SUR LE TRANCHET D'ARCHIMÈDE

Autor(en): **Thébault, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26612

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LE TRANCHET D'ARCHIMÈDE

(Deuxième article)

PAR

V. THÉBAULT, Le Mans (Sarthe).

Il est sans doute intéressant de poursuivre la recherche des propriétés de la curieuse figure constituée par trois demi-cercles de diamètres BC, AC et AB décrits d'un même côté d'une droite, sur laquelle sont marqués trois points A, B, C (A entre B et C) [1]. Utilisant encore la méthode de l'inversion, nous donnerons des formules plus générales que celles qui concernent des configurations envisagées par ARCHIMÈDE (PROPOSITIONS V et VI du *Livre des Lemmes*), puis par PAPPUS dans le Livre IV d'un ouvrage intitulé *Collections mathématiques* (Μαθηματικαί συναγωγαί), écrit à la fin du IVe siècle [2].

1. — Soient deux cercles (O_1) et (O_2), de rayons R_1 et R_2, tangents extérieurement en un point A, puis un troisième cercle (O), de rayon R, tangent aux précédents, en des points M_1, M_2, et, pour fixer les idées, les contenant tous les deux. Traçons le diamètre B_1C_1 du cercle (O) parallèle à la droite des centres O_1O_2 des cercles (O_1), (O_2). Cette dernière droite rencontre les cercles (O_1), (O_2) en des points C et B et les points B_1, C_1, se projettent orthogonalement sur la droite de direction

---

[1] *L'Enseignement mathématique*. M. D'OCAGNE, 1934, pp. 73-77. — V. THÉBAULT, 1934, pp. 349-359.

[2] Cet ouvrage, en huit livres, qui constitue un des plus précieux monuments de l'ancienne géométrie, n'a pas encore été traduit en français, mais on a une traduction latine de COMMANDIN (*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones in latinum conversae et commentariis illustratae*, 1660). (VER EECKE, *Œuvres complètes d'*ARCHIMÈDE, 1921, p. 530.)

BC en B_2 et C_2. La perpendiculaire à BC en A coupe le cercle (O) en un point T, au-dessus de BC, et en un point T′ au-dessous de BC.

Posons, en grandeur et en signe,

$$AC_2 = 2b\,, \quad AB_2 = 2c\,, \quad \text{d'où} \quad b + c = R\,,$$

puis, désignons par $d = OQ$, $d' = b - c$, les distances du centre O aux droites BC et $\Delta \equiv TAT'$. Enfin, soient (ω_1) et (ω_2) les cercles, de rayons ρ_1 et ρ_2, inscrits aux triangles mixtilignes ATM_1 et ATM_2.

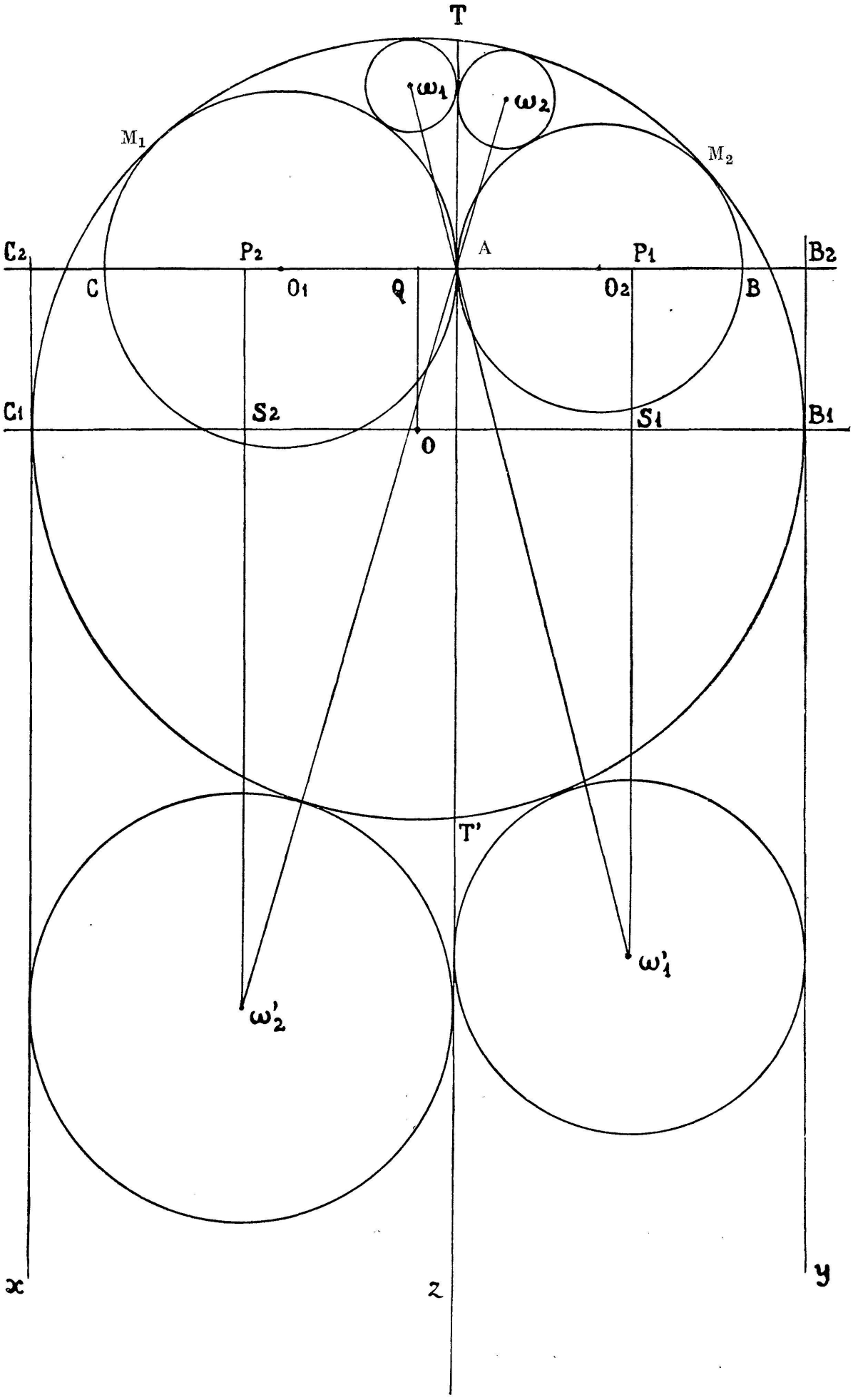
En prenant A comme pôle d'inversion avec une puissance égale, en valeur absolue, au produit

