REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

Autor(en): **Petrovitch, M. Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18036

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'EV. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-

mensurables ou irrationnels algébriques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs).

Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \tag{2}$$

la racine carrée $\sqrt{x}$ ayant sa détermination positive.

En effet, la formule connue

$$B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz \qquad (z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

où B_2, B_4, B_6, ... désignent les nombres de Bernoulli, par le changement $z^2 = x$ se transforme en

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\infty \frac{x^n\, dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lambda_n \pi^{2(n+1)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

où

$$\lambda_n = 2^{2n+1} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1}. \qquad \lambda_0 = 2B_2 = \frac{1}{3} \tag{6}$$

Si donc

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$$

est un polynôme en x arbitraire, on aura

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx = \pi Q(\pi^2), \tag{7}$$

où $Q(x)$ désigne le polynôme

$$Q(x) = a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 x + a_2\lambda_2 x^2 + \ldots + a_p\lambda_p x^p.$$

Lorsque les a_k sont des nombres *algébriques*, les $a_k\lambda_k$ le sont également. L'équation algébrique $Q(x) = 0$ ne pouvant

avoir comme racine le nombre π^2, *l'intégrale* (7) *est finie, déterminée et essentiellement différente de zéro.*

On peut, à l'aide de la fonction (2), former une multitude de fonctions u pour lesquelles l'intégrale (1) jouira de la propriété précédente. Il suffit, par exemple, de se rappeler l'existence de fonctions u de x telles que l'intégrale (1) est *identiquement nulle quel que soit le polynôme* v *en* x. Telles seraient les fonctions signalées par Stieltjes

$$u = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x} \ , \qquad u = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt[4]{x}} \cos \sqrt[4]{x} \ ,$$

ainsi qu'une foule d'autres, pour lesquelles on a

$$\int_0^\infty u x^n \, dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En désignant une pareille fonction (ou une combinaison linéaire homogène de ces fonctions) par U et en prenant

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} + \mathrm{U} \ ,$$

l'intégrale (1) sera finie, déterminée et *différente de zéro* quel que soit le polynôme v à coefficients nombres *algébriques*.