FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

Autor(en): **Fréchet, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515731

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

PAR

M. FRÉCHET (Strasbourg).

SOMMAIRE:

Première partie. — I. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations. — II. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint. — III. Idem au sens complet.

Seconde partie. — IV. Fonctions additives d'ensembles abstraits [1].

I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

L'addition, la soustraction de deux ensembles sont des exemples particuliers d'opérations qui font correspondre à certains ensembles ou groupements d'ensembles des ensembles déterminés. On peut dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *close par rapport aux opérations* S, D,... si chacune de ces opérations, effectuée uniquement sur des ensembles appartenant à la famille $\mathcal{F}$ ne peut fournir que des ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. On peut alors se proposer de construire une famille $\mathcal{F}$ close par rapport à certaines opérations S, D,... connaissant certains ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. Ou même, plus généralement, étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ composée d'ensembles également arbitraires, on peut chercher s'il existe une famille $\mathcal{F}$ comprenant tous les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,... Nous distinguerons deux cas qui ne sont pas

[1] Le présent article est le résumé de deux communications présentées en janvier 1922 au Colloque mathématique de Zurich et au Séminaire mathématique de Berne, par M. Maurice FRÉCHET, Directeur de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.

tous les cas possibles, mais qui sont les plus simples et les plus importants:

1° Supposons que les opérations S, D,... ne soient applicables (ou qu'on aie convenu de ne les appliquer) qu'à des groupements formés d'un nombre *fini* d'ensembles. Appelons suite déduite de la famille $\mathcal{H}$, toute suite ordonnée composée d'un nombre fini d'ensembles dont chacun, G, appartient à $\mathcal{H}$ ou résulte de l'une des opérations S, D,... effectuée sur les ensembles qui précèdent G dans cette suite.

Appelons maintenant $\mathcal{H}_r$ la famille constituée de tous les ensembles appartenant à l'une quelconque des suites déduites de $\mathcal{H}$; la famille $\mathcal{H}_r$ comprend évidemment la famille $\mathcal{H}$ et est close par rapport à S, D,...; d'autre part elle appartient à toute famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S,D,... Nous savons donc construire non seulement une solution du problème, mais même «la plus petite famille» comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,...

2° Supposons que les opérations S, D, ... ne sont applicables (ou qu'on convienne de ne les appliquer) qu'à (un nombre fini ou) un groupement *dénombrable* d'ensembles. Alors on saura, comme précédemment, former « la plus petite famille » comprenant une famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... (On pourra l'appeler $\mathcal{H}_c$). On opèrera comme plus haut, mais cette fois les suites considérées pourront comprendre des suites *bien* ordonnées dénombrables, *(finies ou non)*.

Ainsi chaque ensemble appartenant à $\mathcal{H}_r$ (ou à $\mathcal{H}_c$) pourra être considéré comme le dernier terme d'une suite bien ordonnée finie (ou dénombrable) d'ensembles formés à partir des ensembles de la famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ par des applications répétées, mieux, réitérées, des opérations S,D, ... dans un ordre quelconque.

Distinction des classes d'ensembles. — On peut si l'on veut *repérer le degré de complexité* de la construction de chaque ensemble de $\mathcal{H}_r$ ou de $\mathcal{H}_c$ (qui d'ailleurs peut être obtenu parfois par différentes suites d'opérations) de la manière suivante.

Supposons qu'on puisse disposer les opérations S, D,..., considérées en elles-mêmes, en une suite bien ordonnée T. (C'est par

exemple ce qui aura lieu si ces opérations sont en nombre fini, seul cas utilisé par la suite). En permutant au besoin ces opérations, on peut appeler précisément S, D, ... ces opérations dans l'ordre où elles se présentent. Considérons alors la suite bien ordonnée T', semblable à la suite T,

$$\mathcal{K}, S\mathcal{K}, D(S\mathcal{K}), \ldots$$

où chaque terme est une famille $\mathcal{L}$ d'ensembles composée des ensembles appartenant aux familles précédentes et de ceux obtenus en appliquant à tout groupement de ceux-ci (quand cela est possible) l'opération de même rang que $\mathcal{L}$ dans T. Soit enfin $U\mathcal{K}$ la famille des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes de cette suite T'. Il est évident que $U\mathcal{K}$ comprend $\mathcal{K}$.