$$AT \cdot AT' = \overline{AO}^2 - R^2 = d^2 + d'^2 - R^2 = d^2 - 4bc\,, \qquad (1)$$

avec des rayons vecteurs réciproques directement opposés, la droite AT et le cercle (O) se conservent, toutefois avec échange pour chacun d'eux de la partie située en dessus et de la partie située en dessous de BC. Les cercles (O_1) et (O_2), tangents au cercle (O), ont pour inverses respectivement les perpendiculaires B_2B_1y et C_2C_1x à BC en B_2 et C_2. Les cercles (ω_1) et (ω_2) se transforment en des cercles (ω_1') et (ω_2') qui sont tangents au cercle (O) puis, respectivement, à la droite B_1y, à la droite $Az \equiv AT'$ en un point H_1, aux droites C_1x et Az. Les longueurs des rayons des cercles (ω_1'), (ω_2') sont donc égales à c et b, et leurs centres sont situés sur les perpendiculaires $P_1S_1\omega_1'$ et $P_2S_2\omega_2'$ à BC, équidistantes des droites Az et By, Az et Cx.

Mais, quand on transforme un cercle de rayon c par inversion, pour obtenir un cercle de rayon ρ_1, le rapport $\frac{\rho_1}{c}$ est égal à celui de la puissance d'inversion à celle du pôle par rapport au premier cercle. Appliquant cette remarque au calcul du rayon ρ_1 du cercle (ω_1) qui est le transformé du cercle (ω_1'), de rayon c, dans l'inversion précédente, on obtient, en valeur absolue,

$$\frac{\rho_1}{c} = \frac{|d^2 - 4bc|}{\overline{AH_1}^2} = \frac{|d^2 - 4bc|}{(P_1S_1 + S_1\omega')^2}\,. \qquad (2)$$


T
ω1
ω2
M1
M2
C2
P2
A
P1
B2
C
O1
Q
O2
B
C1
S2
S1
B1
O
T'
ω'1
ω'2
x
z
y

Or, $P_1S_1 = d$,

$$S_1\overline{\omega'}^2 = O\overline{\omega'}_1^2 - O\overline{S}_1^2 = (R + c)^2 - (d' + c)^2 = (b + 2c)^2 - \\ - b^2 = 4c(b + c) = 4cR\,. \tag{3}$$

Dès lors,

$$\frac{\rho_1}{c} = \frac{|\,d^2 - 4bc\,|}{d^2 + 4cR + 4d\sqrt{cR}}\,, \tag{4}$$

et, finalement

$$\rho_1 = \frac{c \cdot |\,d^2 - 4bc\,|}{d^2 + 4cR + 4d\sqrt{cR}}\,. \tag{5}$$

Si au lieu du cercle (ω_1) on considère le cercle (ω_2), il suffit d'intervertir les rôles des cercles (O_1) et (O_2), c'est-à-dire de permuter b et c pour avoir

$$\rho_2 = \frac{b \cdot |\,d^2 - 4bc\,|}{d^2 + 4bR + 4d\sqrt{bR}}\,, \tag{6}$$

puis

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{c}{b} \cdot \frac{d^2 + 4bR + 4d\sqrt{bR}}{d^2 + 4cR + 4d\sqrt{cR}}\,. \tag{7}$$

Telle est l'expression du rapport des rayons des cercles (ω_1), (ω_2) inscrits aux triangles mixtilignes ATM_1, ATM_2.

Remarques. 1° Lorsque $d = 0$, $b = R_1$, $c = R_2$ et on a, en valeur absolue,

$$\rho_1 = \frac{4bc^2}{4c(b + c)} = \frac{bc}{b + c} = \frac{4b^2c}{4b(b + c)} = \rho_2\,. \tag{8}$$

On retrouve ainsi les expressions connues concernant la configuration de la Proposition V du *Livre des Lemmes*, où les centres des cercles (O), (O_1), (O_2) sont alignés sur BC [1].

2° Dans la figure générale que nous venons d'envisager, on pourrait remplacer le cercle (O) par un cercle concentrique, de rayon $R + m$, les cercles (O_1), (O_2) restant fixes, pour obtenir, par le même procédé, les expressions des rayons ρ_1, ρ_2 des cercles (ω_1), (ω_2) tangents à la droite Δ, au cercle (O) et respectivement

---

1 *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 75.

aux cercles (O_1) et (O_2), qui, pour $d = 0$, conduiraient aux formules

$$\rho_1 = \left[\frac{(2b + m)\,(2c + m)}{2b + 2c + m}\right] = \rho_2 \tag{9}$$

que nous avons déjà établies [1].

