Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES
Autor: Dufour, M.
Kapitel: 5. — Le foyer singulier.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22597

comme les cordes correspondantes également inclinés sur la verticale. Nous avons

$$S_1Q_1 + S_1Q_2 = 2S_1Q \quad \text{et} \quad S_1R_1 + S_1R_2 = 2S_1R \; .$$

Faisons tourner le plan V' autour de l'axe du cône S_1: l'angle des deux génératrices passant par S_1 ne change pas, S_2' se déplace dans V' le long d'une droite horizontale et vient en S_2''. L'angle des asymptotes ne change pas et par suite le système des deux diamètres conjugués subit une translation horizontale: les déplacements de Q et R sur les génératrices de S_1 sont égaux et de sens contraire et la somme $S_1Q + S_1R$ reste constante, quelle que soit l'orientation de V'. Projetons sur la trace horizontale de V': nous voyons que la somme des distances d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une sécante quelconque passant par ce foyer est constante.

Si nous prenons comme sécante l'axe F_1F_2, nous voyons de plus que la constante est la même pour les foyers F_1 et F_2.

5. — *Le foyer singulier.*

Les trois points F_1, F_2, F_3. auxquels leur propriété optique a fait donner le nom de foyers, sont aussi des foyers répondant à la définition de Plücker: le calcul prouve que ce sont les points d'intersection de tangentes menées à l'ovale par les points cycliques du plan.

L'ovale possède aussi un *foyer singulier:* elle passe par les points cycliques du plan et a des asymptotes qui la touchent en ces points.

Si nous supposons que S_2 se déplace sur la verticale F_2S_2 (fig. 1), c'est-à-dire si nous faisons varier h_3 en laissant fixes λ_1 et λ_2, nous obtenons une famille d'ovales définies par la relation $\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 = - h_3$, où h_3 est un paramètre variable. Dans l'équation en coordonnées cartésiennes correspondante, les termes du quatrième et du troisième degré sont indépendants de h_3, et, par suite, toutes ces ovales ont les mêmes asymptotes [1]. Il nous

[1] L'équation cartésienne de l'ovale de Descartes ne diffère que par une constante de celle du limaçon qui fait partie de la famille. L'ovale est le lieu des points d'égale puissance par rapport au limaçon.

suffira donc d'étudier ces asymptotes dans le cas particulier où S_2 est sur le cône S_1, où l'ovale devient un *limaçon de Pascal.* En regardant cette courbe comme une conchoïde de cercle, et en prenant comme pôle son point double et comme axe polaire son axe de symétrie, on écrit immédiatement son équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2r \cos \theta + l \quad \text{ou} \quad \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + l\rho = 0 \ .$$

Passant aux coordonnées cartésiennes rectangulaires, le pôle étant pris pour origine et l'axe polaire pour axe des x, on a

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2) \ .$$

Les points cycliques sont points doubles: les tangentes aux points cycliques y rencontrent la courbe en trois points confondus. Soit $y = ix + \delta$ une de ces asymptotes; l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec la courbe doit avoir trois racines infinies. En portant la valeur $y = ix + \delta$ dans l'équation de la courbe, et en exprimant que le coefficient de x^2 est nul, nous obtenons la relation $(\delta + ri)^2 = 0$. Les points cycliques sont des points de rebroussement de l'ovale, et les asymptotes se coupent en un point réel ($x = r$, $y = 0$) au centre du cercle de base du limaçon. Ce point est le *foyer singulier* commun aux ovales de la famille $\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 = -h_3$ [1].

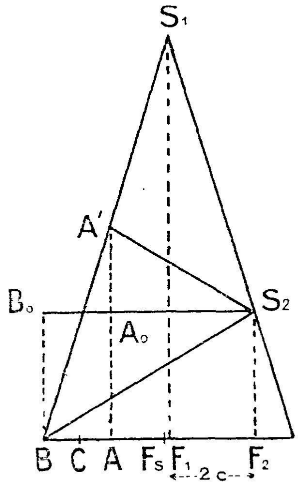

Fig. 3.

Calculons la valeur du rayon r en fonction de la distance $2c$ des deux foyers et des coefficients λ_1 et λ_2. Nous avons (fig. 3), en appelant C l'extrémité du diamètre du cercle de base du limaçon $F_2C = 2r$. D'après la définition de la conchoïde, ce cercle passe à égale distance de B et de A, points du limaçon situés sur son axe. On a $2\,F_2C = F_2A + F_2B$.

---

[1] Si nous supposons $l = 2r$, nous n'avons plus affaire à une ovale de Descartes, mais à une *cardioïde*. Le centre du cercle de base de la cardioïde est un foyer singulier.

D'autre part,

$$A_0A' = \lambda_2 \,.\, F_2A = \lambda_1(4c - F_2A) \qquad \text{d'où} \qquad F_2A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2}\,,$$

$$B_0B = \lambda_2 \,.\, F_2B = \lambda_1(F_2B - 4c) \qquad \text{d'où} \qquad F_2B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2C}{2} = \frac{F_2A + F_2B}{4} = \lambda_1 c\left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}\,.$$

Désignons par F_s le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont [1]

$$F_sF_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}\,, \qquad F_sF_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}\,, \qquad F_sF_3 = 2\frac{d^2}{c}\,.\,\frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}\,.$$

F_s est extérieur à l'intervalle F_1F_2 et placé du côté de F_1.

II. — Normale a l'ovale.

L'ovale étant donnée par l'équation $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$ rapportée à deux foyers F et F′, nous prenons sur la courbe un point I,

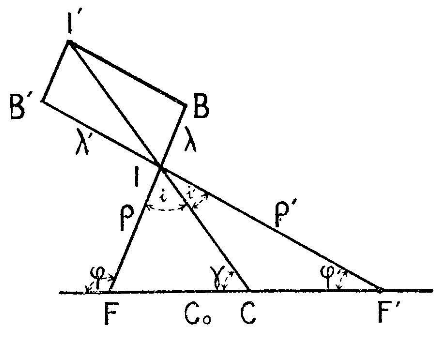

Fig. 4.

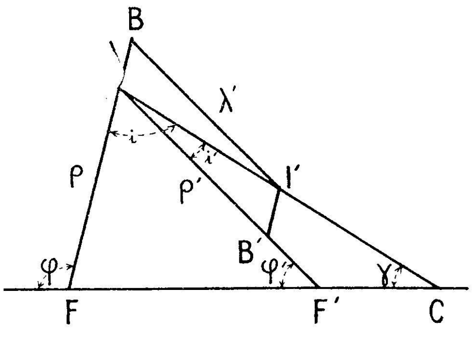

Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs FI et F′I des segments IB $= \lambda$ et IB′ $= \lambda'$, et nous complétons le parallélogramme BIB′I′ (fig. 4 et 5): sa diagonale II′ est la normale à l'ovale.

---

[1] En prenant F_S pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où F_SF_1, F_SF_2 et F_SF_3 interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.