La plus petite famille $\mathcal{K}_c$ comprenant $\mathcal{K}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... comprend évidemment $U\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}_c$. De plus la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathfrak{M}$ soit close par rapport à S, D, ... est que $U\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$.

Finalement $\mathcal{K}$ contiendra les familles qui sont les termes d'une suite bien ordonnée dénombrable σ, chacun, $\mathfrak{N}$, résultant de l'opération U effectuée sur la famille constituée par les ensembles appartenant à l'un des termes de σ précédant $\mathfrak{N}$.

Remarquons que si deux termes quelconques d'une des suites σ sont identiques, tous les termes de cette suite sont identiques à partir d'un certain rang. On peut donc remplacer dans ce qui précède, les suites σ par les suites σ_0 qui sont chacune formée en supprimant, s'il y a lieu, d'une suite σ_0 tous les termes identiques à un des termes le précédant.

Ceci étant, chaque suite σ_0 est une suite bien ordonnée dénombrable de familles distinctes, chacune comprenant les précédentes (et comprenant en particulier la première qui est toujours $\mathcal{K}$). Alors si deux suites bien ordonnées σ_0 sont distinctes, l'une est identique à un « segment » de l'autre, c'est-à-dire est formée des mêmes termes et dans le même ordre que la suite des termes de la seconde précédant un certain terme de cette seconde suite.

Ceci suffit pour établir — sans avoir à parler de nombres transfinis, — qu'il existe une suite bien ordonnée Σ formée de

familles distinctes construite comme les σ_0 (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les σ_0 en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les σ_0 forment une famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille $\mathcal{H}_c$ est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée Σ composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de $\mathcal{H}_c$ permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de Σ à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de $\mathcal{H}$. Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille $\mathcal{H}$ est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de H. Mais si au contraire les ensembles de $\mathcal{H}$ sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de $\mathcal{H}_c$ par le rang du terme de la suite Σ où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite Σ si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de $\mathcal{H}_r$ déduits de $\mathcal{H}$ sont toutes repérables par des nombres entiers.

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si E_1, E_2 étant deux quelconques des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 + E_2$, $E_1 - E_2$ appartiennent aussi à la famille $\mathcal{F}$.

On peut alors dire que la famille $\mathfrak{F}$ est *close par rapport aux opérations* d'addition et de soustraction de deux ensembles et appliquer à ces opérations particulières les considérations que l'auteur a développées plus haut concernant celles des opérations les plus générales qui ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles.

Il s'agit, étant donnée une famille $\mathcal{H}$, entièrement arbitraire, d'ensembles quelconques, de déterminer une famille comprenant les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations d'addition et de soustraction de deux ensembles.

D'après ce qui précède, on peut construire la plus petite, $\mathcal{H}_r$, de ces familles de la façon suivante: on formera $\mathcal{H}_r$ au moyen de tous les ensembles obtenus chacun comme résultat final d'un nombre fini d'additions et de soustractions de deux ensembles, ces opérations ayant lieu successivement et portant à chaque fois sur des ensembles appartenant soit à $\mathcal{H}$ soit aux ensembles formés dans les opérations antérieures.

D'après le premier mode de construction indiqué, chaque ensemble E de $\mathcal{H}_r$ s'obtient par un nombre fini d'additions et de soustractions qui sont bien effectués à partir de la famille $\mathcal{H}$, mais qui évidemment ne font intervenir, pour un ensemble E déterminé de $\mathcal{H}_r$, qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$: G_1, G_2, ... G_n. Soit $((G_1, \ldots G_n))$ la plus petite famille additive au sens restreint qui comprend les ensembles G_1, ... G_n de $\mathcal{H}$; on voit qu'elle comprend E et est comprise dans $\mathcal{H}_r$. Donc:

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + \mathcal{H}^{(2)} + \ldots + \mathcal{H}^{(n)} + \ldots$$

$\mathcal{H}^{(n)}$ étant la famille composée des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $((G_1, \ldots G_n))$ pour n donné.

On est donc ainsi ramené au cas particulier où $\mathcal{H}$ est composé d'un nombre fini d'ensembles, puisque si l'on sait construire les familles $((G_1, \ldots G_n))$, on saura construire $\mathcal{H}_r$.

