Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

courbes gauches algébriques (1917), la méthode de corrélation (1932), etc.

Depuis 1919, il s'était attaché, avec beaucoup de dévouement, à la publication de l'*Index Generalis*, Annuaire général des Universités et des grands Instituts scientifiques.

R. de Montessus de Ballore devait présider le 2me Congrès international de Récréation mathématique (Paris, 15-18 juillet 1937).

H. F.

BIBLIOGRAPHIE

Le P. Marin Mersenne, Religieux Minime. — **Correspondance** publiée par Mme Paul Tannery, éditée et annotée par Cornelis de Waard avec la Collaboration de René Pintard. Tome II, 1628-1630. — Un volume gr. in-8° (24 × 19) de xvi-708 pages avec figures et planches. Prix: 250 francs. Edition à marges réduites des *Archives de Philosophie* (23 × 15). Prix: 120 francs. Gabriel Beauchesne et ses Fils, Paris, 1937.

Cette œuvre magnifique se poursuit sans autre appui que sa valeur même, ce qui est déconcertant. Quel honneur pour les auteurs de la publication, particulièrement pour Mme Paul Tannery qui tient à réaliser un désir sacré. Paul Tannery avait compris toute la valeur de la correspondance du Minime, sorte de miroir vivant et tourmenté de la science du dix-septième siècle. Qui soupçonnerait l'étendue des écrits à rassembler ? Le Tome premier de l'œuvre porte sur dix années, le tome second, un peu plus volumineux encore, porte sur deux ou trois années seulement. C'est en plein l'époque cartésienne. Et cependant l'impression de si haute intellectualité qui s'attache au nom de Descartes n'est pas une garantie de la valeur des mœurs de l'époque.

En analysant ce Tome premier (*L'Enseignement mathématique*, **32,** 1933, p. 263), nous avons déjà eu l'occasion de parler d'un certain Gaffarel qui n'était pas précisément l'ami de Mersenne mais qui n'en était pas moins capable d'éprouver de la pitié lorsqu'il se trouvait devant des spectacles pitoyables. Dans la lettre 122, à Pierre Gassend, il narre une visite qu'il fit, dans quelque cachot inquisitorial, à Campanella, moine calabrais érudit. Il le trouve, les jambes décharnées par la torture et cependant écrivant, plaisantant et grimaçant pour tenter d'interpréter la physionomie des gens auxquels il pensait, moyen nécessaire, d'après lui, pour interpréter leurs pensées. Çà et là, c'est le grand Descartes lui-même qui est aux prises, tout au moins, avec des tortures morales. Ses théories gênent des docteurs en Sorbonne et sont mises à l'index. Il est question de les lui faire rétracter.

Malheurs du dix-septième siècle, diront les optimistes d'aujourd'hui. Hélas! aujourd'hui, pour nous narrer ces malheurs de la science et de l'érudition, Mme Paul Tannery, dans sa Préface, nous parle de l'anxiété fâcheuse de l'heure présente. Et combien justement ! Il n'y a plus de torture inquisitoriale, du moins officiellement, mais un grand pays, contigu

à la France, est agité d'horribles convulsions à tendances contagieuses. Ce qui se passe là ne paraît pas moins affreux que ce qui se passait du temps de Mersenne, travaillant et pensant cependant sous les auspices flamboyants du mot « Charitas ». Nous sommes toujours condamnés à travailler au nom d'un bel idéal mais dans des conditions parfois affreuses. Et c'est pourquoi le Minime, en son couvent de Paris, ressuscite avec une prodigieuse puissance d'évocation. De son temps existait une formidable machine de guerre dressée sur le chemin du savoir et de la recherche. Finalement, elle a été inopérante. Les machines actuelles, à rôle analogue, seront certainement inopérantes aussi malgré les angoisses qu'elles causent.

Dois-je m'excuser de ces digressions ? Non pas. Le nouveau volume comprend une centaine de lettres s'étendant sur 700 pages. Comment tout analyser en quelques mots. On ne peut guère dire autre chose que la poignante impression globale qui s'en dégage. La Science d'alors a parfois des naïvetés enfantines. Dans la lettre 124, de Mersenne à Galilée, transparaît l'espérance de Descartes de lire quelque chose dans la Lune et même de voir s'il s'y trouve des animaux; mais ceci fait travailler au perfectionnement des verres et systèmes optiques. La chute des graves, leur mouvement parabolique, le son, généralement analysé sous la forme musicale, préoccupent Mersenne et ses correspondants. L'Algèbre et la Géométrie ne sont, le plus souvent, que des moyens d'expression. Descartes, dans la lettre 143, discute une proposition de langue universelle; le projet lui semble plus admirable au premier abord qu'à l'analyse profonde. On croirait lire des argumentations actuelles concernant la tentative espérantiste.

Plus loin (lettre 145) il est question des « espaces imaginaires » d'ailleurs invoqués aussi par Aristote. Bien entendu le mot n'a pas son sens analytique actuel mais ce sont des espaces issus de la Pensée pure, je suis tenté de dire « à connexion purement spirituelle ». Dieu peut s'en servir sans nous en fournir aucune représentation sensible. Et par suite la Pensée pure peut être créatrice de science en dehors du monde l'observation. Là, il me semble qu'il a fallu arriver à notre époque, notamment à l'ère einsteinienne pour que de telles prophéties soient confirmées.

Dans la lettre 155, une longueur quelconque comprenant six fois plus de toises que de pieds, l'assertion s'étend peut-être à une longueur infinie. Curieux germe de la Théorie des ensembles.

Beeckmann, l'un des meilleurs correspondants de Mersenne (lettre 157) conçoit différentes sortes d'atomes; il discute la question de préexistence concernant la poule et l'œuf. On sait aujourd'hui qu'il y a là un paradoxe apparent tenant à l'insuffisance de la notion du temps d'origine astronomique; la chose n'a vraiment un sens que dans un temps de constitution biologique.

Van Helmont (lettre 162) imagine des relations de macrocosme à microcosme. Astrologie, magie ne sont pas loin mais tendent vers une forme analytique logiquement défendable. Il est question aussi d'un traitement des blessures à distance, traitement appliqué sur l'épée qui a fait la plaie. Télépathie, extériorisation de la sensibilité; les expressions modernes ne manquent pas dans le même ordre d'idées. Restons-en là. Ces quelques réflexions, dans leur manque absolu de cohérence, ne peuvent qu'inciter à étudier un volume admirable où de non moins admirables portraits, sur planches hors texte, comme celui de Rivet ou celui de Descartes, évoqueront, à eux seuls, des mondes de pensée. Les lecteurs n'auront pas à grimacer,

suivant la singulière méthode de Campanella, pour mieux pénétrer ces mondes mais ils trouveront peut-être, dans l'expression de tels visages, toute la beauté des éternelles aspirations vers l'harmonie universelle.

A. Buhl (Toulouse).

Louis de Broglie. — **Matière et Lumière** (Sciences d'aujourd'hui. Direction André George. I.) — Un volume in-8° (19 × 14) de 344 pages. Prix: 20 francs. Albin Michel, Paris. 1937.

A peine venons-nous d'annoncer, dans notre précédent fascicule (p. 123), un récent ouvrage, à la fois physique et philosophique, de M. Louis de Broglie, qu'en voici un, plus récent encore, qui s'apparente au même ordre d'idées. Il inaugure d'ailleurs une nouvelle Collection, s'adressant au public éclairé mais qui semble devoir servir, grandement aussi, l'homme de science en quête d'idées générales hors du domaine spécialisé de la recherche originale. Résumons la Table des matières:

I. *Exposés généraux sur la Physique contemporaine.* — Les Progrès. Matière et Lumière. Les quanta et la Mécanique ondulatoire.

II. *Matière et Electricité.* — Ondes et Corpuscules. Les deux électricités. Evolution de l'électron. Etat actuel de la Théorie électromagnétique.

III. *Lumière et Radiations.* — Coup d'œil sur l'histoire de l'Optique. Voies anciennes et perspectives nouvelles. Synthèses successives.

IV. *La Mécanique ondulatoire.* — Nature ondulatoire de l'électron. La Mécanique ondulatoire et ses interprétations. Barrières de potentiel. Relativité et Quanta.

V. *Etudes philosophiques sur la Physique quantique.* — Continuité et Individualité. La crise du Déterminisme. Idées dues à la Mécanique quantique. Simultanéité des possibilités.

VI. *Etudes philosophiques diverses.* — Réalité et Idéalisation. A la mémoire d'Emile Meyerson. La machine et l'esprit.

La grande idée du livre est la grande idée même qui rendit célèbre le nom de M. Louis de Broglie. La lumière redevenait granulaire, ses grains, ou photons, faisant excellent ménage avec ses ondes. Dès lors il pouvait, il devait y avoir des ondes accompagnant tout corpuscule, c'est-à-dire des ondes de matière.

