VI

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ...

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{r}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{r}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{r}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{r}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathfrak{b} + \mu_1 \mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ,... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c} \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \\ -\,&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius* [1] :

Soient A_i *et* A'_i *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites p_i *qui relient les points* $P_i \equiv (l, a_i)$ *aux sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* p'_i *qui relient les points* $P'_i \equiv (l, a'_i)$ *aux sommets* A_i *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{r}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$P_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad P'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a} \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \,.$$

---

[1] *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les p_i sont concourantes lorsque les p'_i le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur $\mathfrak{r}$ non pas comme correspondant à une *droite* sphérique, mais comme appartenant à un *point* P. Le théorème en question est le suivant :

Par un point quelconque de la surface sphérique $P(\mathfrak{r})$ *on mène des normales* p_i *et* p'_i *aux côtés* a_i *et* a'_i *de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets* A'_i *et* A_i *des droites sphériques* q_i *et* q'_i *normales aux* p_i *et* p'_i. *Lorsque les* q_i *sont concourantes, il en est de même des* q'_i.

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites p_1, p'_1 et q_1, q'_1 immédiatement

$$p_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$q_1 \equiv V\mathfrak{a}', \mathfrak{r}, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad q'_1 \equiv V\mathfrak{a}, \mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les q_i sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les q'_i aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du *plan* nous aurons, quel que soit le point P, la droite p_1 normale à a_1 et q_1 de nouveau normale à p_1, c'est-à-dire q_1 *parallèle* au côté a_1 du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. *J. Neuberg*[1], peut être formulé :

Etant donnés deux triangles plans A_i *et* A'_i *et les droites* q_i *et* q'_i *menées par les sommets* A'_i *et* A_i *parallèles aux côtés* a_i *et* a'_i; *lorsque les droites* q_i *sont concourantes, il en est de même des droites* q'_i [2].

29. — Nous arrivons à une autre identité entre *sept* vecteurs en remplaçant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , en posant ensuite

$$\lambda_1 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{c}']$$

$$\mu_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{c}'] .$$

---

[1] *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

[2] Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 V\mathfrak{ca} + \mu_1 V\mathfrak{ab} = V\mathfrak{a}, V\mathfrak{ra}' V\mathfrak{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a}, V\mathfrak{ra}' V\mathfrak{bc} \quad V\mathfrak{b}, V\mathfrak{rb}' V\mathfrak{ca} \quad V\mathfrak{c}, V\mathfrak{rc}' V\mathfrak{ab}]\\ &+ [\mathfrak{abc}]^2[V\mathfrak{a}', V\mathfrak{ra} V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}', V\mathfrak{rb} V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}', V\mathfrak{rc} V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 .\end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit $P(\mathfrak{r})$ un *point* quelconque de la surface sphérique ; soient

$$A_i \equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{bc}, V\mathfrak{ca}, V\mathfrak{ab} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}', V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point P aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VV\mathfrak{ra}' V\mathfrak{bc} \qquad Q'_1 \equiv VV\mathfrak{ra} V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

etc., et l'identité nous apprend : lorsque les droites (A_i, Q_i) sont concourantes, les droites (A'_i, Q'_i) le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant $\mathfrak{r}$ comme le vecteur d'une *droite*.

VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[V\mathfrak{aa}' V\mathfrak{bb}' V\mathfrak{cc}'] + [V\mathfrak{bc}' V\mathfrak{ca}' V\mathfrak{ab}'] + [V\mathfrak{cb}' V\mathfrak{ac}' V\mathfrak{ba}'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 *les sommets d'un triangle sphérique,* P *un point quelconque de la surface sphérique,* p_1, p_2, p_3 *les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points*

$$P_{11}, \quad P_{12}, \quad P_{13}; \qquad P_{21}, \quad P_{22}, \quad P_{23}; \qquad P_{31}, \quad P_{32}, \quad P_{33};$$