2. — Conservons la même figure avec la plupart de ses notations pour considérer le cercle (ω_1), de rayon ρ_1, tangent aux cercles (O), (O_1), (O_2), puis les trois séries de cercles

$$\begin{array}{l}
(\omega_2)\,,\ (\omega_3)\,,\ \ldots\,,\ (\omega_n)\,,\ \text{de rayons } \rho_2\,,\ \rho_3\,,\ \ldots\,,\ \rho_n\,,\\
(\omega_2')\,,\ (\omega_3')\,,\ \ldots\,,\ (\omega_n')\,,\ \text{de rayons } \rho_2'\,,\ \rho_3'\,,\ \ldots\,,\ \rho_n'\,,\\
(\omega_2'')\,,\ (\omega_3'')\,,\ \ldots\,,\ (\omega_n'')\,,\ \text{de rayons } \rho_2''\,,\ \rho_3''\,,\ \ldots\,,\ \rho_n''\,,
\end{array}$$

tangents respectivement aux triples de cercles

$$\begin{array}{l}
(O)\,,\ (O_1) \text{ et } (\omega_1)\,,\ (O)\,,\ (O_1) \text{ et } (\omega_2)\,,\ \ldots\,,\ (O)\,,\ (O_1) \text{ et } (\omega_{n-1})\,,\\
(O)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_1)\,,\ (O)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_2')\,,\ \ldots\,,\ (O)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_{n-1}')\,,\\
(O_1)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_1)\,,\ (O_1)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_2'')\,,\ \ldots\,,\ (O_1)\,,\ (O_2) \text{ et } (\omega_{n-1}'')\,,
\end{array}$$

Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $y_1', y_2', \ldots, y_n'$; $y_1'', y_2'', \ldots, y_n''$, les ordonnées, par rapport à BC, des centres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; $\omega_2', \ldots, \omega_n'$; $\omega_2'', \ldots, \omega_n''$ de ces cercles.

A. En prenant A pour pôle d'inversion avec une puissance égale, en valeur absolue, à $d^2 - 4bc$, le cercle (ω_1) a pour transformé un cercle (O_1'), égal au cercle (O), tangent à ce dernier cercle, en un point Z_1, et aux droites B_1y et C_1x.

En vertu de la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses, on a déjà

$$\frac{\rho_1}{R} = \frac{\rho_1}{b + c} = \left|\frac{d^2 - 4bc}{\overline{AO_1'}^2 - R^2}\right| = \left|\frac{d^2 - 4bc}{\overline{AQ}^2 + \overline{QO_1'}^2 - R^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{d^2 - 4bc}{(b - c)^2 + (d + 2R)^2 - R^2}\right|; \tag{10}$$

d'où

$$\rho = \left|\frac{(d^2 - 4bc)\cdot(b + c)}{4[(b + c)\cdot(b + c + d) - bc] + d^2}\right|. \tag{11}$$

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 352.

De plus, le cercle (ω_1) étant le transformé du cercle (O'_1) par l'homothétie $\left(A, \frac{\rho_1}{R}\right)$, on a

$$\frac{y_1}{QO'_1} = \frac{y_1}{d + 2R} = \frac{2\rho_1}{2R},$$

et, par suite,

$$y_1 = 2\rho_1 \cdot \left(\frac{d + 2R}{2R}\right) = 2\rho_1 \cdot \left(1 + \frac{d}{2R}\right). \qquad (12)$$

Remarque. Sur une droite indéfinie xy, marquons quatre points A, B, C, D (C et D entre A et B), puis décrivons, au-dessus de xy, les demi-cercles (O), (O_1), (O_2), de rayons R, b, c, qui ont AB, AC, DB pour diamètres. Nous avons obtenu les expressions suivantes du rayon ρ_1 du cercle (ω_1), tangent à ces trois cercles, et de l'ordonnée y_1 du centre ω_1 par rapport à la droite xy [1]:

$$\rho_1 = \frac{R(R - b)(R - c)}{R^2 - bc}, \quad y_1 = 2\rho_1 \sqrt{\frac{bc}{(R - b)(R - c)}}. \qquad (13)$$

B. Dans l'inversion de pôle A et de module $|d_2 - 4bc|$, les cercles $(\omega_2), \ldots, (\omega_n)$ ont pour transformés des cercles $(\varphi_2) \ldots, (\varphi_n)$ tangents au cercle (O), à la droite B_1y puis, respectivement, aux cercles $(O'_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_{n-1})$. Les points $O'_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont situés sur la parabole de foyer O, de tangente au sommet B_1y, ayant pour paramètre $2\,OB_1 = 2\,R = 2\,(b + c)$.

Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les rayons des cercles (O'_1), $(\varphi_2), \ldots, (\varphi_n)$, et par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les ordonnées des centres de ces cercles par rapport au diamètre B_1C_1, on obtient aisément les relations suivantes [2]:

$$x_1 = \frac{R}{1^2}, \; x_2 = \frac{R}{2^2}, \; x_3 = \frac{R}{3^2}, \ldots, x_n = \frac{R}{n^2}, \qquad (14)$$

$$\lambda_1 = \frac{2R}{1}, \; \lambda_2 = \frac{2R}{2}, \; \lambda_3 = \frac{2R}{3}, \ldots, \lambda_n = \frac{2R}{n}. \qquad (15)$$

---

[1] *Education mathématique*, t. XXIX, p. 106.
[2] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1928, p. 201.