Or si les ensembles G_1, ... G_n étaient *disjoints*, c'est-à-dire sans élément commun à deux d'entre eux, la famille $((G_1, \ldots G_n))$ serait évidemment constituée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini des G_1, ... G_n. Pour ramener à ce cas il suffit d'introduire la considération de ce que nous appellerons les

atomes du système $G_1, \ldots G_n$. Dans la suite d'additions et de soustractions à partir des $G_1 \ldots G_n$, qui sert à former un ensemble quelconque de $((G_1, \ldots G_n))$, les ensembles obtenus successivement resteront formés d'éléments des G, par conséquent tout ensemble de $((G_1, \ldots, G_n))$ appartient à $G = G_1 + \ldots + G_n$. En posant $G'_1 = G - G_1, \ldots G'_n = G - G_n$, on voit que les égalités

$$G = G_1 + G'_1, \ldots G = G_n + G'_n$$

représentent ce que l'on peut appeler des découpages de G. Si on combine à la fois tous ces découpages, on divise G en 2^n sous-ensembles au plus — certains pouvant être nuls —, ensembles disjoints deux à deux et que nous appellerons les *atomes* du système $G_1, \ldots G_n$.

On voit facilement que chaque atome s'obtient à partir de ce système par une suite convenable de *soustractions* seulement. Finalement, on voit qu'il existe un nombre fini d'ensembles — les atomes — déduits de $G_1 \ldots G_n$ chacun par une certaine suite convenable de soustractions et tels que $G_1, \ldots G_n$ soient chacun somme d'un nombre fini d'atomes disjoints.

Alors il est manifeste que les atomes appartiennent à la famille $((G_1, \ldots G_n))$ et que cette famille est constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'atomes disjoints.

On peut aussi en déduire une autre construction de la famille $\mathcal{H}_r$ dans le cas d'une famille $\mathcal{H}$ quelconque. Appelons système moléculaire attaché à $\mathcal{H}$, le système $\mathfrak{M}$ formé des ensembles qui sont atomes pour l'un au moins des groupements formés d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$.

On voit alors que la famille $\mathcal{H}_r$ sera constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini de molécules disjointes. Ceci montre en passant que dans la construction d'un ensemble quelconque de $\mathcal{H}_r$ par un nombre fini d'additions et de soustractions à partir de $\mathcal{H}$, on peut toujours supposer que les soustractions ont toutes été placées en tête. Ceci montre aussi que pour former la plus petite famille $\mathcal{H}_r$ additive au sens restreint et comprenant $\mathcal{H}$, on peut former d'abord la plus petite famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport à la soustraction et ensuite obtenir $\mathcal{H}_r$ comme la plus petite famille close par rapport à

l'addition de deux ensembles et comprenant la famille qu'on vient de former.

Il pourra aussi être utile de remarquer que si une famille d'ensembles, $\mathcal{H}$, est telle que la différence de deux de ses ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$, la famille $\mathcal{H}_r$ est constituée par tous les ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'ensembles disjoint appartenant à $\mathcal{H}$. (On est conduit à envisager le cas actuellement considéré si l'on remarque que le système moléculaire attaché à une famille quelconque jouit lui-même de cette propriété.)

En vue de mesurer le degré de complexité de chacun des ensembles de $\mathcal{H}_r$, on commencera par appeler $U\mathcal{K}$ l'opération qui consiste à adjoindre à une famille $\mathcal{K}$ les ensembles qui sont différences de deux ensembles de $\mathcal{K}$, puis à adjoindre à la famille ainsi formée les ensembles qui sont sommes de deux des ensembles de cette seconde famille.

Ceci fait, on formera les familles

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \quad \ldots$$

et en général la famille qu'on peut désigner par $U^{(n)}\mathcal{H}$ et qui résulte de l'opération U réitérée n fois à partir de $\mathcal{H}$. Alors: ou bien à partir d'un certain rang p les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à $U^{(p)}\mathcal{H}$ et $U^{(p)}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$; ou dans le cas contraire $\mathcal{H}_r$ est formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $U^{(n)}\mathcal{H}$; autrement dit

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + U\mathcal{H} + \ldots + U^{(n)}\mathcal{H} + \ldots .$$

On voit alors qu'on pourra distinguer dans $\mathcal{H}_r$ des ensembles de classe 0, 1, 2, ..., n, ..., la classe étant toujours déterminée par un rang entier. Bien entendu, il pourra arriver que le nombre des classes soit fini si les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à partir d'un certain rang.

III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

1. *Définitions.* — Appelons *ensemble limite restreint* d'une suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... E_n ... l'ensemble R des

éléments qui appartiennent chacun à partir d'un certain rang (variable) aux termes de cette suite.