Que devenait, en tout ceci, la Théorie électromagnétique ? On sait aujourd'hui que c'est une théorie d'espace *mesurable*, au sens très ordinaire de ce mot, alors que le monde corpusculaire offre, au contraire, de redoutables difficultés de mensuration et exige, à cet égard, des définitions et une analyse nouvelles. Donc l'électromagnétisme maxwellien ne peut s'égaler à la Mécanique ondulatoire. Il reste cependant prodigieusement utile ! C'est une analyse d'intégrales multiples (mesurant d'abord de l'étendue) immédiatement transformable en analyse de déterminants symboliques. La Mécanique ondulatoire est d'abord une analyse de matrices. Or, avec un peu de savoir faire, on aperçoit aisément tout un monde de liens entre déterminants et matrices et c'est ce qui a permis l'éclosion de constructions de grande valeur telles la Théorie de Dirac. Les équations d'une telle théorie relèvent, à la fois, du symbolisme matriciel et du symbolisme différentiel des formules maxwelliennes. Je m'exprime en mathé-

maticien et très en abrégé. M. Louis de Broglie a fait quelque chose d'analogue dans les fascicules 181 et 411 des *Actualités scientifiques*, fascicules analysés un peu plus loin; dans le présent livre, il a remplacé l'algorithme mathématique par des considérations physiques moins aisées à condenser mais qui permettent de suivre les transformations de l'électromagnétisme en électronique sans rien retrancher à la grandeur du génie de Maxwell.

Quant aux quanta de Planck, ils sont toujours partout et à la base de tout. Notre faculté de compter est quantique. Si l'Univers est Nombre, il est Quantum. Les corpuscules ne peuvent prendre que *certains* états de mouvement; les fronts d'ondes qui les accompagnent, les trajectoires qu'ils décrivent en sont inséparables. Ce n'est point la trajectoire omnibus du point matériel classique, trajectoire qui peut rester la même alors que le point qui est censé la décrire peut subir de grands changements physiques, par exemple des changements de masse. Il y a là des choses que nous ne représenterons jamais « très grossies » sur des figures; le monde des représentations sensibles y perd mais y a-t-il là véritablement une perte ? Le monde nouveau est surtout celui de la Pensée.

Il n'est pas besoin d'en dire davantage pour faire comprendre combien les aperçus philosophiques apparaissent aisément dans un ouvrage tel que celui que vient de publier M. Louis de Broglie. Comment se fait-il que l'extraordinaire beauté des conceptions nouvelles ne séduise pas tout le monde ? D'où vient la résistance acharnée qui peut se manifester, jusque dans une Faculté, contre les « Sciences d'aujourd'hui » et plus particulièrement contre leur exposition dans les cours réguliers ? Il ne paraît pas commode de répondre à de telles questions. Mais l'avenir ne saurait être mis en cause. L'idée de l'abandon des conceptions actuelles et du retour au classicisme d'autrefois est de toute impossibilité et me paraît relever d'une psychologie moyenâgeuse. A. Buhl (Toulouse).

Jean Thibaud. — **Vie et Transmutation des Atomes.** (Sciences d'aujourd'hui. Direction André George. II). — Un volume in-8° (19 × 14) de 236 pages avec 64 figures et 26 planches hors texte. Prix: 25 francs. Albin Michel, Paris. 1937.

Le second volume de la Collection « Sciences d'aujourd'hui » ne devait pas tarder à suivre le premier. Et la succession est des plus heureuses puisqu'après les spéculations géniales d'un Louis de Broglie nous avons maintenant les exposés expérimentaux précis d'un physicien qui est loin de nier la valeur des extraordinaires aperçus théoriques, qui leur fait même une belle place dans son livre mais qui, enfin, vit et opére dans un laboratoire à trois dimensions. D'où notamment des planches qu'on ne se fatigue point de regarder et sur lesquelles on peut suivre des manifestations corpusculaires quasi vitales. Certes, lorsqu'une trajectoire corpusculaire paraît devenir visible, observable, photographiable dans quelque milieu, ce n'est pas la trajectoire absolument pure qui est en jeu mais son effet dans le milieu; la trajectoire pure a, très probablement, une microstructure inobservable, bonne simplement à figurer dans les théories. Mais ce qui est observable n'en est pas moins propre à conditionner d'autres faits observables et c'est un grand objet de science que d'étudier et de dépeindre de tels conditionnements.

Le volume débute par un savoureux Avant-propos. On y lit notamment

(p. 7) que « l'idée s'est répandue qu'il faut être très fort en mathématiques pour s'occuper de l'atome ». M. Jean Thibaud n'en paraît pas absolument convaincu et il a mille fois raison. Certes, la Science devient partout difficile mais c'est surtout une question de transformation rapide, trop rapide pour certains qui se sentent désarçonnés à quarante ans quand ils constatent qu'ils ne peuvent plus suivre le mouvement avec les connaissances acquises aux environs de la vingtième année. Des esprits souples tenteront de remédier à cet état de choses, présenteront clairement des symbolismes économisant la Pensée, la Physique, même théorique, ne devant pas plus effrayer ses chercheurs que les complications des problèmes de la Mécanique céleste ne découragent l'astronome. Et il y aura des ouvrages, comme celui de M. Thibaud, pour montrer où sont les domaines physiquement accessibles.

Revenons à une analyse bibliographique précise respectant l'ordre des chapitres suivants:

I. *La Matière et les Transmutations atomiques.*
II. *L'Electron positif et l'annihilation de la Matière.*
III. *Transmutations et réactions nucléaires. Radioactivité artificielle.*
IV. *Neutrons et Neutrinos.*
V. *Effet photo-électrique nucléaire ou Photo-désintégration.*
VI. *Le noyau atomique et sa structure.*
VII. *Techniques relatives à l'étude des atomes et de leurs transmutations.*
VIII. *La Mécanique ondulatoire dans le domaine atomique.*
IX. *L'Atome et l'Univers. Rayons cosmiques.*
X. *Les tentatives de « Géométrisation » de la Physique.*

En I, signalons surtout les procédés d'hybridation. On ne fabrique pas, de toutes pièces, un atome, pas plus qu'on ne fabrique une cellule vivante par voie chimique. Mais on modifie l'atome en lui arrachant des corpuscules ou en lui en faisant digérer de nouveaux.

En II, l'annihilation de la matière est sa conversion radiative. Les étoiles et notre Soleil semblent ainsi s'appauvrir en matière mais en restant toujours grandement riches en radiations. Idée rassurante. Précisions à obtenir quant aux luttes des photons et des électrons.

En III, les réactions intra-atomiques sont notées à peu près comme les réactions chimiques; il s'agit de réactions nucléaires conduisant à la radioactivité artificielle de M. et Mme Joliot-Curie, c'est-à-dire à l'élément, inconnu dans la nature, qui se comportera comme un élément radio-actif.

En IV, neutron, corpuscule neutre par son absence de charge mais singulièrement belliqueux cependant comme agent de désintégration nucléaire. Et neutrino ou « petit neutron » à masse infinitésimale mais porteur d'énergie destiné à sauver provisoirement les principes conservatifs. Mais ceux-ci ont-ils tellement besoin d'être sauvés ? C'est vouloir sauver les équations canoniques de Jacobi et Hamilton, sans doute à cause d'un passé de gloire, alors qu'on balbutie encore en tentant d'utiliser la prodigieuse puissance des opérateurs hermitiques; le mathématicien s'excuse de faire cette réflexion en passant.

En V, existence de « photo-neutrons », ce qui conduit peut-être au neutron entité primordiale.

En VI, notions de « métaphysique expérimentale ». Sphère critique, autour du noyau, à l'intérieur de laquelle la loi de Coulomb est inversée.

Barrières de potentiel de Gamow. Nous avons ici presque l'espoir d'apprendre pourquoi la matière est ce qu'elle est.

En VII, description de l'appareillage des laboratoires; curieux appareils automatiques signalant le passage d'un corpuscule ou d'un rayon cosmique. Chambre de Wilson. Compteur de Geiger. Prodigieux générateur électrostatique à 1.200.000 volts installé, hélas, à... Washington. Mais M. Thibaud ne désespère pas de voir, bientôt partout, de véritables usines de transmutation.

En VIII, Mécanique ondulatoire brillamment présentée comme une extension de la Mécanique classique. Ondes associées à tout mouvement. Trajectoires particulières non omnibus mais relatives comme l'onde à la particule mobile.

En IX, aperçus cosmogoniques. Etats stellaires ultra-denses provenant d'atomes réduits à leurs noyaux. Interprétation einsteinienne de l'Univers matériel au moyen de la notion de courbure. Histoire des rayons cosmiques.

En X, précieuses opinions d'un expérimentateur sur la géométrisation de la Physique. Albert Einstein, Louis de Broglie conduisent à Elie Cartan. Une Géométrie générale des Espaces couronnerait toutes les sciences par l'intermédiaire de la Physique.

