5. — Les surfaces de Riemann et le théorème d'uniformisation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

gungsgruppe). Nous retrouvons $\mathfrak{M}$ à partir de $\hat{\mathfrak{M}}$ en identifiant les points équivalents par rapport à ce groupe.

Par exemple, le recouvrement universel du tore est le plan euclidien, car celui-ci est simplement connexe, et les transformations du plan euclidien en soi sont les translations conservant le réseau quadratique. Le domaine de discontinuité de ce groupe de superpositions est un carré dont les côtés opposés sont équivalents; en les indentifiant on a la surface fermée du tore.

Soit dit en passant, le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ est toujours isomorphe au groupe fondamental de $\mathfrak{M}$, on pourra donc sans autre introduire le groupe fondamental comme groupe de superpositions de la variété de recouvrement universelle.

Ce n'est pas en vain que nous avons insisté avec tant d'énergie sur le théorème d'existence et d'unicité. Nous en ferons des applications importantes à trois des plus beaux problèmes mathématiques: la classification des surfaces de Riemann, des formes spatiales et des groupes continus.

5. — Les surfaces de Riemann et le théorème d'uniformisation.

En théorie des fonctions il s'agit de surfaces de Riemann[1]. Une surface de Riemann y est définie comme une variété à deux dimensions portant une métrique angulaire; la représentation conforme de deux surfaces de Riemann a donc un sens bien déterminé. Pour être plus précis, il faudra donc ajouter aux trois axiomes de la variété du § 1 la condition de conformité:

Un voisinage de tout point P *est rapporté à une variable complexe qui est appelée uniformisante locale. C'est-à-dire, le voisinage est représenté sur une partie du plan complexe. Soient* Q *un point du voisinage* $\mathfrak{V}(P)$, t_P *et* t_Q *des uniformisantes locales en* P *et* Q; t_Q *devra être une fonction analytique de* t_P.

Il est permis de parler de fonctions analytiques sur une surface de Riemann de ce type. Il est également possible de représenter

[1] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig, 1923).

conformément deux surfaces de Riemann l'une sur l'autre. Nous ne distinguerons pas l'une de l'autre deux surfaces de Riemann admettant entr'elles une représentation conforme.

Une conséquence immédiate de cette définition de la surface de Riemann est que toute variété de recouvrement d'une surface de Riemann est elle-même une surface de Riemann. Car si les points $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... sont au-dessus de P, il suffit de transporter l'uniformisante locale de P à ces points. Pour toute surface de Riemann il existe en particulier une surface de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ universelle, univoquement déterminée, comme nous venons de le voir. En partant de cette dernière on retrouve la surface fondamentale $\mathfrak{M}$ en appliquant le groupe de superpositions de $\hat{\mathfrak{M}}$ et en identifiant les points équivalents. Il est clair que ce groupe est un groupe discontinu de représentations conformes, sans points fixes.

Le problème de la classification des surfaces de Riemann se scinde maintenant en deux questions partielles:

I° *Trouver toutes les surfaces de Riemann simplement connexes.*

II° *Trouver tous les groupes de transformations conformes, discontinus, sans points fixes qui transforment chacune de ces surfaces de Riemann simplement connexes en elles-mêmes.*

Le premier problème est le problème fondamental de la théorie de l'uniformisation. Nous y répondons par le théorème d'uniformisation de Poincaré et de Koebe: Il existe trois surfaces de Riemann simplement connexes, la sphère des nombres complexes, le plan des nombres complexes et l'intérieur du cercle unité.

La résolution de la première question facilite la réponse à la seconde. Nous savons qu'une transformation conforme d'une de ces trois surfaces est une transformation l i n é a i r e. Nous obtiendrons donc toutes les surfaces de Riemann à partir de ces trois, en leur appliquant tous les groupes possibles discontinus, de transformations linéaires, sans points fixes.

