II. — Etude sommaire des carrés latins semi-diagonaux ET DÉTERMINATION DES CARRÉS D'EULER.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Voici encore quelques séries de module 13.

1 . 8 . 6 . 11 . 13 . 5 . 12 . 4 . 10 . 7 . 9 . 3 . 2
1 . 11 . 7 . 10 . 3 . 13 . 8 . 5 . 12 . 9 . 6 . 4 . 2
1 . 10 . 8 . 13 . 11 . 4 . 6 . 9 . 12 . 7 . 5 . 3 . 2
1 . 3 . 12 . 10 . 13 . 11 . 9 . 7 . 6 . 8 . 5 . 2 . 4
1 . 7 . 11 . 13 . 1 . 12 . 5 . 10 . 3 . 9 . 8 . 2 . 4
1 . 6 . 13 . 9 . 12 . 4 . 2 . 10 . 8 . 11 . 7 . 5 . 3

Après les explications qui précèdent, le problème des carrés d'Euler d'un module premier consiste à déterminer les carrés latins semi-diagonaux gauches que fournit ce module. Il me reste à montrer le procédé à employer à cet effet.

II. — Etude sommaire des carrés latins semi-diagonaux et détermination des carrés d'Euler.

Je rappelle que ces carrés latins doivent être construits par permutations circulaires.

Considérons le carré latin ci-après [1]:

1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	1	
4	5	6	7	1	2	3	
6	7	1	2	3	4	5	(1)
3	4	5	6	7	1	2	
7	1	2	3	4	5	6	
5	6	7	1	2	3	4	

2	3	4	5	6	7	1	
4	5	6	7	1	2	3	
6	7	1	2	3	4	5	
3	4	5	6	7	1	2	(2)
7	1	2	3	4	5	6	
5	6	7	1	2	3	4	
1	2	3	4	5	6	7	

On constate qu'il est semi-diagonal droit. Transportons sa base sous le carré, nous aurons la figure (2).

Si nous lisons ce carré de bas en haut, nous voyons que, sous cette forme, il est semi-diagonal gauche. C'est-à-dire que si l'on inverse bout pour bout les $(n-1)$ derniers termes d'une série déterminant la semi-diagonalité droite du carré latin, la nouvelle série lui donnera la semi-diagonalité gauche.

[1] Le fait que l'on a pris comme exemple un carré de module 7 ne nuit aucunement à la généralité des conclusions auxquelles on aboutit.

Etudions la figure (1); toutes *les diagonales brisées parallèles à la première* présentent le même caractère que celle-ci, c'est-à-dire qu'elles contiennent tous les nombres 1 à n. Le carré est donc non seulement semi-diagonal, mais aussi *semi-diabolique droit.*

Chacune de ses sept colonnes a donc une ordonnance assurant sa semi-diabolie; il suffit, pour la réaliser, de prendre dans chacune d'elles la suite des nombres à partir de l'unité et dans le sens descendant. Il est clair que ces colonnes se déduisent de l'une quelconque d'entre elles, en ajoutant à tous ses termes un des nombres 1 à 6. Pour un module n, c'est l'un des nombres 1 à $(n-1)$ qu'il faudrait ajouter. Pour abréger, je désignerai ces séries sous le nom de *séries d'additions.*

On a vu que si l'on inverse bout pour bout les $(n-1)$ derniers termes de ces suites, chacune de ces transformées, disposée en première colonne, détermine la semi-diabolie gauche du carré.

Ainsi, une série de module n impair, qui assure la semi-diagonalité du carré, est le noyau d'un groupe de $2n$ séries différentes assurant par moitiés la semi-diagonalité droite et gauche du carré latin adopté.

Les séries déterminant la semi-diagonalité du carré latin régulier, que nous étudions, se partagent en deux catégories bien distinctes qu'il importe de définir [1].

Ordonnons la première colonne du carré latin de module 9, dans l'ordre

$$1 \,.\, 4 \,.\, 9 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 8 \qquad (\alpha)$$

Le carré deviendra *semi-diabolique droit.* Les huit dernières colonnes du carré jouissent de la même propriété.

En inversant comme précédemment, l'ordre des huit derniers termes de chacune de ces séries et aussi de la première, on obtiendra des arrangements qui, en première colonne, assureront la semi-diabolie gauche du même carré. Nous avons ainsi obtenu $2n$ séries produisant par moitiés la semi-diabolie droite et gauche du carré latin. Dans le cas ici étudié $2n = 18$.