Dans tout ce qui précède, M. Jean Thibaud a fait, sans insister, beaucoup de philosophie. Son titre, admirablement choisi, correspond bien aussi à des idées biologiques. Encore une fois nous ne pouvons créer des atomes mais nous pouvons influer sur leur évolution, les domestiquer, en attendant que leurs transformations libèrent des quantités d'énergie de plus en plus grandes dont il faut espérer que l'homme saura enfin se servir dans le sens du perfectionnement moral. A. Buhl (Toulouse).

Paul Lévy. — **Théorie de l'Addition des Variables aléatoires** (Monographies des Probabilités publiées sous la Direction de M. Emile Borel. Fascicule I). — Un volume gr. in-8° de xviii-332 pages. Prix: 120 francs. Gauthier-Villars. Paris. 1937.

Le Calcul des Probabilités s'étend toujours de façon prodigieuse. Nous avons dit précédemment (p. 124) toute l'admiration qui nous était inspirée par l'œuvre récente de M. Maurice Fréchet. Il est impossible d'être moins élogieux pour celle de M. Paul Lévy qui commence d'ailleurs une série de Monographies à ajouter, selon les modalités variables des procédés de découverte, au grand Traité publié sous la direction de M. Emile Borel, Traité aujourd'hui achevé.

Le nouvel ouvrage a le grand mérite d'être indépendant de tous préliminaires tant soit peu spéciaux; il ne dépend même pas du livre publié par l'auteur en 1925 et qui fut analysé ici-même (**24,** 1924-1925, p. 341). Il s'agit donc d'un instrument de travail pouvant être immédiatement utilisé par tout néophyte.

Une fois de plus, il apparaît que le Calcul des Probabilités actuel est un schéma homéomorphe à la Théorie des fonctions, cette expression désignant d'ailleurs tantôt la Théorie des fonctions analytiques, tantôt celle des fonctions de variables réelles, tantôt celle des fonctionnelles. Mais ce schéma a sa valeur propre, très grande, ainsi que ses intuitions spéciales que M. Paul Lévy a grandement raison de défendre. On n'évalue pas des probabilités, dans des domaines tant soit peu généraux, sans compter, sans mesurer

sans intégrer; dans les définitions fondamentales, le continu joue souvent un rôle plus clair que le dénombrable d'où une science qui peut être fondée sur des invariants intégraux (p. 7), de même qu'il y a des géométries constructibles à partir des notions de distance ou d'aire. Ce polymorphisme est une chose essentielle qu'il faut plutôt développer que restreindre pour l'accorder avec l'indéniable polymorphisme des intelligences.

Le Calcul des Probabilités peut donc commencer avec les généralités ensemblistes, par exemple avec les curiosités, facilement intuitives le plus souvent, des ensembles non dénombrables de mesure nulle. Nous avons (p. 14) l'intéressant exemple des nombres (compris entre 0 et 1) qui s'écrivent, dans le système décimal, sans employer un chiffre déterminé.

Pour des ensembles non mesurables, y a-t-il des extensions de la notion de mesure ? Certes, mais M. Paul Lévy fait ressortir le caractère artificiel de ces extensions. C'est plutôt, si l'on peut s'exprimer ainsi, à l'intérieur de la notion de mesure qu'il faut en rechercher la structure ainsi que des modifications utiles. D'où la notion, à coup sûr interne, de *partition*.

Ceci est bientôt suivi de l'intégrale de Stieltjes ayant, pour ainsi dire, une structure propre *dans l'élément d'intégration*. Il y a alors, tout naturellement, quelque chose d'analogue dans la *variable aléatoire* qui, elle aussi, a déjà un caractère fonctionnel, une structure qu'il faut pénétrer, bien avant de chercher à construire quelque chose avec une telle variable. Ce que l'on construira est encore fort limité comme l'indique ici le titre du volume; il est déjà bien joli que l'on puisse parler d'addition pour les variables aléatoires, cette addition pouvant à vrai dire comprendre une infinité de termes et ouvrant alors un monde d'idées concernant sa convergence. De telles questions rappellent le maniement des séries, tantôt sous leur forme propre, tantôt sous forme de constructions où les termes interviennent justement sous des formes à caractères de sommabilité, caractères très différents de ceux de la sommation pure et simple. Pour les variables aléatoires, nous n'en sommes guère qu'à cette dernière sommation mais les résultats obtenus n'en sont pas moins dignes de la plus grande attention. C'est tout un point de vue philosophique qui est en litige, l'homme s'étant beaucoup plus préoccupé jusqu'ici des effets du hasard que de sa structure. Maintenant c'est surtout la structure qui est en jeu.

En tout ceci la loi de Gauss, avec son intégrale fondamentale du type

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx\ ,$$

ne cesse point de jouer un rôle essentiel et j'en profite pour revenir à une remarque sur laquelle j'ai déjà essayé d'attirer l'attention. On sait que Mittag-Leffler, à propos de ses curieuses recherches sur le prolongement analytique, a construit une fonction entière $E_\alpha(x)$ qui croît indéfiniment dans un angle d'ouverture $\alpha\pi$ mais tend vers zéro, à l'infini, hors du même angle. Pour α égal à 1, la fonction E est l'exponentielle ordinaire; pour α égal à 1 : 2, la fonction E s'exprime immédiatement par l'intégrale ci-dessus. Il y a donc, dans la construction du grand géomètre suédois, à la fois l'exponentialité déterministe et les considérations probabilitaires attachées à la loi de Gauss. D'ailleurs, je ne crois pas m'éloigner beaucoup ici des idées de M. Paul Lévy; j'aperçois, par exemple, à la page 166 de

son beau livre, une expression probabilitaire à double limite qui est tout à fait dans la manière de Mittag-Leffler.

Je dois m'arrêter, bien à regret. L'auteur est d'une conscience qui pousse le scrupule jusqu'aux dernières limites quand il s'agit du rôle des travaux d'autrui. Il cite, toujours avec de grands développements, Bachelier, Bernstein, Bochner, Borel, Cantelli, Cramer, Daniell, Feldheim, Feller, de Finetti, Fréchet, Glivenko, Jessen, Khintchine, Kolmogoroff, Lebesgue, Liapounoff, Lindeberg, Linfoot, Slutsky, Steinhaus, Tornier, Wiener.

Mais l'œuvre est aussi originale que claire. L'enseignement synthétique qui s'en dégage est d'une puissance rarement atteinte.

Et, en corrigeant les épreuves de cette analyse bibliographique, je puis signaler une Note récemment publiée par M. Paul Lévy, aux *Comptes rendus* du 19 avril 1937. On trouve, dans cette Note, précisément un rapprochement de l'intégrale de Gauss avec des fonctions à la Mittag-Leffler ; si je puis me féliciter d'avoir prédit ce rapprochement, il faut reconnaître, d'autre part, que M. Paul Lévy n'en était pas loin. A. Buhl (Toulouse).

Louis Bachelier. — **Les Lois des grands nombres du Calcul des Probabilités.** Un fascicule gr. in-8° de viii-38 pages. Prix: 18 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Curieux exposé qu'il est fort naturel de mentionner ici, immédiatement après l'ouvrage de M. Paul Lévy lequel, d'ailleurs, cite M. Bachelier. Les travaux de ce dernier, en Calcul des Probabilités, sont bien connus et généralement jugés comme ayant une tendance manifeste à s'éloigner des sentiers battus. En tout cas c'est bien cette dernière impression qui me paraît dominer ici. Il s'agit de l'intégrale écrite ci-dessus et généralement rattachée à la loi de Gauss mais sans que M. Bachelier parle de Gauss. Il lui semble plus indiqué de mettre à l'honneur Laplace et de Moivre. Puis, au lieu d'étudier des probabilités d'écart par un telle intégrale, il étudie de nombreuses variations analytiques de celle-ci, variations qui ont encore un sens analytique relativement simple et, en définitive, se prêtent au calcul, pour rechercher ensuite les significations probabilitaires de telles variations ou extensions. C'est une manière, parmi d'autres, de subordonner le Calcul des Probabilités à des considérations de continuité, ce qui est surtout remarquable dans le domaine des lois de grands nombres, domaine où les nombres, quoique grands, sont discontinus.

Dans cet ordre d'idées, et plus particulièrement à propos de la périodicité du hasard, signalons un article publié par M. Bachelier dans *L'Enseignement mathématique* en tête du volume de 1915. Il y a, en tout ceci, des développements qui, pour être assez différents de ceux à caractère fonctionnel ou ensembliste, n'en sont pas moins très remarquables.

A. Buhl (Toulouse).

Rolf Nevanlinna. — **Eindeutige analytische Funktionen** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XLVI). — Un volume in-8° de viii-354 pages et 24 figures. Prix: RM. 27,60; relié, RM. 29,40. Julius Springer, Berlin.