Toute surface de Riemann est, il est vrai, une variété à deux dimensions, mais par contre toute variété à deux dimensions n'est pas une surface de Riemann. Les variétés à deux dimensions

non orientables en sont exclues; car l'uniformisante locale détermine en chaque point une orientation. Les uniformisantes locales des points voisins s'obtenant par transformations analytiques de l'une dans l'autre, l'orientation est cohérente sur toute la surface, puisque les transformations analytiques ne renversent pas le sens de l'orientation. De plus toute surface de Riemann peut être triangulée, c'est-à-dire qu'on peut la recouvrir par un ensemble dénombrable de triangles[1].

Inversement toute variété à deux dimensions orientable sera une surface de Riemann s'il est possible de la trianguler. On démontre cette proposition en construisant une surface homéomorphe à la surface donnée recouvrant en tout ou en partie la sphère, et qui peut être ramifiée en certains points. On peut effectuer très simplement cette construction de la façon suivante: Soit donnée une certaine triangulation de la surface topologique à laquelle nous donnons une certaine orientation. De même, nous donnons une orientation déterminée à la sphère sur laquelle nous voulons appliquer la surface. Nous choisissons pour chaque sommet de notre triangulation un point sur notre sphère. Ce choix est arbitraire sauf que trois quelconques de ces points ne doivent jamais être situés sur le même grand cercle (on peut les prendre par exemple tous sur un même parallèle). Alors, nous représentons chaque triangle de la triangulation donnée de la surface par le triangle sphérique qui est déterminé par les trois points correspondants aux trois sommets. Cette représentation est biunivoque, si l'on exige que l'orientation donnée de la surface et l'orientation donnée de la sphère soient transformées l'une dans l'autre. La représentation de tous les triangles engendre une représentation de toute la surface sur la sphère comme nous la cherchons.

La théorie des fonctions comme on la traite d'habitude, ne part pas de la surface de Riemann, mais bien de la fonction analytique qui est donnée par une série de puissances. Les éléments de cette fonction analytique sont alors les points de la surface de Riemann. En définissant des voisinages dans l'ensemble de ces points on en fait une variété à deux dimensions qui est une surface de

[1] T. Radó, Ueber den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2 (1925), p. 101-121.

Riemann dans le sens expliqué plus haut[1]. Mais on a besoin d'une démonstration spéciale pour être sûr que toute surface de recouvrement est une surface de Riemann elle-même, engendrée par une fonction analytique.

6. — Problème des formes spatiales.

Les formes spatiales de deux et de plusieurs dimensions sont en rapport immédiat avec les surfaces de Riemann. Une forme spatiale est une variété à n dimensions munie d'une métrique de Riemann, qui dans le voisinage de tout point est congruente à celle d'un espace ou bien sphérique ou euclidien ou hyperbolique. On distinguera donc les différents cas des *formes spatiales sphériques*, *euclidiennes et hyperboliques.*

Nous avons de nouveau le théorème: Une variété de recouvrement d'une forme spatiale est encore une forme spatiale, puisqu'il est possible de calquer la métrique de la variété fondamentale sur la variété de recouvrement.

Il suffira donc d'étudier les deux points suivants pour trouver toutes les formes spatiales:

I° *Les formes spatiales simplement connexes*,

II° *Leurs groupes discontinus de transformations congruentes sans point fixe.* Nous appellerons ces groupes aussi les groupes discontinus de mouvements [2].

La première question qui est l'analogue du problème d'uniformisation est résolue par le théorème de H. Hopf [3] qui dit: Il n'existe pour toutes les dimensions que trois formes spatiales simplement connexes, à savoir: l'espace sphérique, l'espace euclidien, l'espace hyperbolique. La démonstration de ce théorème ne présente pas autant de difficultés que celle du théorème d'uniformisation. Faisons l'hypothèse, qui sera réduite à l'absurde, qu'il existe deux formes spatiales $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ euclidiennes, simplement connexes. Nous menons à partir d'un point O_1 de $\mathfrak{M}_1$ toutes les lignes géodésiques possibles et nous

---

1 H. Weyl, *loc. cit.*

2 D'après M. E. Cartan ce sont les groupes d'holonomie; c. f. E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann.* Paris, 1928, p. 72.

3 H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Ann.*, 95 (1925), p. 313-339.