2. — Recouvrement sans ramification.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

par une représentation biunivoque qui conserve les voisinages on parle d'une représentation topologique; les deux variétés sont dites topologiquement équivalentes ou encore *homéomorphes.*

Nous exigeons en outre d'une variété:

3° *Qu'elle soit d'un seul tenant*, c'est-à-dire que deux quelconques de ses points puissent être reliés par un chemin; nous entendons par chemin une image continue du segment unitaire.

Enonçons encore une fois brièvement les trois *axiomes de la variété:*

M1: *Avec tout voisinage d'un point, tout sous-ensemble contenant ce voisinage est voisinage lui aussi.*

M2: *Il y a partout des voisinages sphériques.*

M3: *La variété est d'un seul tenant.*

Dans cette notion sont comprises toutes les surfaces fermées, comme la sphère ou le tore, toutes les surfaces ouvertes comme le plan euclidien ou l'hyperboloïde à une nappe, mais non pas les surfaces à bords, comme le disque circulaire, la condition M2 n'étant pas satisfaite pour les points du bord. Des exemples bien connus de variétés à n dimensions sont l'espace euclidien et l'espace projectif à n dimensions[1]. D'autres exemples sont les espaces de groupes continus.

2. — Recouvrement sans ramification.

Nous allons maintenant définir les variétés de recouvrement sans ramification. Nous nous laissons guider dans ce but par l'exemple du recouvrement du tore. Nous désignerons par la suite la variété fondamentale par $\mathfrak{M}$ et celle de recouvrement par $\overline{\mathfrak{M}}$. Soient P un point de $\mathfrak{M}$ et $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... les points de $\overline{\mathfrak{M}}$ situés au-dessus de P. Si l'on adjoint à chaque point $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... le point P situé au-dessous, on obtient une représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur $\mathfrak{M}$. Chaque point de $\mathfrak{M}$ est évidemment l'image d'un point de $\overline{\mathfrak{M}}$ au moins; c'est-à-dire: au-dessus de chaque point de $\mathfrak{M}$ se

[1] D'autres exemples se trouvent e. g. dans les travaux cités plus loin, § 6, et de plus dans C. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Annals of Math.*, 35 (1934), p. 396-443.

trouve au moins un point de $\overline{\mathfrak{M}}$. De plus, si l'on calque un petit voisinage sphérique d'un point P de la variété fondamentale sur tous les feuillets de la variété de recouvrement il est clair que les voisinages résultant de $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... sont représentés par G topologiquement sur le voisinage fondamental. Dans la fig. 2

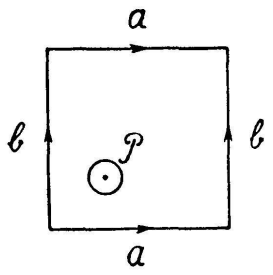

Fig. 2.

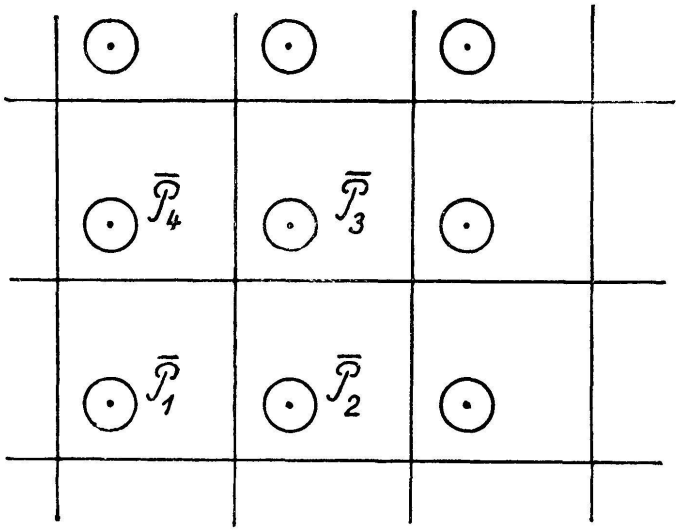

Fig. 3.

on a représenté le tore par un carré dont on a à identifier les côtés opposés. Dans la fig. 3 on a la division correspondante du plan avec les points $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... situés au-dessus d'un même point P.

Les deux propriétés de la variété de recouvrement que nous venons de citer, subsisteraient encore si l'on supprimait un point, disons $\overline{P}_1$, de la variété de recouvrement. Pour exclure des éventualités de ce genre, il est nécessaire d'ajouter un nouvel axiome: Soit Q un point quelconque de $\mathfrak{V}(P)$ et $\overline{Q}$ un point situé au-dessus de Q; nous exigeons que $\overline{Q}$ appartienne toujours à l'un des voisinages $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, ... Considérons par exemple le plan euclidien de la fig. 3 pointé en $\overline{P}_1$. Les points situés au-dessus de P sont alors $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, ..., et les voisinages situés au-dessus de $\mathfrak{V}(P)$ sont $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_3)$, ... L'ensemble de ces voisinages épuise les points situés au-dessus de $\mathfrak{V}(P)$, exceptés ceux du voisinage de $\overline{P}_1$; le nouvel axiome n'est donc pas satisfait.

L'exemple du tore nous a donc fourni trois propriétés importantes. Nous les élevons au grade d'axiomes des variétés de recouvrement, sans ramification, d'une variété quelconque. Nous dirons: Une variété $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre une variété $\mathfrak{M}$ s'il existe une

représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur $\mathfrak{M}$ ayant les propriétés suivantes:

R1: *Tout point* P *de* $\mathfrak{M}$ *est l'image d'un point de* $\overline{\mathfrak{M}}$ *au moins.*

R2: *Il existe des voisinages* $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, ... *des points* $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... *situés au-dessus d'un point* P, *qui sont représentés topologiquement sur un même voisinage* $\mathfrak{V}(P)$ *de* P.

R3: *Soit* Q *un point de* $\mathfrak{V}(P)$ *et* $\overline{Q}$ *un point situé au-dessus de* Q; $\overline{Q}$ *appartient alors à l'un des voisinages* $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, ...

R1 signifie que $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre $\mathfrak{M}$ complètement, R2 que la relation entre $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ est localement topologique, R3 que $\overline{\mathfrak{M}}$ n'a pas de frontière; c'est-à-dire que, étant donné dans la variété fondamentale une courbe partant d'un point O, on peut la calquer sur $\overline{\mathfrak{M}}$ de telle sorte qu'elle parte d'un quelconque des points situés au-dessus de O, sans jamais toucher une frontière, ce qui aurait lieu par exemple au point P_1, considéré tout à l'heure.

3. — Existence de la variété universelle de recouvrement.

La question suivante se pose: Etant donnée une variété $\mathfrak{M}$, combien possède-t-elle de variétés de recouvrement différentes ? Il est possible de répondre complètement à cette question, lorsqu'on connaît le groupe fondamental de $\mathfrak{M}$ dans toute sa structure. La réponse est donnée par le théorème suivant: « Les variétés de recouvrement correspondent biunivoquement aux sous-groupes du groupe fondamental, ou plutôt aux classes de sous-groupes conjugués. » *En ce cas deux variétés de recouvrement de* $\mathfrak{M}$ *ne seront pas différentes, si elles admettent une représentation topologique l'une sur l'autre, telle que les images des points situés au-dessus d'un même point soient elles-mêmes situées au-dessus de ce point.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration complète du théorème [1], mais nous nous bornerons à un cas spécial, particu-

[1] Voir H. Seifert et W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig, 1934), chap. VIII. On y trouve aussi les détails supprimés dans la démonstration du texte.