Cette exposition de la Théorie des Fonctions analytiques uniformes, ou uniformisables, m'a tout de suite rappelé les *Leçons sur la Théorie des*

Espaces à connexion projective de M. Elie Cartan, *Leçons* récemment analysées (ce volume, p. 121). Le point de départ est de même, dans la considération de la petite (!) fonction homographique à une variable, de son comportement dans le champ complexe, par représentation conforme, et des *mesures* harmoniques qu'elle conditionne. La puissance d'une telle métrique se révèle prodigieuse; elle fait promptement rêver aux Univers projectifs.

On sait que l'automorphisme divise le champ complexe en domaines à frontières circulaires et que de tels domaines ont une connexion équivalente à celle des surfaces de Riemann. On pourrait, à la rigueur, commencer par ces dernières et étudier leur rôle uniformisant; c'est même ainsi que les choses se présentent dans l'ordre historique. Il vaut mieux — et c'est le point de vue du beau livre que j'ai sous les yeux — commencer par l'uniforme.

L'homographie à une variable complexe conduit bientôt à l'intégrale de Poisson d'où l'on passe aux généralités du Problème de Dirichlet. Les restrictions d'unicité qui accompagnent ce problème sont des préliminaires conditionnant les principes d'extension auxquels s'attachent actuellement les noms de Carleman, Milloux, Ahlfors, principes qui, d'autre part, peuvent aussi trouver leur origine dans les célèbres théorèmes d'exclusion de M. Emile Picard. Ce dernier était d'ailleurs parti de la fonction modulaire, donc d'un invariant fonctionnel attaché à une homographie.

C'est tout cela qui aujourd'hui se moule en des grandes lignes d'une admirable harmonie.

On sait tout ce que la Théorie des ensembles renferme de subtilités du côté des continus de mesure nulle. En ce qui précède, nous voyons intervenir les ensembles de mesure *harmonique* nulle. Cette mesure harmonique est vraisemblablement celle qui est adéquate au domaine analytique. Quel triomphe philosophique ! De plus en plus, nous constatons qu'il n'y a pas de notion métrique omnibus. Nos devanciers ont pu le croire mais ceci tenait à l'imperfection d'une science par trop calquée sur le domaine imparfait des sens. Actuellement on ne peut rigoureusement parler de mesure sans définir d'abord la mesurabilité et le domaine concerné par elle.

De même les intégrales, à rôle analytique, ne sont pas, de ce seul fait, des expressions à éléments différentiels dz toujours susceptibles d'une même définition. Toutes les subtilités des notions de mesure se retrouvent ici, notamment dans une représentation intégrale de Poisson-Stieltjes adéquate à l'étude de fonctions bornées. Il est alors curieux de constater que ces subtilités intégrales, que l'on pouvait croire attachées aux fonctions de variables réelles, se révèlent aussi « en structure fine » dans le monde analytique. Que de théories semblent ingénieusement se défendre contre des dépassements d'abord réputés plus généraux.

La place nous manque pour analyser davantage. Passons tout de suite à la fin du livre, au dernier Chapitre consacré aux théories topologiques de Ahlfors. Elles rappellent l'uniformisation des fonctions analytiques selon Henri Poincaré, mais toujours dans un ordre d'idées inverse. C'est en tirant tout ce que l'on peut, et avec un extraordinaire esprit de pénétration, des fonctions uniformes et des représentations conformes y attachées qu'on construit finalement les généralités non uniformes. Ceci n'implique qu'un regret: celui de voir la Théorie de Cauchy s'effacer. C'est notamment la

déroute des développements en séries. Mais il nous faut alors penser à la défense ingénieuse des théories qu'on croit supplanter, défense signalée il y a un instant. Il n'est pas impossible que ce soit le cas pour celles de Cauchy, leur caractère topologique étant manifeste.

La bibliographie de ces sujets s'avère fort riche. Hors des noms déjà cités, signalons ceux de Blaschke, Bloch, Borel, Carathéodory, Henri Cartan, Denjoy, Elfving, Evans, Faber, Fatou, Fékete, Fenchel, Frostmann, Gross, Grunsky, Hausdorff, Herglotz, Hille, Iversen, Jensen, Julia, Kœbe, Landau, Lebesgue, Lindelöf, Montel, Myrrberg, Ostrowski, Phragmén, Pick, Pólya, Pringsheim, Riesz, Robin, Schmidt, Schottky, Speiser, Szegö, Ullrich, Valiron. Que de noms célèbres et de Mémoires difficiles à rassembler. La magnifique synthèse de M. Nevanlinna vient à notre secours de la façon la plus originale et la plus heureuse. A. Buhl (Toulouse).

Nicolas Kryloff et Nicolas Bogoliuboff. — **Introduction à la Mécanique non linéaire.** Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine. Institut de Mécanique des Constructions. Annales de la Chaire de Physique mathématique, t. I-II. — Un volume gr. in-8° de 366 pages. Prix: 11 roubles. Publié par l'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine, Kiev, 1937.

Cette publication reprend la Mécanique non linéaire, laquelle a déjà grandement illustré les auteurs, et inaugure, en même temps, par les tomes I et II, de nouvelles *Annales* qui sont vraisemblablement dédiées à la Physique théorique. La publication serait conçue dans un grand esprit de libéralisme; les auteurs seraient rémunérés et pourraient appartenir à la Science internationale. Le premier élan vient de Kiev avec un sujet souvent cité ici, au moins en matière bibliographique. Voir nos volumes précédents: t. **30,** 1931, p. 180; t. **31,** 1932, p. 138-139 et 314-315; t. **33,** 1934, p. 242.

On sait que les idées fondamentales de MM. Kryloff et Bogoliuboff sont simples, du moins autant que le sujet le permet. Leur analyse se clarifie, se désencombre de plus en plus en se symétrisant, laissant apparaître la trame intuitive qui la supporte. Les équations de la Mécanique sont et ne cesseront point d'être canoniques tant qu'elles comporteront la recherche d'*intégrales* F à deux séries de variables x_i et y_i, d'où

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \partial y_i = 0 ,$$

relation décomposable, aussi simplement que possible, en

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} , \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

Et, comme le fait de poursuivre les intégrales, par approximations successives, ne change rien à cette notion d'intégrale, la forme canonique des équations peut être de toutes les approximations. Le fait est capital depuis longtemps en Mécanique céleste. Il fut merveilleusement mis à profit par Henri Poincaré; il continue à l'être, avec les auteurs actuels, en partant de *solutions* périodiques de première approximation lorsqu'il s'agit de systèmes conservatifs.

Mais tous les systèmes ne sont pas conservatifs et, chose pouvant sembler curieuse, des problèmes techniques, nés de considérations électriques ou élastiques, exigent plus que les problèmes de Mécanique céleste et souvent dans une autre voie. Il y aurait des cas où l'ingénieur serait presque tenu de surpasser l'astronome.

On n'est pas toujours certain de voir des équations différentielles au fond des questions; le Calcul symbolique de Heaviside peut avoir une première signification phénoménale suivie d'une approximation qui, elle, engendre des équations différentielles. Il y a là une véritable extension du fameux Calcul aux systèmes oscillants non linéaires.

Ceci semble de grande importance. Les équations différentielles, considérées comme génératrices de fonctions analytiques, ne régissent pas tout; il faut, de plus en plus, leur substituer des équations intégrales au delà desquelles bien des approximations restent mystérieuses. Qu'on puisse, dans des cas étendus, faire celles-ci par des méthodes différentielles non introduites avec le problème initial, voilà qui est bien digne de remarque, la séparation d'avec la Mécanique céleste devenant extrêmement nette.

Ceci n'empêche pas que, dans d'autres cas, nous avons des équations différentielles voisines d'équations « aisément intégrables ».

L'ouvrage est écrit en russe. Je l'analyse surtout à l'aide d'un résumé français de quinze pages qui le termine. Mais, même dans le corps de l'ouvrage, on peut reconnaître, avec sympathie, nombre de formules et d'équations classiques ou, du moins, à premier membre classique, le second membre ayant quelque rôle transcendant, né d'un problème technique, rôle qui n'est généralement analysable qu'avec les méthodes de l'ouvrage. Un vif désir d'étudier celles-ci naît alors; c'est ainsi qu'on en vient à émettre le vœu qu'un tel ouvrage soit entièrement traduit en français. Je l'ai déjà dit. Je le répète. Combien cela intéresserait nos meilleurs analystes, qui sont en petit nombre, mais aussi beaucoup de techniciens pour lesquels les linéarisations approchées seraient d'une étude des plus fécondes.