Appelons *ensemble limite complet* de cette suite, l'ensemble C des éléments qui appartiennent chacun à une infinité (variable) de termes de cette suite.

Il est évident que R appartient à C. Lorsque R est identique à C nous dirons que la *suite des* E_n *converge* et que $R \equiv C$ est son *ensemble limite* [1].

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *fermée* si tout ensemble limite d'une suite convergente infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$.

Tout comme pour les « fonctionnelles » de M. Hadamard, on pourrait dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *linéaire* si elle est fermée et additive au sens restreint. La définition des familles linéaires d'ensembles est équivalente à celle des familles $\mathcal{F}$ *additives au sens complet* (c'est-à-dire telles que si $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ est une suite finie ou infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 - E_2$ et $E_1 + E_2 + \ldots$ appartiennent à $\mathcal{F}$).

Remarque : Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$; $E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$ sont deux suites infinies quelconques d'ensembles quelconques et si e, E, e', E′ sont respectivement leurs ensembles limites restreint et complet; si d'autre part R, C; R_1, C_1 sont respectivement les ensembles limites restreint et complet des suites

$$S_1 = E_1 + E'_1, \ \ldots\ , S_n = E_n + E'_n \ \ldots$$

$$D_1 = E_1 - E'_1, \ \ldots\ , D_n = E_n - E'_n \ \ldots$$

on a les relations symboliques

$$\left.\begin{array}{l} e + e' < R < C < E + E' \\ e - E' < R_1 < C_1 < E - e' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

où le signe $<$ est mis pour « appartient à ».

---

[1] On remarque que :

1° Si à partir d'un certain rang les ensembles d'une suite $E_1, E_2, \ldots$ sont identiques à un même ensemble E, cette suite converge et a E pour ensemble-limite.

2° Si on extrait d'une suite convergente quelconque d'ensembles $F_1, F_2, \ldots$, une suite infinie de termes de rangs distincts $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots$ cette suite est convergente et vers la même limite.)

(La définition actuelle des ensembles-limites range donc les familles d'ensembles dans la catégorie des classes $(\mathcal{L})$ de ma Thèse.)

En particulier si les deux suites données des E_n et des E'_n convergent et si E, E′ sont leurs ensembles-limites, les deux suites des $S_n = E_n + E'_n$ et des $D_n = E_n - E'_n$ convergent et leurs ensembles limites sont $E + E'$, $E - E'$ [1].

2. *Construction de familles additives au sens complet.* — Le problème consiste étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ d'ensembles quelconques, à déterminer une famille $\mathcal{F}$ comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D addition et soustraction de deux ensembles et *L* passage à la limite c'est-à-dire formation de l'ensemble limite d'une suite convergente d'ensembles de $\mathcal{F}$.

I. D'après la méthode générale indiquée § I, page 114, on pourra former la plus petite $\mathcal{H}_c$ de ces familles en la constituant par les ensembles qui sont chacun dernier terme d'une suite bien ordonnée dénombrable σ d'ensembles G résultant chacun d'une des opérations S, D, L effectuée sur des ensembles appartenant à $\mathcal{H}$ ou précédant G dans σ.

(On peut si l'on veut remplacer les opérations S et L par l'opération consistant à additionner une suite dénombrable d'ensembles).

II. Tout ensemble E de $\mathcal{H}_c$ résulte donc d'une suite dénombrable d'opérations portant chacune sur une suite dénombrable d'ensembles. Par conséquent la construction de chaque ensemble E à partir de $\mathcal{H}$ ne fait intervenir qu'une suite dénombrable E_1, E_2, ... d'ensembles de $\mathcal{H}$: E appartient en même temps à la plus petite famille additive au sens complet comprenant E_1, E_2, ... E_n, ... Et réciproquement celle-ci appartient à $\mathcal{H}_c$. Donc $\mathcal{H}_c$ est constituée par les ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $\mathcal{N}_c$ qui sont chacune la plus petite

---

[1] Un de mes collègues de Strasbourg, M. FLAMANT, a bien voulu me faire observer que, sans supposer les E_n et F_n simultanément convergentes, on pourrait préciser les inégalités symboliques (1). C'est ainsi qu'on a

$$R_1 \equiv e - E' \; ; \quad e - e' < C_1 < E - e' \; , \quad E - E' < C_1 < E - e' \; , \quad C = E + E' \; .$$

J'ajoute que de même :

$$C = E + E' \; , \quad e + e' < R < E + e' \; , \quad e + e' < R < E' + e \; ;$$

de sorte que si l'une des suites données converge, on n'a plus que des égalités. Par exemple si les E_n convergent : $C_1 = E - e'$, $R = E + e'$.

famille additive au sens complet comprenant une suite dénombrable arbitraire déterminée $\mathfrak{N}$ d'ensembles E_1, E_2, ... de $\mathcal{H}$.