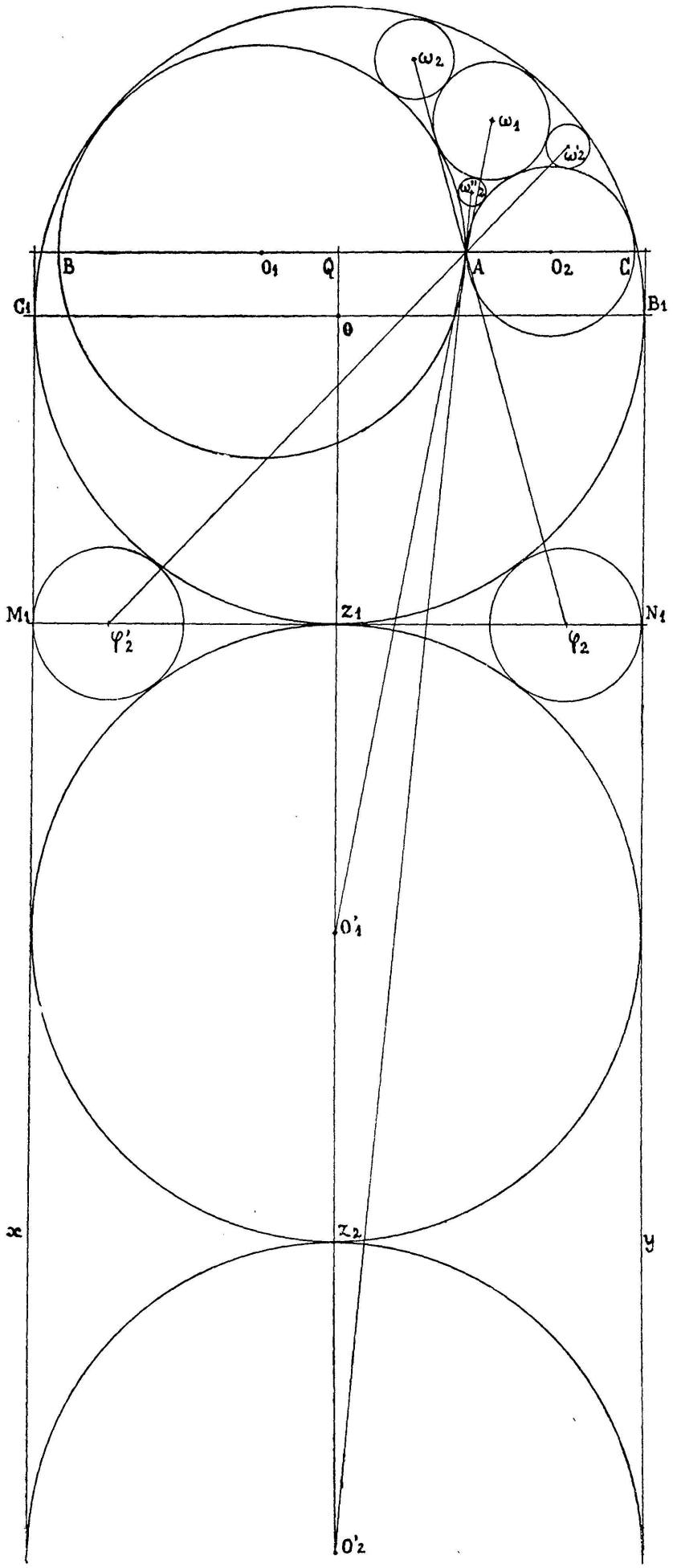


Fig. 2.

Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont les ordonnées des points $O_1', \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ pour la droite BC,

$$Y_1 = d + \lambda_1 = d + 2R\ ,\ Y_2 = d + \lambda_2 = d + R\ ,\ \ldots\ ,$$
$$Y_n = d + \lambda_n = d + \frac{2R}{n}\ . \tag{16}$$

Dès lors, eu égard à la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses, déjà utilisée, et des expressions (14) et (16),

$$\frac{\rho_n}{x_n} = \frac{\rho_n}{\frac{R}{n^2}} = \left| \frac{d^2 - 4bc}{\overline{A\varphi_n}^2 - x_n^2} \right| = \left| \frac{d^2 - 4bc}{(d + Y_n)^2 + (2c - x_n)^2 - x_n^2} \right| . \tag{17}$$

Après réductions, on obtient

$$\rho_n = \frac{|\, d^2 - 4bc \,| \,.\, (b + c)}{4\,[n^2 (d^2 + c^2) + (2nd + b) \cdot (b + c)]}\ , \tag{18}$$

puis,

$$\frac{1}{\rho_n} = \left| \frac{4}{d^2 - 4bc} \right| \cdot \left[\frac{n^2 (d^2 + c^2)}{b + c} + 2nd + b \right] . \tag{19}$$

