§ 7. — Etude de la courbure.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait:

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma = \frac{p^3}{m^3} \,. \tag{4}$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovales et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — Etude de la courbure.

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante:

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{\left\{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2} \,.$$

44. — Appliquons cette formule à la surface:

$$xyz = p^3 \,.$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile:

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12}\left\{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right\}^2} = \frac{3}{p^6\left\{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right\}^2} \tag{1}$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right\}^2} \,. \tag{2}$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{c^2} .$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x = \pm c \; ; \qquad y = \pm c \; ; \qquad z = \pm c \; ;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations:

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = a^4 \; , \qquad xyz = p^3 \; .$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z):

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} .$$

Il en résulte:

$$d^4 = \frac{81p^{12}}{\left\{ y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \right\}^2} .$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve:

$$k = \frac{d^4}{27p^6} .$$

Théorème: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(A suivre).