Les notes bibliographiques qui terminent le livre nous rappellent que ses auteurs ont déjà publié beaucoup de choses en français, en anglais, en allemand; ils ont déjà atteint, de ce fait, une remarquable réputation en Europe occidentale. Toutefois, la publication d'aujourd'hui me paraît avoir une si grande valeur propre que c'est elle dont je voudrais pouvoir me pénétrer pleinement. A. Buhl (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8° avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

181. — Louis de Broglie. *Une nouvelle conception de la Lumière.* (Exposés de Physique théorique. Direction Louis de Broglie. 48 pages, 1934. Prix: 12 francs). — Ce fascicule complète l'ouvrage de M. Louis de Broglie sur *L'électron magnétique.* Il s'agit d'une théorie *duale* de la lumière. Elémentairement toutes les microstructures linéaires peuvent être considérées comme duales. Mais ce point de vue, par trop simple, est absolument insuffisant. L'auteur cherche beaucoup mieux, en accord, autant que possible, avec les théories électroniques de Dirac. L'électron négatif semble apparenté à des « trous » avec lesquels il s'associe volontiers, ces trous jouant peut-être le rôle d'électrons positifs. Il faudrait, de même, séparer les photons en deux catégories ou, plus précisément encore, faire une théorie

de demi-photons différents mais toujours prêts à l'association. Ce qui est surtout remarquable, pour le moment, est qu'à de telles idées physiques, on peut faire correspondre des opérateurs, tantôt d'une forme matricielle et différentielle, tantôt d'une forme intégrale hermitique. Il y a, là aussi, une dualité en laquelle il existe sûrement quelque chose de beau et de nouveau.

182. — Irène CURIE et F. JOLIOT. *L'Electron positif.* (Exposés de Radioactivité et de Physique nucléaire. Direction de Mme Pierre Curie, 28 pages et 4 planches hors texte, 1934. Prix: 10 francs). — Ce sujet est étroitement associé au précédent et, cette fois, dans le domaine expérimental. La radiation cosmique ne s'expliquait pas sans électrons positifs mais il importait de vérifier l'existence de ceux-ci dans les circonstances énergétiques moins faibles. Avec des sources de glucinium irradié par les rayons α du polonium, source irradiant une lame de plomb, on obtient des trajectures corpusculaires incurvées positivement. De plus, ce qui nous rapproche du point de vue précédent de M. Louis de Broglie, il y a des matérialisations de photons en électrons positifs et négatifs. C'est ici le cas de rappeler la dualité de la lumière et de la matière, cette dernière semblant pouvoir s'anéantir en passant par l'état lumineux et réciproquement un Univers matériel pouvant surgir d'un substratum de lumière. Curieuses formes scientifiques d'accord avec la Genèse biblique.

Il semble aussi hors de doute, au point de vue expérimental, que l'électron positif ne peut subsister à l'état libre. Il se combine toujours avec un électron négatif pour donner une radiation électromagnétique. Sa durée de vie ne relève sans doute pas de la notion astronomique du temps.

190. 191. 192, 193. — Jean PERRIN. *Grains de Matière et de Lumière.* (Atomistique. Direction Jean Perrin. Quatre fascicules de 42, 52, 26 et 42 pages, avec planches, se vendant séparément 12, 14, 7 et 12 francs. 1935.) — *Première Partie: Existence des grains.* Encore l'œuvre d'un expérimentateur d'ailleurs doublé d'un philosophe. Ces quatre fascicules pourraient former un seul livre analogue à celui écrit sur *Les Atomes* par l'illustre auteur, livre nouveau représentant, en 1935, le caractère mouvant d'une science à variations très rapides. Mais le point de vue philosophique est celui désormais fixé par la Gravifique einsteinienne.

Je ne doute guère, écrit M. Jean Perrin (p. 7), qu'au delà d'une certaine profondeur dans l'analyse sans cesse plus fine de la Réalité, il faudra modifier ou cesser d'utiliser les grands concepts fondamentaux de l'Espace et du Temps, qui auront bien pu s'étendre prodigieusement, mais enfin pas indéfiniment, au delà de l'expérience journalière qui nous les a imposés. Puis quelques lignes après: Nos progrès dans la *description* de structures sans cesse plus fines s'arrêteront nécessairement quand toute pénétration plus profonde exigerait décidément la création d'images possibles seulement si nos sens étaient tout différents de ce qu'ils sont. Eh oui ! C'est ainsi que l'image géométrique disparaît fatalement. Il reste l'Analyse et aussi les conséquences expérimentales de ce qui n'est pas imaginable.

M. J. Perrin revient aussi sur la convergence des témoignages par où se traduit la réalité moléculaire. C'est cette méthode des témoignages qu'il étend aux électrons et aux photons. Toute la mécanique des charges électroniques constitue « une vérification précise et étendue de la Dynamique relativiste d'Einstein ».

Deuxième Partie: Structure des Atomes. Le plein vulgaire de la matière est un vide comparable à celui des espaces interplanétaires où gravitent, à des distances relativement prodigieuses, des corpuscules inimaginablement petits et denses. L'atome qui a perdu un électron est reconnaissable par ses trajectoires à électrisation positive. Et les métamorphoses radioactives commencent à se manifester dans l'existence des *isotopes.* On peut faire jaillir des électrons de tous les atomes et *admettre* (ce qui n'a pas un sens absolument certain) qu'ils préexistaient dans ces atomes; il est difficile, en effet, de parler du corpuscule expulsé comme du corpuscule encore en place dans un cortège. Mêmes difficultés pour le noyau, *pratiquement ponctuel*, tenant, en effet, moins de place, dans l'atome, que le Soleil dans une sphère englobant l'orbite de Neptune. En ceci, raisonnement par similitude qui n'est pas non plus de tout repos. Toutefois, malgré toutes ces difficultés, une théorie gravitationnelle, due surtout à Bohr, a pu se constituer et permettre de classer les atomes comme l'exigeait la nomenclature de Mendéleieff. Partout, dans ces domaines, la Mécanique classique est insuffisante. La Relativité einsteinienne l'est souvent aussi. Nous sommes à proprement parler, dans le domaine de la Mécanique quantique.

Troisième Partie: Noyaux des Atomes. Ici se place une première remarque, à notre avis absolument essentielle, sur la notion d'Espace, laquelle n'est peut-être plus applicable dans le Noyau. Ceci n'empêche pas toutefois la complexité de ce Soleil central dont la dislocation entraîne la radioactivité. M. Jean Perrin fait l'histoire de celle-ci. La place d'honneur appartient naturellement au Radium et à ses dérivés. Curieuse invariance du Radon dont la disposition se montre indépendante de toutes les influences que nous savons exercer ou reconnaître. Nous possédons aujourd'hui une filiation sans lacunes au sujet des transmutations qui s'opèrent à partir de l'Uranium; elle est résumable en un graphique des plus simples. Hypothèses de Gamow sur les niveaux énergétiques nucléaires. Neutrinos de Pauli devenant les Ergons de Francis Perrin et projetant de l'énergie sous une forme encore inconnue; ces nouveaux constituants de l'Univers tendent plus vers les photons que vers les corpuscules matériels.

Quatrième Partie: Transmutations provoquées. Nous arrivons à la phase merveilleuse de l'expérimentation créatrice. Deux noyaux peuvent s'amalgamer malgré une énorme répulsion à vaincre. C'est une barrière de potentiel à franchir. Ces barrières jouent encore un très grand rôle dans les théories de Gamow. Infranchissables avec les idées de la Mécanique classique, elles le sont grâce à des indéterminations de Mécanique ondulatoire.

Les étoiles du type Nova semblent relever de considérations analogues.

Les rayons cosmiques proviennent peut-être aussi de quelque métamorphose nucléaire interstellaire; ils sont vraisemblablement compliqués de photons suraigus. Leur énergie totale est comparable à celle de la lumière visible qui nous vient du ciel étoilé.

La lumière a des matérialisations, l'énergie cinétique aussi; en tout cas la transformation de matière en énergie n'est pas douteuse quand cette matière est faite d'électrons. Il y a des générations d'atomes inconnus radioactifs.

Les étoiles se dématérialisent sans cesse et, en dehors d'elles, dans le « vide » une énorme quantité de matière se trouve disséminée. Que de radiations nous entourent et nous pénètrent. La merveille est que nous commençons à nous en apercevoir et à y pouvoir quelque chose.

Que de travail en perspective, dans tout ceci, pour la jeune génération. Aussi comprenons-nous la joie dont l'auteur nous fait part en faisant allusion à l'aide précieuse qu'il trouve en la collaboration de son fils Francis Perrin.

