Chapitre III. ' ' M ',

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2}(ab = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\left((ab)(j_2^2)j_1^2 + (ab)(j_1^1)j_2^2\right)$$

donc:

$$\mathcal{O}_2^{(3}(ab = \mathcal{O}_2(ab$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération $\mathcal{O}_2$.

Chapitre III.

Extension du produit cyclique au cas de n *vecteurs.*

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs a, b, c..l l'expression :

$$f^{(\smile n)} = a \smile b \smile c \ldots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\left((f^{(n)})(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n\right) \qquad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \ldots l \ .$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n, mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \qquad (p = 1, 2 \ldots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{(\smile n)} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \cdots \cdot j_1 j_2^{n-1} \qquad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de $j_1^{\smile n}$, par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.

Comme pour le produit cyclique de deux vecteurs, on peut toujours résoudre l'équation binôme :

$$x^{n}_{\smile} = f^{(n)}_{\smile} \tag{4}$$

soit en la ramenant à l'équivalence :

$$x^n = f^{(n)} + \lambda_1 j_1^{n-1} j_2 \ldots + \lambda_{n-1} j_1 j_2^{n-1}$$

que nous écrirons de manière abrégée :

$$x^n = f^{(n)} \qquad (\text{module } j_1 j_2) \tag{5}$$

puis déterminant les coefficients λ par la condition que le premier membre soit une puissance n^{me} parfaite ; soit encore en la remplaçant par le système d'équations simultanées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^n)(j_1^n = f^{(n)})(j_1^n \\ x^n)(j_2^n = f^{(n)})(j_2^n \end{array} \right. \tag{6}$$

Il résulte des considérations précédentes que les formes :

$$f^{(n)} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)} + \lambda j_1 j_2 g^{(n-2)}$$

sont équivalentes pour le produit cyclique, quelle que soit la forme $g^{(n-2)}$ et aussi que les n solutions de l'équation binôme forment le faisceau régulier de n vecteurs que représente l'orientante $f^{(n)}_{\smile}$, faisceau apolaire au couple isotrope $j_1 j_2$.

On voit encore que les seuls produits cycliques qui sont nuls sans qu'un de leurs facteurs du premier ordre s'annule sont ceux qui admettent comme facteur (du second ordre) $j_1 \smile j_2$. C'est Laguerre qui a introduit la notion d'*orientation* (relative à un axe de repère u) d'un faisceau de directions; G. Humbert a désigné sous ce nom, pour la forme $abc \ldots l$ le coefficient :

$$(-1)^n \frac{abc \ldots l)(j_1^n}{abc \ldots l)(j_2^n} = (-1)^n \frac{\zeta_a \zeta_b \ldots \zeta_l}{\bar{\zeta}_a \bar{\zeta}_b \ldots \bar{\zeta}_l}$$

en coordonnées symétriques :

$$\zeta = \xi + i\eta$$
$$\bar{\zeta} = \xi - i\eta \, .$$

Nous pouvons sans inconvénient modifier la définition de Humbert en négligeant le facteur $(-1)^n$, de sorte que l'orientation sera définie par :

$$\omega = \frac{f^{(n)}\,)(\,j_1^n}{f^{(n)}\,)(\,j_2^n} \tag{7}$$

qui est le coefficient essentiel d'une orientante, d'équation :

$$(j_1^n - \omega j_2^n\,)(\,x^n = 0\ .$$

Les propriétés des orientations résulteront donc immédiatement de celles des orientantes, c'est-à-dire du produit cyclique. Il est évident que celui-ci est commutatif, mais il nous reste à montrer ce qu'on pourra considérer comme la *propriété associative* du produit, bien que cette propriété soit toute autre que celle qu'on considère dans les systèmes *numériques* complexes; le même cas se présente déjà, du reste, pour le produit extérieur de Grassmann.

Nous allons établir que si une forme $f^{(n)}$ est le produit algébrique de formes d'ordre moindre, telles que $g^{(p)}$, l'orientante $f^{\underset{\smile}{(n)}}$ est un produit des orientantes $g^{\underset{\smile}{(p)}}$, et pour le produit ainsi défini nous conserverons le signe $\smile$ du produit cyclique.

Nous remarquerons d'abord que si deux formes orientantes :

$$a^{(p)} = \alpha_1 j_1^p - \alpha_2 j_2^p$$

$$a'^{(p)} = \alpha_1 j_1^p + \alpha_2 j_2^p$$

diffèrent par le signe du coefficient de j_2^p, c'est-à-dire ont des orientations opposées, la seconde est fonction linéaire de la première — et inversement — le symbole de cette fonction ne dépendant pas de la forme considérée.

En effet :

$$a^{(p)}\,)(\,j_2^p = \alpha_1\,[j_1 j_2]^p$$

$$a^{(p)}\,)(\,j_1^p = -\,\alpha_2\,[j_2 j_1]^p$$

donc :

$$a'^{(p)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^p}\left((a^{(p)}\,)(\,j_2^p)j_1^p - (-1)^p(a^{(p)}\,)(\,j_1^p)j_2^p\right) = \mathfrak{A}_p\,(a^{(p)}\ . \tag{8}$$

Supposons maintenant :

$$f^{(n)} = g^{(p)} h^{(q)} \qquad (p + q = n)$$

$$[j_1 j_2]^n f^{\overset{(n)}{\smile}} = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

$$[j_1 j_2]^p g^{\overset{(p)}{\smile}} = \gamma_1 j_1^p - \gamma_2 j_2^p$$

$$[j_1 j_2]^q h^{\overset{(q)}{\smile}} = \eta_1 j_1^q - \eta_2 j_2^q$$

avec :

$$\varphi_1 = f^{(n)})(j_2^n = \left(g^{(p)})(j_2^p\right)\left(h^{(q)})(j_2^q\right) = \gamma_1 \eta_1$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 \eta_2$$

donc :

$$[j_1 j_2]^n f^{\overset{(n)}{\smile}} = \gamma_1 j_1^p \eta_1 j_1^q - \gamma_2 j_2^p \eta_2 j_2^q \ .$$

Le second membre est de la forme :

$$A_1 B_1 - A_2 B_2 = \frac{1}{2}\left[(A_1 - A_2)(B_1 + B_2) + (B_1 - B_2)(A_1 + A_2)\right]$$

donc :

$$f^{\overset{(n)}{\smile}} = \frac{1}{2}\left(g^{\overset{(p)}{\smile}} \mathcal{A}_q (h^{\overset{(q)}{\smile}} + h^{\overset{(q)}{\smile}} \mathcal{A}_p (g^{\overset{(p)}{\smile}}\right) = g^{\overset{(p)}{\smile}} \smile h^{\overset{(q)}{\smile}} \qquad (9)$$

et comme on a vu en même temps :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

l'orientation de $f^{(n)}$ est aussi le produit des orientations de $g^{(p)}$ et $h^{(q)}$.

Remarque. — L'opération linéaire $\mathcal{A}_p$ précédemment employée *sur une orientante* est reliée simplement à l'opération $\mathcal{O}_p$ qui donne l'orientante d'une forme d'ordre p. On a, en effet, quelle que soit la parité de p :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p^{(2}$$

mais si p est pair, on a plus simplement :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p \ .$$