---

[1] La théorie ici développée s'applique intégralement aux modules premiers. Elle doit subir quelques restrictions lorsqu'il s'agit des modules impairs non premiers. On se borne à signaler l'existence de ces particularités.

La série ci-après

$$1 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 7 \quad (\beta)$$

donnera aussi comme la précédente $2n = 18$ carrés semi-diaboliques droits et gauches. Mais elle donnera encore, ainsi que toutes celles qui en seront déduites par additions, un nouveau groupe de $2n$ carrés et cela, par le procédé suivant.

Remplaçons chacun des $(n - 1)$ derniers éléments de cette série par leur complémentaire par rapport à $(n + 2)$, égal à 11 dans notre exemple. Les séries nouvelles que l'on obtiendra, ainsi que celles que l'on en tirera par inversion détermineront également la semi-diabolie du carré; mais cette diabolie sera différente de celle produite par la série initiale. Si celle-ci a donné une diabolie droite, sa transformée déterminera la diabolie gauche et vice-versa.

Ce procédé des complémentaires, appliqué à la série (α) et à celles que l'on en déduit par additions, ne produira pas de carrés nouveaux, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

On peut, à *priori*, faire le départ de ces deux catégories d'arrangements. Il suffit pour cela de dresser le tableau des séries d'additions de l'arrangement que l'on veut classer. Si dans l'une d'elles, *abstraction faite de son élément origine*, la somme des termes à égale distance des extrêmes est uniformément égale à $(n + 2)$, cette série a pour complémentaire son inversée; alors, les $(n - 1)$ autres séries peuvent être partagées en $\frac{n-1}{2}$ couples, dans chacun desquels l'inversée de l'une des séries est la complémentaire de l'autre. En cet état, dès que les inversées ont été utilisées, les complémentaires feraient double emploi. Cette particularité différencie les séries (α) des (β).

La série de module 11

$$1 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 10 \quad (\gamma)$$

donne, en ajoutant 7 à chacun de ses éléments, la suite

$$\overrightarrow{8 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 10} \,.\, \overrightarrow{1 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 6}$$

ou, en relevant les termes à partir de l'unité, la série

$$1 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 10$$

dont l'inversée est identique à sa complémentaire. Par conséquent, les séries complémentaires ne donneront pas de carrés nouveaux. Ainsi, la série (γ) permettra de constituer seulement vingt-deux carrés semi-diaboliques dont onze droits et onze gauches.

La série

$$1 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 6 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 8 \quad (\delta)$$

qui n'appartient pas à la catégorie précédente et toutes celles que l'on en déduira par additions, inversions et complémentaires, produiront vingt-deux carrés semi-diaboliques droits et autant de semi-diaboliques gauches.

Les trois séries suivantes de module 13

$$\begin{array}{l} 1 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 12 \,.\, 3 \,.\, 11 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13 \\ 1 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 12 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 \\ 1 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 13 \,.\, 10 \,.\, 2 \,.\, 12 \,.\, 3 \end{array}$$

donneront chacune vingt-six carrés seulement; car les deux premières sont identiques à leurs complémentaires inversées et il suffit d'ajouter 8 aux éléments de la troisième pour faire apparaître le même caractère, en le rompant ensuite, comme plus haut, à partir de 1.

Les séries ci-après du même module

$$\begin{array}{l} 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 13 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 12 \\ 1 \,.\, 6 \,.\, 11 \,.\, 12 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 3 \,.\, 13 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \\ 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 2 \,.\, 3 \end{array}$$

donneront chacune cinquante-deux carrés.

Les séries de module 15

$$\begin{array}{l} 1 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 14 \,.\, 2 \,.\, 15 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 12 \\ 1 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 12 \,.\, 7 \,.\, 13 \,.\, 6 \,.\, 2 \,.\, 15 \,.\, 11 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 14 \\ 1 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 12 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 14 \end{array}$$

appartiennent à la première de ces deux catégories et les suivantes

$$\begin{array}{l} 1 \,.\, 2 \,.\, 12 \,.\, 10 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.\, 13 \,.\, 14 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 15 \,.\, 7 \,.\, 3 \\ 1 \,.\, 4 \,.\, 9 \,.\, 15 \,.\, 11 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 14 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 12 \,.\, 2 \,.\, 8 \,.\, 13 \\ 1 \,.\, 12 \,.\, 13 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 15 \,.\, 2 \,.\, 14 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 4 \end{array}$$

à la seconde.

Le groupe des carrés latins semi-diagonaux n'est pas encore épuisé.