210. — Paul Dubreil. *Quelques propriétés des Variétés algébriques se rattachant aux Théories de l'Algèbre moderne.* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, 34 pages, 1935. Prix: 10 francs). — Il s'agit de propriétés étudiées par *homogénéisation* d'équations ou de systèmes d'équations algébriques. La méthode est génératrice d'idéaux algébriques particulièrement symétriques. Les éléments de telles considérations se trouveront dans la *Moderne Algebra* de B. L. van der Waerden, ouvrage qui n'est pas destiné qu'à de rares esprits quintessenciés dans l'abstraction puisqu'il atteint la seconde édition. En France, de tels travaux sont aussi ceux de M. Légaut. Le présent fascicule développe deux Notes des *Comptes rendus*, t. 196, 1933, pp. 1270 et 1637.

Bien que l'auteur n'en dise rien, mentionnons que de telles préoccupations ne sont peut-être pas complètement étrangères à la microphysique, certains fronts d'ondes, transportant des invariants intégraux, gagnant à être représentés algébriquement sous des formes homogénéisées.

211. — Sir J. J. Thomson. *Au delà de l'Electron.* Traduction de R. Fric. Préface de M. A. Cotton. (Exposés de Physique théorique. Direction Louis de Broglie. 30 pages, 1935. Prix: 7 francs.) — Jolie conférence où l'illustre auteur nous fait part de travaux prolongés par son fils. Ceci avec un sentiment de fierté analogue à celui manifesté un peu plus haut par M. Jean Perrin. Qui n'y applaudirait avec plaisir. Le but poursuivi est d'analyser la nature de l'électron, de sa dualité corpusculaire et ondulatoire, en rattachant ces notions, autant que possible, aux conceptions de la science classique. Ce ne sera pas toujours possible mais il est d'un grand intérêt de rechercher ce que l'on peut faire de mieux à cet égard. Des discussions curieuses interviennent quant à la propagation de l'énergie. Il y a là des vitesses de propagation qui peuvent être extrêmement différentes de celles des ondes jouant cependant le rôle de véhicule. Charmantes comparaisons faites avec des groupes de jeunes gens et de jeunes filles, ces personnages étant généralement décalés mais provoquant, lors de la formation d'un couple, une perturbation énergétique maximum. Structure duale pour l'électron et pour le photon. Mesures directes impossibles sur l'électron; il est un lieu, une région de manifestations. Sa structure est l'effet de « quantisations » de quantités dynamiques.

Six pages de Notes, en fin du fascicule, reprennent quelques points essentiels au point de vue mathématique.

225. — H. Mineur. *Dénombrements d'Etoiles. Catalogues. Comparaison des séquences photométriques.* (Exposés d'Astronomie stellaire. Direction Henri Mineur. 56 pages, 1935. Prix: 15 francs.) — Il s'agit d'une étude de la Galaxie et de divers Univers typiques dont on altère la symétrie par approximations successives. Finalement la Galaxie est ellipsoïdale avec le Soleil à peu près dans le plan de l'équateur mais non au centre. Les cartes ou catalogues invoqués sont les Gauges de William et de John Herschel, la Bonner Durchmusterung, le Catalogue astrographique, les Cartes d'Harvard, les Cartes de Franklin Adams, les Selected areas. Toutes ces

entreprises ont leurs qualités et leurs défauts. Que de chercheurs se voient menacés, par exemple, leur vie durant, de n'aboutir à aucun résultat. De là, la publication des Selected areas où l'on s'efforce d'atteindre en profondeur ce que l'on néglige en étendue. Il est assez curieux de constater que des astronomes, tous de la plus grande valeur, sont assez loin de s'entendre sur le nombre total des étoiles de la Galaxie.

247. — G. Guében. *Structure nucléaire.* (Exposés de Physique moléculaire. Direction Victor Henri, 34 pages, 1935. Prix: 10 francs.) — Nous sommes de plus en plus loin du proton d'autrefois. Le noyau se complique terriblement. De plus les doutes naissent quant aux renseignements que donnent les corpuscules arrachés à l'atome (particulièrement au noyau) sur la constitution de celui-ci. Ces corpuscules sont-ils identiques avant et après l'arrachement ? L'idée du noyau formé de particules α, de protons et d'électrons est insuffisante. Il faut adjoindre les couches de neutrons et, d'après Francis Perrin, des demi-hélions (toujours les structures duales) qui seraient ici des deutons. Mais l'auteur a le grand mérite de ne pas persister dans ces descriptions trop géométriques. Sa structure nucléaire est celle d'une Algèbre linéaire, d'ailleurs très simple, qui paraît pouvoir s'accorder, au moins dans des cas étendus, avec l'existence des isotopes. De nombreux résultats, tous dus à des auteurs célèbres, rentrent ainsi dans des schèmes identiques. Les effets de la stabilité ou de l'instabilité nucléaire se lisent aisément sur ces formules.

248. — B. Rossi. *Rayons cosmiques.* (Exposés de Physique atomique expérimentale. Direction Maurice de Broglie, 48 pages, 1935. Prix: 12 francs.) — Le sujet s'étend. M. Rossi en donne même une bibliographie étendue. Encore une radiation que l'on pouvait croire simple et qui se révèle extrêmement complexe. Les corpuscules cosmiques se partagent en « mous », arrêtés par quelques centimètres de plomb, et en « durs » qui en traversent des mètres. Il faut considérer aussi un rayonnement primaire qui vient vraisemblablement de l'espace céleste et qui engendre, dans l'atmosphère, des rayonnements secondaires. Généralement, au contact de la matière, apparaît une dissémination en « gerbes » qui complique singulièrement l'observation. Le groupe mou serait composé d'électrons; le groupe dur est beaucoup plus difficile à identifier. Admettons provisoirement que la radiation cosmique, dans son ensemble, soit comparable à la radiation lumineuse stellaire. Quelle singulière idée aurait de l'Univers un être aveugle mais sensible à la radiation cosmique !

356. — Georges Darmois. *L'emploi des Observations statistiques. Méthodes d'estimation.* (Exposés de Statistique mathématique. Direction Georges Darmois. 34 pages, 1936. Prix: 10 francs.) — L'auteur résume des recherches et des résultats publiés par R.-A. Fisher depuis 1919. On spécifie une loi statistique en en fixant une forme analytique. Il y a un hyperespace d'observations où celles-ci sont localisées par des points M et, de même, un hyperespace, de possibilités, à points P. Tout revient à établir une correspondance, d'ailleurs *aléatoire*, entre ces espaces. Ceux-ci sont *distanciés* et peuvent même avoir une morphologie traduisant les diverses formes probabilitaires associables à l'estimation. Des considérations particulièrement importantes et élémentaires correspondent à la loi de Gauss.

Toutes ces considérations spatiales seraient peu utiles si elles n'entraî-

naient pas la considération d'invariants qui correspondent précisément à ce qu'il y a d'utile et d'incontestable dans l'usage des statistiques.

357. — L.-A. Santaló. *Integralgeometrie 5, über das kinematische Mass im Raum.* (Exposés de Géométrie. Direction W. Blaschke. 54 pages, 1936. Prix: 18 francs.) — Je ne vois pas nettement ce que vient faire le chiffre 5 dans le titre du fascicule. Il y aurait une *Integralgeometrie 1* dans le fascicule 252, de W. Blaschke lui-même, déjà analysé ici l'an dernier (p. 758) et une *Geometria Integral 4*, de L.-A. Santaló, dans les *Abhandlungen* du Séminaire mathématique de Hambourg. Mais où sont 2 et 3 ?

De toutes façons, il s'agit de mesures faites par continuité, par intégrations effectuées sur des ensembles de figures à lien cinématique. La forme probabilitaire de telles théories est naturelle, les probabilités d'intersection, de variétés à variétés, dépendant nécessairement de telles mesures. Nombreux exemples. Topologie des corps convexes avec Poincaré, Bonnesen, Minkowski. Comme point de départ, à forme spécialement didactique, l'auteur cite, très justement, les *Probabilités géométriques* de R. Deltheil, 1926.

358. — Oystein Ore. *L'Algèbre abstraite.* (Exposés d'Analyse générale. Direction Maurice Fréchet. 56 pages, 1936. Prix: 15 francs.) — Exposition particulièrement remarquable où l'auteur a tout défini avec le plus grand soin en ne supposant rien de connu parmi les grandioses notions introduites. Il s'agit de classifications d'opérations et de domaines de validité pour ces opérations. Corps, anneaux, groupes et modules, homomorphisme et isomorphisme, automorphisme, se définissent en quelques lignes, de manière à faire cesser certaines dissymétries établies dans l'esprit de beaucoup de mathématiciens. On peut savoir manier des groupes et ne jamais parler de corps ni d'anneaux; c'est fâcheux. Et les idéaux ? Ils sont dans les anneaux. Comme ils n'excluent pas la notion de division, ils idéalisent l'Arithmétique élémentaire. En général les opérations de l'Algèbre abstraite ne sont pas commutatives. Cette Algèbre est la clef de l'ensemble des transformations fonctionnelles, celles qui apparaissent pour raison physique ayant autant d'importance sinon plus que les autres. L'Algèbre dite abstraite est plus générale qu'abstraite. Insistons encore sur le merveilleux rôle initiateur du fascicule.