Le cercle (ω_n) étant le transformé du cercle (φ_n) par l'homothétie $\left(A\ ,\ \frac{\rho_n}{x_n}\right)$ et Q_n la projection orthogonale du centre φ_n sur BC, on a

$$\frac{y_n}{Q_n \varphi_n} = \frac{y_n}{Y_n} = \frac{y_n}{d + \frac{2R}{n}} = \frac{2\rho_n}{2x_n} = \frac{2\rho_n}{\frac{2R}{n^2}} = \frac{2n^2 \rho_n}{2R}\ ;$$

d'où

$$y_n = 2n\rho_n \cdot \left(1 + \frac{nd}{2R}\right) . \tag{20}$$

Par permutation de b et c, on obtient les expressions des rayons des cercles $(\omega_2'), \ldots, (\omega_n')$ et des ordonnées de leurs centres par rapport à BC,

$$\rho_n' = \frac{|\, d^2 - 4bc \,| \cdot (b + c)}{4\,[n^2 (d^2 + b^2) + (2nd + c)\,(b + c)]}\ , \tag{21}$$

$$y_n' = 2n\rho_n' \cdot \left(1 + \frac{d}{2R}\right) . \tag{22}$$

C. La même inversion de pôle A et de module $|d_2 - 4bc|$ transforme les cercles (ω_2''), ..., (ω_n'') en des cercles, égaux au

cercle (O), dont les centres $O'_2, \ldots, O'_n$ sont tels que

$$OO'_2 = 2R\,,\ OO'_3 = 6R\,,\ \ldots\,,\ OO'_n = 2nR\,,$$
$$QO'_2 = d + 2R\,,\ QO'_3 = d + 6R\,,\ \ldots\,,\ QO'_n = d + 2nR\,.$$

Il en résulte que

$$\frac{\rho''_n}{R} = \left|\frac{d^2 - 4bc}{A\overline{O'^2_n} - R^2}\right| = \left|\frac{d^2 - 4bc}{A\overline{Q}^2 + Q\overline{O'^2_n} - R^2}\right| = \left|\frac{d^2 - 4bc}{(b-c)^2 + (d + 2nR)^2 - R^2}\right|, \tag{23}$$

et

$$\rho''_n = \left|\frac{(d^2 - 4bc)\cdot(b+c)}{d^2 - 4bc + 2n(b+c)\cdot[d + 2n(b+c)]}\right|. \tag{24}$$

L'ordonnée y''_n du centre ω''_n, pour la droite BC, a pour expression

$$y''_n = 2\rho''_n \cdot \left(n + \frac{d}{2R}\right), \tag{25}$$

puisque

$$\frac{y''_n}{QO'_n} = \frac{y''_n}{d + 2nR} = \frac{2\rho''_n}{2R}. \tag{26}$$

3. — Lorsque $d = 0$, le diamètre B_1C_1 du cercle (O) coïncide avec BC, $R = b + c = a$, et la figure particulière ainsi déterminée est celle de la PROPOSITION VI *d'*ARCHIMÈDE et du théorème XV des *Collections mathématiques* de PAPPUS.

Conservant toutes les notations du paragraphe précédent, les formules (11), (12), (18), (19), (20), (21), (22), (24), (25) deviennent, en valeur absolue, les suivantes:

$$\rho_1 = \frac{bc(b+c)}{(b+c)^2 - bc}\,,\ \rho_n = \frac{bc(b+c)}{b^2 + n^2c^2 + bc}\,,\ \rho'_n = \frac{bc(b+c)}{c^2 + n^2b^2 + bc}\,,$$
$$\rho''_n = \frac{bc(b+c)}{n^2(b+c)^2 - bc}\,. \tag{27}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\,,\ \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{c} + \frac{n^2c}{ab}\,,\ \frac{1}{\rho'_n} = \frac{1}{b} + \frac{n^2b}{ca}\,,$$
$$\frac{1}{\rho''_n} = -\frac{1}{a} + \frac{n^2a}{bc}\,. \tag{28}$$

$$y_1 = 2\rho_1\,,\ y_n = 2n\rho_n\,,\ y'_n = 2n\rho'_n\,,\ y''_n = 2n\rho''_n\,. \tag{29}$$

[1] Cette relation a été obtenue, par le calcul (*Journal de* G. DE LONGCHAMPS, 1878, p. 287. — G. FONTENÉ, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11e année, p. 68).

Remarques. 1° Ajoutant membres à membres les trois dernières des relations (28), on obtient

$$\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho'_n} + \frac{1}{\rho''_n} - \frac{1}{\rho_1} = n^2 \cdot \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right). \tag{30}$$

2° Si l'on considère les cercles (O_1), (O_2) comme des cercles (ω_n) et (ω'_n), d'indice zéro, ces cercles étant les premiers de deux séries de cercles tangents entre eux de proche en proche et tangents aux cercles (O) et (O_2), (O) et (O_1), et que l'on pose $b = \rho_0$, $c = \rho'_0$, $OO_1 = d_1$, $OO_2 = d_2$, $O_1O_2 = d_3$, des formules (27) à (29) résultent les suivantes obtenues autrement par leurs auteurs:

$$\frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_0}{2\rho_0} = n\ , \quad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_{n-1}}{2\rho_{n-1}} = 1\ , \tag{31}$$

$$\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{d_1}{ab} \cdot n\left(\frac{y_0}{\rho_0} + n\right), \quad \frac{1}{\rho'_n} - \frac{1}{\rho'_0} = \frac{d_2}{ca} \cdot n\left(\frac{y'_0}{\rho_0} + n\right), \tag{32}$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d_1} + \frac{d_1}{ab}\left(\frac{y_n}{2\rho_n}\right)^2, \quad \frac{1}{\rho'_n} = \frac{1}{d_2} + \frac{d_2}{ca}\left(\frac{y'_n}{2\rho'_n}\right)^2, \tag{33}$$

$$\frac{1}{\rho''_n} = -\frac{1}{d_3} + \frac{d_3}{bc}\left(\frac{y''_n}{2\rho''_n}\right)^2. \tag{34}$$

