variable aléatoire* qui, elle aussi, a déjà un caractère fonctionnel, une structure qu'il faut pénétrer, bien avant de chercher à construire quelque chose avec une telle variable. Ce que l'on construira est encore fort limité comme l'indique ici le titre du volume; il est déjà bien joli que l'on puisse parler d'addition pour les variables aléatoires, cette addition pouvant à vrai dire comprendre une infinité de termes et ouvrant alors un monde d'idées concernant sa convergence. De telles questions rappellent le maniement des séries, tantôt sous leur forme propre, tantôt sous forme de constructions où les termes interviennent justement sous des formes à caractères de sommabilité, caractères très différents de ceux de la sommation pure et simple. Pour les variables aléatoires, nous n'en sommes guère qu'à cette dernière sommation mais les résultats obtenus n'en sont pas moins dignes de la plus grande attention. C'est tout un point de vue philosophique qui est en litige, l'homme s'étant beaucoup plus préoccupé jusqu'ici des effets du hasard que de sa structure. Maintenant c'est surtout la structure qui est en jeu.

En tout ceci la loi de Gauss, avec son intégrale fondamentale du type

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx\ ,$$

ne cesse point de jouer un rôle essentiel et j'en profite pour revenir à une remarque sur laquelle j'ai déjà essayé d'attirer l'attention. On sait que Mittag-Leffler, à propos de ses curieuses recherches sur le prolongement analytique, a construit une fonction entière $E_\alpha(x)$ qui croît indéfiniment dans un angle d'ouverture $\alpha\pi$ mais tend vers zéro, à l'infini, hors du même angle. Pour α égal à 1, la fonction E est l'exponentielle ordinaire; pour α égal à 1 : 2, la fonction E s'exprime immédiatement par l'intégrale ci-dessus. Il y a donc, dans la construction du grand géomètre suédois, à la fois l'exponentialité déterministe et les considérations probabilitaires attachées à la loi de Gauss. D'ailleurs, je ne crois pas m'éloigner beaucoup ici des idées de M. Paul Lévy; j'aperçois, par exemple, à la page 166 de

son beau livre, une expression probabilitaire à double limite qui est tout à fait dans la manière de Mittag-Leffler.

Je dois m'arrêter, bien à regret. L'auteur est d'une conscience qui pousse le scrupule jusqu'aux dernières limites quand il s'agit du rôle des travaux d'autrui. Il cite, toujours avec de grands développements, Bachelier, Bernstein, Bochner, Borel, Cantelli, Cramer, Daniell, Feldheim, Feller, de Finetti, Fréchet, Glivenko, Jessen, Khintchine, Kolmogoroff, Lebesgue, Liapounoff, Lindeberg, Linfoot, Slutsky, Steinhaus, Tornier, Wiener.

Mais l'œuvre est aussi originale que claire. L'enseignement synthétique qui s'en dégage est d'une puissance rarement atteinte.

Et, en corrigeant les épreuves de cette analyse bibliographique, je puis signaler une Note récemment publiée par M. Paul Lévy, aux *Comptes rendus* du 19 avril 1937. On trouve, dans cette Note, précisément un rapprochement de l'intégrale de Gauss avec des fonctions à la Mittag-Leffler ; si je puis me féliciter d'avoir prédit ce rapprochement, il faut reconnaître, d'autre part, que M. Paul Lévy n'en était pas loin. A. Buhl (Toulouse).

Louis Bachelier. — **Les Lois des grands nombres du Calcul des Probabilités.** Un fascicule gr. in-8° de viii-38 pages. Prix: 18 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Curieux exposé qu'il est fort naturel de mentionner ici, immédiatement après l'ouvrage de M. Paul Lévy lequel, d'ailleurs, cite M. Bachelier. Les travaux de ce dernier, en Calcul des Probabilités, sont bien connus et généralement jugés comme ayant une tendance manifeste à s'éloigner des sentiers battus. En tout cas c'est bien cette dernière impression qui me paraît dominer ici. Il s'agit de l'intégrale écrite ci-dessus et généralement rattachée à la loi de Gauss mais sans que M. Bachelier parle de Gauss. Il lui semble plus indiqué de mettre à l'honneur Laplace et de Moivre. Puis, au lieu d'étudier des probabilités d'écart par un telle intégrale, il étudie de nombreuses variations analytiques de celle-ci, variations qui ont encore un sens analytique relativement simple et, en définitive, se prêtent au calcul, pour rechercher ensuite les significations probabilitaires de telles variations ou extensions. C'est une manière, parmi d'autres, de subordonner le Calcul des Probabilités à des considérations de continuité, ce qui est surtout remarquable dans le domaine des lois de grands nombres, domaine où les nombres, quoique grands, sont discontinus.

Dans cet ordre d'idées, et plus particulièrement à propos de la périodicité du hasard, signalons un article publié par M. Bachelier dans *L'Enseignement mathématique* en tête du volume de 1915. Il y a, en tout ceci, des développements qui, pour être assez différents de ceux à caractère fonctionnel ou ensembliste, n'en sont pas moins très remarquables.

A. Buhl (Toulouse).

Rolf Nevanlinna. — **Eindeutige analytische Funktionen** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XLVI). — Un volume in-8° de viii-354 pages et 24 figures. Prix: RM. 27,60; relié, RM. 29,40. Julius Springer, Berlin.

Cette exposition de la Théorie des Fonctions analytiques uniformes, ou uniformisables, m'a tout de suite rappelé les *Leçons sur la Théorie des*