411. — Louis de Broglie. *Nouvelles Recherches sur la Lumière.* (Exposés de Physique théorique. Direction Louis de Broglie. 56 pages, 1936. Prix: 12 francs.) — Ces Recherches reprennent et perfectionnent celles du fascicule 181 analysé ici à une page précédente. Les équations d'onde du photon sont reprises de manière particulièrement symétrique et à l'aide d'une analyse à la Maxwell, analyse qui n'a pas seulement le mérite d'honorer la mémoire d'un nom illustre mais aussi celui de rapprocher, tout ce qui en dépend, des principes mathématiques intégraux ou mensurateurs. A notre avis, ceci suffit à donner la plus grande importance aux nouvelles conceptions de M. Louis de Broglie, malgré d'autres théories photoniques méritant aussi l'attention. Il y a notamment ici une solution d'annihilation du photon; c'est assez analogue et peut-être même complètement analogue (mais je n'approfondis point pour l'instant) aux équations phénoménales qui sortent d'identités intégrales quand ces identités prennent la forme $0 = 0$. En tout cas, les nouvelles équations photoniques s'accomodent aisément d'une onde plane et monochromatique. Il y a indéniablement un

formalisme photonique. Est-il d'accord avec tous les formalismes électromagnétiques ? Peut-être pas. Mais loin de redouter les désaccords, j'y vois des éléments générateurs de nouveautés du plus haut intérêt.

427. — Ch. PLATRIER. *Les Axiomes de la Mécanique newtonienne.* (Cours de l'Ecole Polytechnique. Direction Ch. Platrier. 60 pages, 1936. Prix: 14 francs.) — Ce fascicule me laisse une légère impression de malaise. J'ai suffisamment dit combien j'appréciais M. Platrier maniant le Calcul tensoriel (*L'Ens. math.*, **35,** 1936, p. 161 et **36,** 1937, p. 118) et reconstruisant l'édifice newtonien dans un esprit actuel. On dirait qu'à présent, l'auteur s'est un peu fatigué de cet esprit. Il nous présente l'Espace comme une sorte de solide virtuel (p. 10). Je suis de ceux que cela choque, le solide, le vrai solide, le seul sur lequel nous pouvons expérimenter, faisant partie de la croûte terrestre et ne jouant qu'un rôle infime dans l'Univers. Je trouve que l'extrapolation n'est pas légitime. Elle ne l'est pas non plus dans le monde corpusculaire.

Page 14, la Mécanique de Newton est encore une approximation estimable de la Mécanique d'Einstein. Fort bien. J'ajouterai même « très estimable ». Mais au bas de la même page, la défaite des Principes newtoniens n'est point acquise ! Que vient faire ici l'idée de « défaite » ? Ces Principes ne seront jamais défaits dans les domaines où ils sont applicables ni jamais victorieux en dehors. Ceci dit, il est entendu que, dans le domaine euclidien du solide parfait, et avec la notion vulgaire du temps, il y a une Mécanique classique et rationnelle qui a donné lieu à d'immenses travaux dont on peut chercher, dont il est même indispensable de chercher à codifier les bases. A ce point de vue l'exposition de M. Platrier reprend une valeur certaine.

436. — René DE POSSEL. *Sur la Théorie mathématique des Jeux de hasard et de réflexion.* (Conférences du Centre universitaire méditerranéen de Nice. Direction Paul Valéry. 46 pages, 1936. Prix: 10 francs.) — Ces remarques sur la Théorie mathématique des Jeux sont faites à peu près sans mathématiques. Quelques tableaux arithmétiques et de nombreux schèmes à bâtonnets suffisent. Mais, où l'auteur fait quelque chose d'assez inattendu, c'est quand, à côté de la réflexion et du hasard, il introduit la ruse. L'idée paraît appartenir à J. von Neumann, bien connu pour ses travaux de Physique théorique. D'ailleurs, par « jeu », il faut entendre le jeu incessant de nos pensées et de nos décisions, en y comprenant les attitudes de certains individus, particulièrement capables ou téméraires, qui semblent ruser avec le Destin. Les dictateurs sont peut-être de cette catégorie. M. René de Possel n'en dit pas tant mais il étudie ingénieusement les influences isolées, puis combinées, du Hasard, de la Réflexion et de la Ruse.

L. ESCANDE. — **Barrages.** Calcul des Barrages poids à profil triangulaire. Profil optimum de Barrage déversoir. Tracé aérodynamique des Piles. Préface de M. Charles Camichel. — Fascicules 476, 477, 478 des *Actualités scientifiques* réunis en un volume gr. in-8° de 182 pages et 68 planches hors texte. Prix, pour chaque fascicule: 20 francs. Hermann et Cie, Paris, 1937.

C'est la réunion des trois fascicules, en un ouvrage parfaitement homogène, que nous avons sous les yeux. C'est cet ouvrage qu'il nous semble logique de signaler et d'analyser.

La Préface de M. Charles Camichel rend l'analyse difficile. Comment, sans le répéter, exprimer les choses aussi bien que lui ? Cependant le caractère original de l'œuvre prête à bien des variantes. Il apparaît, tout de suite, que le barrage n'est pas l'obstacle purement statique, surtout quand il devient barrage-déversoir. Son profil s'inspire alors de la dynamique de l'eau en déversement et devient même « aérodynamique » quant à la structure de piles qui se comportent, par rapport à cette eau, comme des ailes d'avions par rapport à l'air. Encore un rapprochement des plus curieux, une véritable « homéomorphie » d'autant plus remarquable qu'elle se présente dans le domaine technique. Ce domaine en contient d'ailleurs beaucoup d'autres. De telles analogies ne prennent toute leur signification qu'en reposant sur une analyse mathématique convenable et, dans cet ordre d'idées, M. Escande s'est montré aussi bon théoricien qu'habile technicien. D'une part, nous avons les généralités sur l'équilibre élastique, compatibles avec des représentations géométriques simples telles celles fournies par le cercle de Mohr ou d'Ocagne, d'autre part des considérations dynamiques appuyées sur la Théorie des fonctions analytiques et particulièrement sur la représentation conforme. Partout l'auteur a tenu à être élémentaire, au moins au début de ses exposés. Les changements de variables, les propriétés analytiques invoquées font l'objet de développements détaillés. Les procédés de la Statique graphique sont également mis en œuvre et, quand cette partie théorique a donné tout ce qu'il était raisonnable de lui demander, les résultats, d'ordre expérimental, qui lui échappent, donnent alors lieu à d'admirables abaques dessinés, hors texte, en une soixantaine de planches.

Le barrage non déversant, comme nous le disions plus haut, est loin d'être la simple masse-obstacle. L'eau ne tend que trop à s'y infiltrer, d'où d'ingénieuses structures, à puits et à cavités, permettant de contrôler sans cesse ces infiltrations. Quant aux barrages-déversoirs, ils peuvent donner lieu à toute la savante analyse inaugurée par M. Henri Villat dans ses recherches sur les courants fluides contraints de contourner des solides. A cet égard, un grand champ de recherches reste ouvert. Les piles aérodynamiques sont déjà des merveilles mais il est aussi indiqué d'en chercher des perfectionnements qu'il est indiqué d'en rechercher indéfiniment dans la théorie de l'avion. D'où un double mérite pour l'ouvrage de M. Escande. Il expose la science acquise, montre ce que l'on peut faire avec ce qui est déjà fait. Mais il incite aussi à poursuivre, dans un grand esprit d'originalité, des travaux théoriques dont la mise en pratique est encore incomplète. Les études sur modèles réduits, les similitudes ont toujours été en grand honneur dans le séminaire hautement scientifique dirigé par M. Charles Camichel. C'est encore un point à souligner dans ces pages destinées à la fois à des praticiens et à des élèves séduits par l'avenir de la technique.

A. Buhl (Toulouse).

Pietro Burgatti. — **Elementi di Calcolo vettoriale e omografico** (Manuali Hoepli). — Un volume in-16 de x-188 pages, relié. Prix: Lire 10. Ulrico Hoepli, Milan. 1937.

Il n'y a pas à découvrir les travaux et publications vectorielles de M. Burgatti, généralement associés à des productions identiques de M. M. Marcolongo, Burali-Forti et Boggio. C'est le cas, par exemple, pour les *Trasformazioni lineari* éditées chez Zanichelli à Bologne. C'est vraisemblablement ce dernier volume qui, condensé, a donné le présent manuel.

N'insistons pas sur le Calcul vectoriel très réduit qui n'est appliqué qu'à des mouvements. L'un des grands mérites de MM. Burgatti et Marcolongo est d'avoir toujours prolongé ce Calcul par des considérations homographiques ou linéaires. A ces transformations correspondent des matrices qui sont des instruments algébriques généraux pour passer de vecteur à vecteur. Ceci, les auteurs l'ont dit, avant que la microphysique ne se soit emparée des matrices; ils sont donc particulièrement qualifiés pour le répéter maintenant.