Ces relations ont été établies d'une autre façon par G. Fontené dans un intéressant article paru aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1918, pp. 383-390. De notre côté, nous avons obtenu les formules (33) en partant des cercles égaux (ω_1), (ω_2) inscrits aux triangles mixtilignes ATB et ATC (fig. 1), (*Mathesis*, 1931, p. 190). Dans les *Nova Acta* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. X, 1793, p. 74, le géomètre F. T. Schubert a obtenu, *de proche en proche*, le résultat auquel conduisent les deux premières formules (33) dans le cas où le cercle (ω_1) est le cercle (O_2) et dans celui où le cercle (ω_1) est tangent à la droite BC, pour lequel

$$y_n = 2\rho_n \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{35}$$

3° Enfin, les formules (20), (22), (25) généralisent la célèbre *Proposition antique* de PAPPUS qui s'énonce ainsi:

Si l'on inscrit une série de cercles dans le tranchet, le premier tangent aux trois demi-cercles, le second tangent au premier et à deux demi-cercles, et ainsi de suite, les hauteurs de ces cercles au-dessus du diamètre principal du tranchet sont respectivement égales au diamètre du premier cercle, au double du diamètre du second, au triple du diamètre de troisième, et ainsi de suite, à n *fois le diamètre du cercle de rang* n [1].

4. — Dans la figure générale considérée dans le second paragraphe, supposons que le cercle (O), de rayon R, et la droite BC restent fixes, le point A étant variable sur cette droite. On peut construire une infinité de cercles (O_1) et (O_2), tangents entre eux extérieurement au point A et touchant le cercle (O).

Soient un cercle (ω_n), d'indice donné n, tangent aux cercles (O) et (O_1) ou aux cercles (O) et (O_2). Quand le point A décrit le segment rectiligne BC, le centre ω_n décrit une ellipse que nous allons déterminer.

Traçons, du même côté de BC que le centre ω_n, une parallèle Δ à BC, située à une distance

$$\delta = 2n\mathrm{R} \cdot \left(1 + \frac{nd}{2\mathrm{R}}\right),$$

d étant la distance du centre O à la droite BC, sur laquelle le centre ω_n se projette orthogonalement en un point X. On a d'abord

$$\omega_n \mathrm{O} = \mathrm{R} - \rho_n ,$$

puis, en vertu de (20),

$$\omega_n \mathrm{X} = \delta - y_n = 2n \cdot \left(1 + \frac{nd}{2\mathrm{R}}\right) \cdot (\mathrm{R} - \rho_n) .$$

Dès lors,

$$\frac{\omega_n \mathrm{O}}{\omega_n \mathrm{X}} = \frac{1}{2n\left(1 + \frac{nd}{2\mathrm{R}}\right)} = \text{constante.} \tag{36}$$

[1] *Loc. cit.*

Le centre ω_n *du cercle variable* (ω_n) *décrit donc un arc d'ellipse de foyer* O, *de directrice* Δ, *passant par* B *et* C, *et situé au-dessus de* BC. *L'excentricité de cette conique est égale à*

$$e = \frac{1}{2n\left(1 + \frac{nd}{2R}\right)}. \tag{37}$$

Quand $d = 0$, on a $e = \frac{1}{2n}$.

Il est évident que le centre ω'_n du cercle $(\omega)'_n$, de même indice n que le cercle (ω_n) décrit le même arc d'ellipse.

5. — Nous terminerons cette étude par des propriétés intéressantes de la figure formée par le *tranchet* et son cercle inscrit (ω_1), (fig. 3).

A. Soient P, Q les milieux des demi-cercles (O_1), (O_2), au-dessus de BC, S le milieu du demi-cercle (O), au-dessous de BC; P′, Q′, S′ les symétriques de ces points par rapport à BC; P″ la projection du point P sur SS′; U, U_1, U_2 les points de contact du cercle (ω_1) avec les cercles (O), (O_1), (O_2).

De l'égalité des triangles rectangles CQO_2 et SPP″, on conclut que les côtés CQ et SP de ces triangles sont perpendiculaires. Autrement dit, la droite CQ contient la hauteur du triangle PQS, issue du sommet Q. Par analogie, il en est de même pour les droites SA et PB; ces droites SA, PB, CQ se coupent à l'orthocentre H du triangle PQS. Si l'on transforme la figure par une inversion ayant B pour pôle et pour module, en valeur absolue, le produit BC . BA $= 4\,ac$, le cercle (O_1) se transforme en lui-même, le cercle (O_2) en la tangente Cx aux cercles (O), (O_1) en C, et le cercle (O) en la tangente Az aux cercles (O_1), (O_2). Enfin, le cercle (ω_1) devient un cercle (O'_1), tangent à (O_1) en P, point inverse de U_2, et tangent aussi aux droites Az et Cx, au-dessus de BC. Ce cercle (O'_1) est donc égal au cercle (O_1) et le point de contact P est le milieu de $O_1O'_1$. Puisque U_1 est un centre de similitude des cercles (O_1) et (ω_1), le second point d'intersection de BP avec le cercle (ω_1) est un point où la tangente est parallèle à BC. Le centre ω_1 est donc l'intersection de la droite BO'_1 avec