III. Soit $\mathfrak{N}_r$ la plus petite famille additive au sens *restreint* comprenant $\mathfrak{N}$; c'est, comme $\mathfrak{N}$, une famille dénombrable d'ensembles F_1, F_2, ... F_n, ... Appelons *atome* relatif à l'élément A, pour le système $\mathfrak{N}$, l'ensemble commun à ceux des ensembles de $\mathfrak{N}_r$ qui comprennent A. On voit que si un atome relatif à A possède au moins un élément B autre que A, il est aussi relatif à B. Deux atomes sont nécessairement disjoints s'ils sont distincts. Un atome pour le système $\mathfrak{N}$ est, si on le compare à un ensemble quelconque F_i de $\mathfrak{N}_r$, soit un sous-ensemble de F_i, soit disjoint de F_i. Le mode de construction de $\mathfrak{N}_c$ indiqué plus haut montre qu'il en est alors de même vis-à-vis des ensembles de $\mathfrak{N}_c$. Finalement si on a une famille *dénombrable*, $\mathfrak{N}$ d'ensembles, on peut regarder ces ensembles de $\mathfrak{N}$ chacun comme une somme d'atomes disjoints, atomes qui sont indestructibles quand on applique aux ensembles de $\mathfrak{N}$ une suite dénombrable quelconque d'additions, soustractions, passages à la limite, de sorte que, de même, chacun des ensembles de la plus petite famille $\mathfrak{N}_c$ additive au sens complet et comprenant $\mathfrak{N}$ est aussi une somme d'atomes disjoints. (Ces remarques perdent leur intérêt dans le cas où les atomes seraient des ensembles réduits chacun à un élément, mais ce cas ne se présente pas nécessairement.) La notion d'atome est d'ailleurs moins facilement utilisable ici que dans le cas précédemment étudié où $\mathfrak{N}$ serait fini (cas où les atomes étaient en nombre fini), parce que l'ensemble des atomes disjoints, non seulement ne sera plus ici fini, mais même ne sera pas, en général, dénombrable.

3. *Classes d'ensembles.* — On peut, si l'on veut, mettre en évidence le degré de complexité de la construction des divers ensembles de $\mathcal{H}_c$ en employant la méthode générale indiquée § 1, page 116. On appellera U la transformation qui consiste à remplacer d'abord une famille d'ensembles $\mathcal{K}$ par la famille $\mathcal{K}'$ obtenue en adjoignant à $\mathcal{K}$ les ensembles limites de suites convergentes (s'il en existe) d'ensembles de $\mathcal{K}$: puis à adjoindre à la famille $\mathcal{K}'$ obtenue les ensembles qui sont différences d'ensembles de $\mathcal{K}'$ et enfin à adjoindre à la famille obtenue $\mathcal{K}_1$, les ensembles qui sont sommes de deux ensembles de $\mathcal{K}_1$. L'application directe

de la méthode générale consisterait à considérer $\mathcal{H}_c$ comme formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles qui sont les termes de la série bien ordonnée Σ':

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \quad \ldots$$

Mais il est préférable ici de remarquer que $\mathcal{H}_c$ est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille $\mathcal{H}_r$ (famille additive au sens restreint, la plus petite comprenant $\mathcal{H}$). En conséquence $\mathcal{H}_c$ est aussi formée des ensembles appartenant à un des termes de la suite bien ordonnée Σ

$$\mathcal{H}_r, \quad U\mathcal{H}_r, \quad U(U\mathcal{H}_r), \quad \ldots$$

où chaque terme s'obtient en appliquant l'opération U à la somme des familles de Σ qui précède celui-ci. Or on peut simplifier cette construction au moyen du lemme énoncé plus haut, sur la somme et la différence de deux ensembles limites. Il en résulte en effet que si $\mathcal{K}$ est une famille additive au sens restreint la transformation $U\mathcal{K}$ se réduira à $U\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ et donnera une famille $U\mathcal{K}$ additive au sens restreint.