Après les matrices algébriques, nous arrivons aux déterminants ou matrices symboliques dont quelque rangée est formée d'opérateurs de dérivation. C'est le point de vue stokien. Il aboutit à quelques développements concernant les Théories élastiques. Mais, chose qui me frappe toujours, pourquoi pas aussi bien aux équations électromagnétiques de Maxwell ? Ce n'est pas plus compliqué et c'est plus fondamental encore pour le développement des théories actuelles. Toutefois, précisément parce que le point de vue électromagnétique n'est pas d'abord plus difficile que le point de vue élastique, le présent exposé peut être considéré comme une initiation des plus commodes aux grandes lignes des constructions universelles élaborées depuis le début du siècle. A. Buhl (Toulouse).

A. Buhl. — **Analogies corpusculaires et ondulatoires.** Préface de M. Louis de Broglie (Mémorial des Sciences physiques; fasc. XXXIV). — Un fascicule in-8° de vi-64 pages et 8 figures. Prix: 18 francs. Gauthier-Villars, Paris. 1937.

La Préface de M. Louis de Broglie situe, aussi exactement qu'aimablement, l'œuvre de M. Buhl. Celui-ci développe des idées microstructurales connues des analystes depuis qu'existent, par exemple, les intégrales de Stieltjes et de Lebesgue; il raisonne sur les tubes ou canaux d'une congruence au moyen de fronts d'ondes transversaux qui ne se raccordent pas obligatoirement de canal à canal contigu. C'est ainsi que la propagation ondulatoire peut devenir corpusculaire. Ce point de vue est encore celui exposé récemment dans *L'Enseignement mathématique* (ce volume, p. 49); on peut lui associer non seulement l'onde pilotant des corpuscules mais l'équation de Jacobi et le Principe de Huyghens, l'équation de Schrödinger, les Incertitudes de Heisenberg, le Temps généralisé multiplement paramétrique et même fonctionnel, la mesure modifiant l'allure d'un phénomène, le photon à polarisation duale, le corpuscule à spin, la permutation des symboles opératoires, la non-répétabilité des mesures. Il y a là comme une Mécanique ondulatoire réduite et préliminaire. A propos des incertitudes de celle-ci, signalons que M. Louis de Broglie, dans une interview accordée à M. André Rousseaux (*Candide*, 13 mai 1937), cite un passage des *Nouveaux Eléments d'Analyse* de M. Buhl (t. I, p. 8) où ce dernier dit: « Au point de vue psychologique, de telles indéterminations sont banales; ce sont celles de l'esprit subtil qui perçoit une foule de modalités et hésite là où l'esprit grossier ne voit qu'une chose et se bâtit tout de suite une opinion. Ce qui est curieux et bien digne d'être considéré, c'est que les progrès de la Science ont introduit, dans le domaine géométrico-physique, justement ce doute et cette hésitation qu'on pouvait croire réservés au domaine psychologique ». Cette citation achèvera de montrer, très rapidement, le secours élémentaire que les expositions de M. Buhl peuvent apporter à la compréhension de l'œuvre magnifique de M. Louis de Broglie. H. Fehr.

V. Kostitzin. — **Biologie Mathématique.** (Collection Armand Colin, *Section de Biologie*, N° 200.) Préface de V. Volterra. — Un vol. in-16 de 215 pages avec 16 figures; broché, 13 fr.; relié, 13 fr. 50. Paris, 1937.

Depuis quelque temps, on assiste à une vraie floraison de publications mathématiques consacrées aux problèmes biologiques. Si la mathématique n'est que le bon sens symbolisé, il n'est que trop naturel que le langage mathématique puisse exprimer les faits et les processus biologiques.

L'ouvrage de M. V. A. Kostitzin permet au biologiste de prendre connaissance des services que la méthode mathématique peut lui rendre et donne au mathématicien une idée des problèmes biologiques qui attendent encore leur solution. L'auteur expose un ensemble très vaste de faits biologiques susceptibles d'être traités par les Mathématiques: vie dans ses rapports avec le milieu, croissance d'une population homogène sous l'action de facteurs naturels très variés, population logistique, populations hétérogènes, relations entre espèces, symbiose et parasitisme, croissance embryonnaire et post-embryonnaire des organismes, forme et mouvement, sélection naturelle, évolution. M. V. A. Kostitzin ne se contente pas de développements mathématiques, mais fait participer à son argumentation un très riche matériel biologique.

Une préface de M. Vito Volterra, l'éminent mathématicien italien, père spirituel de la biologie mathématique, sert d'introduction à cet ouvrage, qui sera accueilli avec grande faveur par les étudiants, par les mathématiciens, par les biologistes et aussi par le grand public curieux de voir comment on peut ramener à des formules mathématiques les divers phénomènes de la vie.

B. L. van der Waerden. — **Moderne Algebra,** Erster Teil (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XXXIII, Erster Teil). Zweite verbesserte Auflage. — Un vol. in-8°, 272 pages; broché, RM. 15,60; relié, RM. 17,20. Julius Springer, Berlin, 1937.

La première édition publiée en 1930 a été rapidement épuisée. L'auteur a remanié le tome I de manière à en faire un ouvrage d'introduction à l'Algèbre moderne mise à la portée des débutants. Sous cette nouvelle présentation, le Traité de M. van der Waerden constitue une excellente initiation aux théories modernes de l'Algèbre.

Les matières ont été groupées comme suit: Zahlen und Mengen. — Gruppen. — Ringe und Körper. — Ganze rationale Funktionen. — Körpertheorie. — Fortsetzung der Gruppentheorie. — Die Theorie von Galois. — Unentliche Körpererweiterungen. — Reelle Körper. — Bewertete Körper.

G. Schulz. — **Formelsammlung zur praktischen Mathematik.** (Sammlung Göschen, 1110). — Un vol. in-16 de 147 pages et 10 figures; relié toile, RM. 1,62; Walter de Gruyter & Co, Berlin et Leipzig, 1937.

Ce Recueil contient les formules et procédés de calcul d'un usage courant dans les applications numériques des mathématiques supérieures. Après avoir rappelé quelques méthodes auxiliaires telles que l'emploi des séries, la règle à calculs, la nomographie, l'auteur examine le calcul des

erreurs, la résolution numérique des équations, l'interpolation, les quadratures et les sommations, l'interpolation trigonométrique, l'analyse harmonique, puis l'intégration des équations différentielles avec les procédés de Runge, Heun, Kutta, Adams et Störmer pour les équations du premier ordre.

La plupart de ces objets sont accompagnés d'exemples numériques ainsi que des indications bibliographiques permettant au lecteur de recourir aux ouvrages fondamentaux sur les méthodes d'approximations numériques en Arithmétique, en Algèbre et en Analyse. On trouvera en outre, à la fin du volume, une liste des tables numériques et des formulaires mathématiques utiles au calculateur.

Université de Lausanne. — **A la mémoire de Gustave Juvet,** 1896-1936. — Un vol. in-8° de 111 pages. Lausanne 1937.

Dans une cérémonie qui eut lieu le 23 mai 1936, à l'Université de Lausanne, un suprême hommage fut apporté au savant mathématicien suisse Gustave Juvet, décédé subitement le 2 avril 1936. La présente brochure contient, après la liste des publications de G. Juvet, les discours qui ont été prononcés à cette occasion par MM. G. Dumas, R. Wavre et J. Piaget. Dans une seconde partie, on a réimprimé trois de ses travaux choisis parmi ceux qu'il est difficile de se procurer:

La vie des étoiles (Revue universelle du 15 janvier 1927).

Considérations sur la Relativité et les Théories physiques (Leçon d'ouverture, Lausanne, 18 décembre 1928).

Discours d'installation (Lausanne, 29 novembre 1928).

L'Ecole d'Ingénieurs et l'Université de Lausanne ont tenu, par cette publication, à conserver la mémoire du savant professeur qui a si grandement honoré la Suisse.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux:

Index generalis, dix-septième année, 1937. Annuaire général des Universités et des Grandes Ecoles, Académies, Archives, Bibliothèques, Instituts scientifiques, Jardins botaniques et zoologiques, Musées, Observatoires, Sociétés savantes. Publié sous la direction de: R. de Montessus de Ballore. — Un vol. in-16 de 2435 p.; 275 fr.; Masson & Cie, éditeurs, Paris, 1937.

P. Appell. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). Tome quatrième. Fascicule II. Les Figures d'équilibre d'une masse hétérogène en rotation; Figure de la Terre et des planètes. Deuxième édition, mise à jour par A. Véronnet. — Un vol. in-8° de xii-292 pages, 65 fr.; Gauthier-Villars et Cie, 1937.