4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THÉORÈME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) *du cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.*

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left.\begin{array}{l} AD = c' \sin\gamma \\ BE = c'' \sin\gamma \end{array}\right\} AD + BE = c \sin\gamma ,$$

$$\left.\begin{array}{l} BE = a' \sin\alpha \\ CF = a'' \sin\alpha \end{array}\right\} BE + CF = a \sin\alpha ,$$

$$\left.\begin{array}{l} CF = b' \sin\beta \\ AD = b'' \sin\beta \end{array}\right\} CF + AD = b \sin\beta ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma .$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \; a = 2R \sin\alpha, \; b = 2R \sin\beta, \; c = 2R \sin\gamma;$$

$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma = 2R[\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma] .$$

Or, d'après (27)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma = 2(2R + r_1) . \qquad (39)$$

Par suite

$$\underline{AD + BE + CF = 2R + r_1 ,} \qquad (40)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle donné augmenté du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

A, B, C étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs et AD, BE, CF leurs rayons, la relation ci-dessus peut s'écrire ($R = 2R_1$):

$$r_{a_1} + r_{b_1} + r_{c_1} = 4R_1 + r_1 ; \qquad (40')$$

$$\underline{r_a + r_b + r_c = 4R + r .} \qquad (41)$$

Cette relation lie les rayons des cercles inscrit, circonscrit et ex-inscrits à un triangle. Elle peut s'énoncer comme suit:

THÉORÈME. — *La somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle est égale au double diamètre du cercle circonscrit augmenté du rayon du cercle inscrit.*

5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

La fig. 7 (ou 12) donne:

$$OD + OE + OF = (OA + OB + OC) - (AD + BE + CF) .$$

Mais d'après (40)

$$AD + BE + CF = 2R + r_1 ,$$

et

$$OA + OB + OC = 3R .$$

Donc

$$OD + OE + OF = R - r_1 = 2R_1 - r_1 , \qquad (42)$$

c'est-à-dire