On en conclut que la suite Σ s'obtient de la façon suivante: chaque terme est la famille $\mathcal{K}$ constituée par la somme $\mathcal{K}$ des familles de Σ précédant ce terme et par les ensembles-limites des suites convergentes — s'il en existe — d'ensembles de $\mathcal{K}$. Autrement dit, après la formation de $\mathcal{H}_r$ (pour laquelle n'interviennent que les opérations S, D) la formation des termes successifs de Σ ne fait plus intervenir que l'opération L de passage à la limite et chaque terme de Σ est une famille additive au sens restreint. On voit en particulier qu'au lieu d'appliquer dans un ordre quelconque l'addition, la soustraction, le passage à la limite, on peut pour former $\mathcal{H}_c$, épuiser sur $\mathcal{H}$ les effets de la soustraction; puis sur la famille $\mathcal{H}_s$ obtenue épuiser les effets de l'addition; enfin sur la famille $\mathcal{H}_r$ ainsi engendrée épuiser les effets du passage à la limite.

La considération de la suite Σ non seulement offre un mode régulier de construction de $\mathcal{H}_c$ par l'extension progressive de la famille $\mathcal{H}$, mais encore il a sur le premier mode de construction indiqué l'avantage de fournir une répartition naturelle des

ensembles de la famille $\mathcal{H}_c$ en « classes » d'ensembles dont la construction à partir de $\mathcal{H}$ est de plus en plus compliquée.

Applications. — On conçoit bien que les généralités précédentes ont trouvé leur origine dans les travaux concernant les familles additives d'ensembles linéaires dont on trouvera l'exposé récent le plus complet dans l'ouvrage de M. de la VALLÉE-POUSSIN: « Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles ».

Même dans ce cas l'auteur croit avoir élargi le point de vue ordinaire, par exemple en ne se restreignant pas au cas où la famille initiale donnée $\mathcal{H}$ est formée d'intervalles.

Mais sa théorie fournit aussi des applications intéressantes dans le cas où les éléments considérés sont des points de l'espace à une infinité de dimensions. L'auteur développera ailleurs ces applications ainsi que l'application à ce cas de la théorie des fonctions additives d'ensembles abstraits.

IV. — Fonctions additives d'ensembles abstraits.

Définitions. — Si une correspondance est établie qui fait correspondre à tout ensemble E d'une certaine famille $\mathcal{F}$, un nombre déterminé $f(E)$, cette correspondance définit une *fonction d'ensemble*, uniforme sur la famille $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2 deux ensembles disjoints, c'est-à-dire sans éléments communs; si l'on a

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$$

toutes les fois que E_1, E_2, $E_1 + E_2$ appartiennent à $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens restreint* sur $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2, ... E_n, ... une suite infinie dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux; si l'on a

$$f(E_1 + E_2 + \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots$$

toutes les fois que les ensembles E_1, E_2, ... et $E_1 + E_2 + \ldots$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens complet* (ou plus simplement additive) sur $\mathcal{F}$.

On conçoit qu'il sera généralement plus facile et plus simple d'étudier une fonction additive au sens restreint (complet) sur une famille d'ensembles additive au sens restreint (complet).

C'est en fait surtout cette remarque qui a provoqué l'introduction de ces familles particulières d'ensembles.

Remarque: M. de la VALLÉE POUSSIN a pu écrire, d'ailleurs très justement, que le progrès essentiel introduit par la théorie de la mesure « est d'avoir réalisé l'additivité au sens complet ». Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que si l'intuition de M. BOREL n'avait pas soudainement introduit cette notion, un développement régulier de la théorie des ensembles et du calcul fonctionnel aurait dû, plus lentement mais sûrement toutefois, y conduire. Qu'est-ce en effet qu'une fonction d'ensemble additive au sens complet ? C'est une fonction additive au sens restreint *et continue*, (et réciproquement), si nous appelons, comme il convient, fonction d'ensembles, continue sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, une fonction telle que $f(E_n)$ converge vers $f(E)$ si la suite convergente d'ensembles E_n de $\mathcal{F}$ a pour ensemble limite l'ensemble E de $\mathcal{F}$.

Rappel de propriétés connues des fonctions additives d'ensembles. — Nous n'étudierons ici que le cas des fonctions d'ensembles additives au sens complet sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles additive au sens complet.