Partant d'un carré semi-diagonal droit, formons la figure ci-après:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9
4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4
2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3
6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8
8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2
3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7
5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1
9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6
7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5

figure dans laquelle on a reproduit à droite le petit triangle des nombres qui se trouvent sous la diagonale magique (première diagonale). On a ainsi constitué un parallélogramme ayant pour base la base du carré et pour côté sa première diagonale.

Abstraction faite de la déformation, la figure nouvelle ainsi créée est un carré semi-diagonal gauche, sa diagonale magique étant constituée par la dernière colonne du carré générateur.

Cette figure démontre une propriété générale, à savoir: si la première colonne d'un carré latin a l'ordonnance de la première diagonale d'un carré semi-diagonal droit, le carré résultant sera semi-diagonal gauche. Il faut cependant remarquer que cette transformation ne produit pas nécessairement un carré nouveau. Si l'on construit, par exemple, le carré semi-diagonal droit défini par la série

$$1 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 3 \quad (b)$$

on constatera que sa diagonale magique ainsi que les diagonales brisées, qui lui sont parallèles, sont identiques à ses séries d'additions inversées.

Il n'en est pas de même du carré défini par la série

$$1 \,.\, 10 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 6$$

Cette particularité, que l'on trouvera dans tous les modules impairs, peut être diagnostiquée *a priori*. Elle est spéciale à certaines séries se rattachant à la théorie des carrés d'Euler et qu'il me faut définir en quelques mots pour faire comprendre ce qui suit.

Soit une série

$$1 \quad a \quad b \quad c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p \quad q \quad (m)$$

déterminant un carré semi-diagonal droit.

Nous savons que son inversée

$$1 \quad q \quad p \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; c \quad b \quad a \quad (\mu)$$

définit un carré semi-diagonal gauche et par suite un carré d'Euler.

La première diagonale du carré (m) est évidemment

$$1 \quad (a+1) \quad (b+2) \quad (c+3) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (p+n-2) \quad (q+\mathrm{n}-1) \quad (\rho)$$

Pour des raisons qui ne peuvent trouver place ici, je donne à cette série le nom d'*adjointe* de (μ).

Il est maintenant possible d'énoncer ma proposition.

« Si une série (μ) ou bien une de celles que l'on en déduit par additions est identique à son adjointe, la transformation précédente ne peut pas donner de carré nouveau ».

Ainsi, en ajoutant 2 à tous les éléments de la série (b) ci-dessus inversée, on fera apparaître cette condition.

Il suffit d'ajouter 1 à tous les termes de l'inversée de la série

$$1 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 5$$

pour obtenir une suite identique à son adjointe.

Il en est de même de la série de module 13

$$1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 12 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 13 \,.\, 9 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 10 \,.\, 11$$

aux termes de laquelle (inversée) il suffit d'ajouter le nombre 7 pour constater que la condition précédente est satisfaite.

Détermination des carrés latins semi-diagonaux.

Lorsque le module n'est pas grand, cette détermination se fait assez rapidement.

Soit un élément (a) occupant un rang (p) dans la première colonne. Il faut, *pour la semi-diagonalité droite*, que les diverses sommes $(a + p)$ soient différentes. Cette indication suffit pour découvrir toutes les solutions, qui comprendront aussi celles produisant simultanément la magie des deux diagonales.

Le lecteur trouvera facilement les dispositions à adopter pour conduire les opérations à cet effet.

CHRONIQUE

Congrès international des mathématiciens.

Oslo, 13-18 juillet 1936.

Le Comité d'organisation du Congrès a le très grand regret d'informer les mathématiciens de la perte que la Science scandinave vient de faire en la personne de M. Alf Guldberg, président du Comité, décédé à Oslo le 15 février 1936, dans sa 70me année.

C'est avec un vif chagrin que nous avons appris cette triste nouvelle. Alf Guldberg avait assumé, en collaboration avec son collègue M. le Prof. C. Störmer, la présidence du Comité d'organisation. Sa mort prive les mathématiciens norvégiens de l'un de leurs meilleurs représentants. Elle sera vivement ressentie, dans tous les pays, par tous ceux qui eurent le privilège de le rencontrer dans les réunions internationales.

A sa famille cruellement éprouvée, à ses collègues du Comité d'organisation, à l'Université d'Oslo, nous adressons l'expression de notre vive et sincère sympathie.

H. Fehr.

* * *

Le Congrès s'ouvrira le 13 juillet 1936 par une réception offerte aux membres du Congrès par M. le Recteur de l'Université d'Oslo.