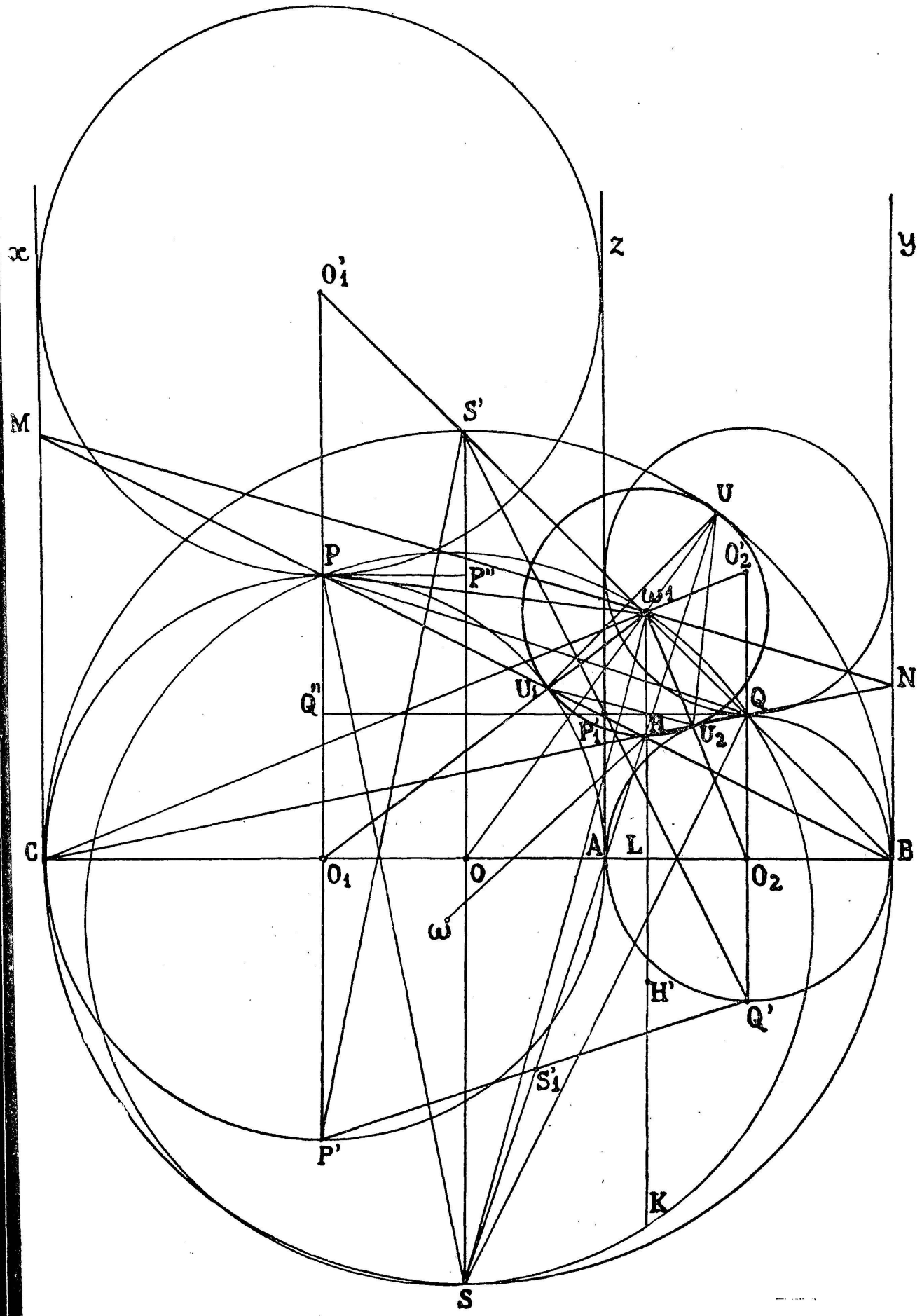


Fig. 3.

la perpendiculaire LK à BC menée par K. De plus, puisque P est le milieu de O_1O_1', K est aussi le milieu de $L\omega_1$.

On montrerait de même, en faisant une inversion de pôle C, avec la puissance $|CB \cdot CA| = 4ab$, que le cercle (ω_2) se change en un cercle (O_2'), égal au cercle (O_2), tangent aux droites Az et By, au-dessus de BC. Le point ω_1 est donc sur la droite CO_2'. Il s'ensuit que les droites BP, CQ se coupent au milieu de $L\omega_1$, et $H \equiv K$; d'où il résulte que *l'orthocentre du triangle* PQS *est situé sur le cercle* (ω_1), *au milieu de* $L\omega_1$.

Si les droites BP, CQ rencontrent Cx et By en des points M et N, l'orthocentre H du triangle PQS est le milieu de la parallèle aux bases CM, BN du trapèze CMNB tracée par le point de rencontre des diagonales BP, CQ. *La droite* MN *passe donc au centre* ω_1 *du cercle* (ω_1).

Dans l'inversion $(B, 4ac)$, où les cercles (O_1) et (O_1') sont les transformés des cercles (O_1) et (ω_1), le point de contact P de (O_1) et (O_1') a pour transformé le point U_1 de contact des cercles (O_1), (ω_1). La hauteur BP du triangle PQS passe donc en U_1 et, par analogie, U et U_2 sont sur SA et CQ.

U_1 et U_2 étant deux points antihomologues sur les cercles (O_1), (O_2), les quatre points B, C, U_1, U_2 sont sur une circonférence de centre S. De même, les points B, A, U_1, U et A, C, U, U_2 appartiennent à des circonférences de centres Q et P. Il en résulte que les droites $S\omega_1$, $P\omega_1$, $Q\omega_1$ sont les médiatrices des côtés U_1U_2, U_2U, UU_1 du triangle U_1UU_2. Les angles BU_1U_2 et $BCU_2 \equiv BCQ$, ayant même mesure dans la circonférence de centre S, sont égaux et entraînent l'égalité des angles $QS\omega_1$ et S'SP dont les côtés sont perpendiculaires à ceux des angles BU_1U_2 et BCU_2. Il en résulte que SO et $S\omega_1$ sont des droites isogonales dans le triangle PQS, de même que les droites PO et $P\omega_1$, QO_2 et $Q\omega_1$.