I. Une fonction f additive sur une famille additive $\mathcal{F}$ est bornée sur $\mathcal{F}$. Il en résulte que si $E = E_1 + \ldots + E_n$ est une décomposition variable d'un ensemble E de $\mathcal{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{F}$, la somme

$$|f(E_1)| + \ldots + |f(E_n)|$$

a une borne supérieure finie qu'on peut appeler la variation totale de f sur E relativement à la famille $\mathcal{F}$ et qu'on peut désigner quand il s'agit toujours de la même famille $\mathcal{F}$ par la notation (due à J. RADON) $\int_E |df|$.

II. La variation totale d'une fonction f additive sur $\mathcal{F}$ est aussi une fonction d'ensemble additive sur $\mathcal{F}$.

III. On peut représenter à la fois une fonction additive f et sa variation totale au moyen de deux fonctions additives non négatives φ, ψ suivant les formules

$$f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$$
$$\int_E |df| = \varphi(E) + \psi(E)$$

On obtient ainsi la représentation canonique de f.

IV. La représentation la plus générale d'une fonction d'ensembles additive f comme différence de deux fonctions additives non négatives $f(E) = \varphi_1(E) - \psi_1(E)$ s'obtient en ajoutant une fonction additive non négative, pour former φ_1, ψ_1 aux fonctions φ, ψ de la représentation canonique. En sorte que celles-ci sont les plus petites fonctions φ_1, ψ_1, possibles.

Définitions nouvelles. — Relativement à une fonction d'ensembles additive déterminée, f, et à une famille d'ensembles additive déterminée, $\mathcal{F}$,

un ensemble E est *presque nul* s'il appartient à $\mathcal{F}$ et si la variation totale de f sur E est nulle;

deux ensembles E, F sont *presque identiques*, s'ils ne diffèrent de leur ensemble commun que par des ensembles presque nuls;

deux ensembles E, F sont *presque disjoints*, si leur ensemble commun est presque nul.

Décomposition d'une fonction additive en partie régulière et en partie singulière.

Singularité. — Un ensemble H appartenant à la famille F est une singularité de la fonction f si tout sous-ensemble de H qui n'est pas presque nul est presque identique à H.

La variation totale de f sur une de ses singularités H est égale à $|f(H)|$. Nous appellerons $f(H)$ le saut de f sur H et $|f(H)|$ son saut absolu.

Deux singularités de f sont presque disjointes ou presque identiques.

L'ensemble des singularités presque disjointes d'une même fonction additive est dénombrable. Et même, plus précisément, si une fonction additive d'ensembles a au moins une singularité il existe une suite dénombrable S_1, S_2, ... de singularités disjointes deux à deux, telle que toute singularité de f soit presque identique à l'une de celles-ci.

Appelons *ensemble singulier* l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \ldots$ ou tout ensemble T appartenant à $\mathcal{F}$ et presque identique à S.

Fonction des sauts. Partie régulière. — On peut décomposer une fonction $f(E)$ additive sur une famille d'ensembles additive $\mathcal{F}$ en deux parties $f(E) = s(E) + r(E)$, où $s(E)$, $r(E)$ sont aussi, comme f, deux fonctions d'ensembles additives sur F,

mais où $r(E)$, la *partie régulière* de f, *n'a plus de singularités* et où au contraire on peut prendre *tout ensemble singulier de* f comme ensemble singulier de $s(E)$, *la fonction des sauts* de f, *avec les mêmes sauts* que pour f, sur chaque singularité de f, la fonction des sauts étant *nulle en dehors de tout ensemble singulier* de f.

Il suffit pour cela de poser sur tout ensemble E de $\mathfrak{F}$

$$s(E) = f(E \cdot T) \ , \quad r(E) = f(E - T)$$

T désignant l'un quelconque des ensembles singuliers de f.

Remarquons que si E est un ensemble quelconque de $\mathfrak{F}$ la partie commune à E et à une singularité S_i de f est, soit presque identique à S_i, soit presque nulle. En appelant $c_i = f(S_i)$, le saut de f sur S_i, on a donc $f(E \cdot S_i) = c_i$ ou égal à zéro. Donc la *fonction des sauts de* f *peut s'exprimer sous la forme*

$$r(E) = c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_n} + \ldots$$

si S_{i_1}, S_{i_2} ... sont celles des singularités de f qui sont « presque contenues » dans E, c'est-à-dire qui ne sont pas presque disjointes de E.