Le centre ω_1, conjugué isogonal du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à BC, *est donc situé sur le cercle* (ω) *circonscrit au triangle* PQS [1].

ω_1 est le foyer d'une parabole inscrite au triangle PQS, ayant pour directrice la parallèle à BC menée par H, car on vérifie

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1928, p. 375. Deux démonstrations différentes de la nôtre en ont été données (*Mathesis*, 1929, pp. 131-303).

aisément que la droite de SIMSON du point ω_1, pour le triangle PQS, est parallèle à BC.

En outre, les droites SA et PB passent aux centres de symétrie des rectangles SP'AQ' et PS'BQ', c'est-à-dire aux milieux S'_1, P'_1 des segments rectilignes P'Q' et S'Q'. Ayant les égalités d'angles

$$P'_1HS'_1 = PHS = 180° - PQS ,$$

l'orthocentre H *du triangle* PQS *est situé sur le cercle des neuf points du triangle* P'Q'S'. De même, l'orthocentre H' de ce dernier triangle, symétrique de H par rapport à BC, appartient au cercle des neuf points du triangle PQS.

La droite ω_1H recoupe le cercle (ω), de rayon ρ, en un point K tel que

$$HK = 2HH' = 4\omega_1 H ,$$

et l'on a

$$| HK \cdot H\omega_1 | = 4\rho_1^2 = | \overline{H\omega_1}^2 - \rho^2 | . \tag{38}$$

Or,

$$\overline{H\omega}^2 = 9\rho^2 - (\overline{PQ}^2 + \overline{QS}^2 + \overline{SP}^2) ,$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{SA}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 = (b + c)^2 + (b - c)^2 = 2(b^2 + c^2) \text{ [1]}$$

$$\overline{QS}^2 = 2(a^2 + c^2) , \ \overline{SP}^2 = 2(a^2 + b^2) . \tag{39}$$

Introduisant ces expressions dans la relation (38), on obtient la suivante,

$$2\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_1^2 , \tag{40}$$

entre les rayons des cercles (ω), (O), (O_1) et (ω_1).

Enfin, des égalités d'angles

$$U_1HU_2 = PHQ = 180° - QSP$$

et de leurs analogues pour les angles UHU_1, U_2HU, il résulte que

$$U_1UU_2 = PQS - U_1HU_2 = QSP , \quad UU_2U_1 = PQS , \quad U_2U_1U \equiv SPQ ,$$

et aussi que les triangles PQS et U_1U_2U *sont semblables*. Les côtés homologues de ces triangles se rencontrent à l'un des centres de similitude des cercles (O) et (O_1), (O) et (O_2), (O_1) et (O_2).

---

[1] En effet, Q'' étant la projection de Q sur O_1P, les triangles rectangles SOA, PQQ'' sont égaux, et SA = PQ. Par analogie, BP = QS. CQ = SP. (V. T.)

Remarques. Si l'on observe que les sommets P, Q, S sont les centres des carrés construits sur les côtés du triangle *aplati* ABC, il en résulte que les côtés PQ, QS, SP du triangle PQS sont perpendiculaires et égaux aux segments rectilignes SA, BP, CQ. De plus, les centres O, O_1, O_2 des cercles sont les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés PQ, QS, SP du triangle PQS. Ce triangle spécial, dans lequel les centres des carrés construits intérieurement sur ses côtés sont collinéaires, possède des propriétés très curieuses dont quelques-unes ont fait l'objet de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'Agrégation des Sciences Mathématiques à Paris en 1923 [1].

B. Soit (ω''_n) le cercle qui est tangent aux cercles (O_1), (O_2) et (ω''_{n-1}) en des points V_1, V_2, V. Si l'on pose

$$O_1O_2 = b + c = a\ ,\ O_1\omega''_n = x\ ,\ O_2\omega''_n = x'\ ,$$

puis

$$O_1O_2 + O_2\omega''_n + \omega''_nO_1 = 2p = a + x + x'\ ,$$

r'' étant le rayon du cercle exinscrit au triangle $O_1\omega''_nO_2$ dans l'angle ω''_n, l'égalité de deux expressions de l'aire du triangle considéré donne

$$\frac{1}{2}a \cdot y''_n = a \cdot n\rho''_n = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot y''_n = (p - O_1O_2) \cdot r'' = (p - a)\,r'' = \rho''_n r'';$$

d'où il résulte que $r'' = na$.

Quand $n = 1$, c'est-à-dire lorsque $(\omega''_n) \equiv (\omega_1)$, *le rayon du cercle exinscrit au triangle* $O_1\omega_1O_2$, *dans l'angle* ω_1, *est égal au côté* $O_1O_2 = a$ *du triangle.*

Errata. — 1934, t. XXXIII, p. 358, au bas de la page, il faut lire, $AD = 2(a - b - c)$; p. 259: le renvoi (1) doit être: *Livre des Lemmes*; p. 359, troisième ligne: lire $(a - b - c)^2$, au lieu de $(2a - b - c)^2$.

---

[1] Nous avons donné, pour notre part, de nombreuses propriétés de ce triangle. — *Mathesis*, 1924, p. 94; 1931, pp. 192 et 284; 1934 (supplément, p. 28). — *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1934, p. 94. (V. T.)