D'autre part en ce qui concerne la partie régulière de f, on observera les propriétés suivantes de toute fonction additive g sans singularité: la borne inférieure de la variation totale de g sur un sous-ensemble e non presque nul (et appartenant à $\mathfrak{F}$) d'un ensemble fixe E est zéro; et plus généralement si on fait varier e dans E, la variation totale de g sur e, passe par toutes les valeurs intermédiaires entre son maximum qui est $\int_E |dg|$ et son minimum qui est nul. On démontre ce dernier résultat en prouvant qu'on peut décomposer tout ensemble E de $\mathfrak{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathfrak{F}$ et sur chacun desquels la variation totale de f est inférieure à un même nombre positif donné d'avance arbitrairement.

Décomposition de la variation totale. Il y a lieu de remarquer que si l'on appelle variation positive et variation négative, les deux fonctions non négatives φ, ψ dont la différence constitue la représentation canonique de f, la décomposition de f se reflète exactement sur ses variations totale, positive et néga-

tive. On a d'abord pour fonctions respectives des sauts de $\varphi_{(E)}$, $\psi_{(E)}$, $\int_E |df|$, les fonctions

$$\varphi(E \,.\, T) \,,\ \psi(E \,.\, T) \,,\ \int_{E.T} |df|$$

et pour parties régulières

$$\varphi(E - T) \,,\ \psi(E - T) \,,\ \int_{E-T} |df|$$

De plus puisque

$$\int_{S_i} |df| = |f(S_i)| \,, \qquad \text{ou} \qquad \varphi(S_i) + \psi(S_i) = |\varphi(S_i) - \psi(S_i)$$

d'où

$$\psi(S_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(S_i) = \varphi(S_i) \,; \qquad \text{ou}$$
$$\varphi(S_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(S_i) = -\psi(S_i)$$

l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \ldots$ de singularités de f qui sont disjointes est la somme d'un ensemble singulier S' de φ et d'un ensemble singulier S'' de ψ, ces deux ensembles étant disjoints et composés le premier S' de toutes les singularités S'_i de S où les sauts de f sont positifs et le second S'' de toutes les singularités S''_j de S où les sauts de f sont négatifs, les sauts de φ sur S'' et ceux de ψ sur S' étant en outre nuls.

De sorte qu'on peut écrire:

$$s(E) = \varphi(E \,.\, S') - \psi(E \,.\, S'') \,; \qquad r(E) = \varphi(E - S') - \psi(E - S'')$$
$$\sigma(E) = \varphi(E \,.\, S') + \psi(E \,.\, S'') \,; \qquad \rho(E) = \varphi(E - S') + \psi(E - S'')$$

S', S'' étant deux ensembles disjoints fixes, indépendants de E, σ et ρ étant la fonction des sauts et la partie régulière de $\int_E |df|$.

Remarque: I. Les définitions se simplifieraient et certaines précautions de langage pourraient être évitées dans ce qui précède si l'auteur s'était borné à considérer le cas où la famille $\mathcal{T}$ est *complète* relativement à f, ou ce qui revient au même le cas où l'on aurait « prolongé analytiquement » la fonction f. C'est à quoi on arrive, en gros, en considérant f comme nul sur toute partie n'appartenant pas à $\mathcal{T}$ d'un ensemble presque nul, comme

l'auteur l'a expliqué dans un article du *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 43, 1915, page 16.

II. L'auteur traitera ailleurs de la décomposition de la partie régulière elle-même, en deux parties analogues à celles qu'il avait signalées au Congrès des Sociétés Savantes de 1913.

III. Les exposés précédents ont été donnés sans démonstrations, celles-ci s'obtenant assez facilement quand on se reporte aux exposés avec démonstrations (dus surtout à MM. LEBESGUE et de la VALLÉE-POUSSIN) concernant le cas particulier où les familles considérées sont des familles composées d'ensembles linéaires et contenant les intervalles linéaires. D'ailleurs les démonstrations dans le cas général traité ici ont été données au cours des leçons faites par l'auteur à l'Université de Strasbourg dans le premier semestre 1921-22.

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

PAR

P. APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

I. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de mathématiques* [1], se trouvent définis les foyers rationnels d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

comme des *points tels que la distance d'un point quelconque* M *de la courbe* C *au point foyer soit exprimable par une fonction rationnelle* R *des coordonnées de* M.

Cette notion peut d'ailleurs s'étendre aux surfaces.

A la suite de cet article, M. E. TURRIÈRE, aujourd'hui profes-

[1] Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4], t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.