Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ANTINOMIES DE RUSSELL ET DE BURALI-FORTI ET LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

Autor: Mirimanoff, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17315

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES ANTINOMIES DE RUSSELL ET DE BURALI-FORTI

ET LE

PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Introduction.

Aucune théorie mathématique n'a fourni, comme on le sait, autant de faits paradoxaux et d'antinomies, au moins apparentes, que la fameuse théorie des ensembles de Cantor. Les plus connues et les plus importantes de ces antinomies sont celles de Russell et de Burali-Forti ; mais combien d'autres faits bizarres ont été révélés, depuis la publication des premiers travaux de Cantor sur la théorie des ensembles, par Borel, Peano, Richard et Cantor lui-même.

Les antinomies cantoriennes, qui déconcertent et déroutent presque toujours au premier abord, ont fait le désespoir de quelques géomètres logiciens. C'est là sans doute qu'il faut voir la cause de la défiance exagérée que les idées et les théories cantoriennes les mieux établies inspirent à des esprits particulièrement défiants.

Est-il besoin de dire que rien ne justifie, au fond, ni cette défiance ni ce désespoir ? N'avons-nous pas eu des surprises comparables dans la théorie des fonctions et en géométrie ?

Qu'on se rappelle, par exemple, la découverte par Riemann et Weierstrass de fonctions continues non dérivables et de courbes sans tangentes, dont une étude approfondie n'a

justement pu être faite depuis qu'à l'aide de la théorie des ensembles[1]; on pourrait citer également la propriété si curieuse des séries semi-convergentes, révélée par Lejeune Dirichlet, d'avoir une somme dépendant de l'ordre des termes.

Dans tous ces cas, il y a une contradiction manifeste entre les faits nouveaux et les propriétés que nous croyions toujours vraies et qui nous semblaient évidentes, mais qui reposaient en réalité sur une expérience ou une intuition incomplètes, et n'étaient vraies que sous certaines conditions. C'est ainsi que, dans le cas des séries semi-convergentes, le fait nouveau signalé par Dirichlet semble incompatible avec la propriété fondamentale de l'addition algébrique, qui est d'être une opération commutative. Cette propriété est toujours vraie dans un domaine fini, mais les exemples de Dirichlet prouvent qu'elle peut cesser d'être vraie lorsque les substitutions par lesquelles on passe à l'ordre nouveau portent sur un nombre infini d'addendes. Le sentiment d'évidence repose ici sur une intuition incomplète.

Or les antinomies cantoriennes et, en particulier, celles de Russell et de Burali-Forti sont comparables aux exemples que nous venons de rappeler. On croyait, et il semblait évident, que l'existence des individus devait entraîner nécessairement celle de leur ensemble; mais Burali-Forti et Russell ont montré, par des exemples différents, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister, bien que ces individus existent. Comme nous ne pouvons pas ne pas accepter ce fait nouveau, nous sommes obligés d'en conclure que la proposition qui nous semblait évidente et que nous croyions toujours vraie est inexacte, ou plutôt qu'elle n'est vraie que sous certaines conditions[2]. Et alors le problème suivant se pose, que l'on peut regarder comme le problème fondamental de la théorie des ensembles :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'individus existe ?

Certes, l'étude de ce problème est moins avancée que celle

---

[1] Cf. Mme Grace Chisholm Young : *Sur les courbes sans tangente* (*Ens. math.*, année 1915, p. 348). Cf. J. König : *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, chap. II.

des séries semi-convergentes, mais le premier pas est fait, grâce surtout aux recherches de Russell[1], H. Poincaré[2] et J. König[3]. Dans les derniers paragraphes de ce travail, je donne une solution du problème fondamental pour le cas particulier des ensembles que j'appelle ensembles ordinaires. Mes déductions s'appuient sur trois postulats, qu'on applique couramment dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles.

D'autre part, les exemples mêmes de Russell et de Burali-Forti auraient besoin d'être examinés de plus près. Je ferai voir qu'il est facile de donner une forme plus précise à l'exemple de Russell en le débarrassant de difficultés parasites qui n'ont rien à faire avec l'antinomie de Russell proprement dite. Je transformerai de même l'exemple de Burali-Forti, ce qui va me permettre de faire un rapprochement nouveau entre les deux antinomies.

Je ferai abstraction, dans ce travail, des distinctions nouvelles introduites par J. König (*loc. cit.*) dans la théorie des ensembles quelconques, et en particulier dans celle des ensembles bien ordonnés. Deux ensembles contenant les mêmes éléments ne seront jamais regardés comme différents, à moins qu'on ne tienne compte des relations d'ordre ; et à tout ensemble bien ordonné, s'il existe, correspondra, par définition, un type d'ordre déterminé. Je donnerai dans un autre travail les raisons qui m'ont déterminé à ne pas rattacher cette étude à la théorie de J. König.

Je commencerai par l'antinomie de Russell.

Antinomie de Russell.

1. On sait que Russell distingue deux sortes d'ensembles :

Un ensemble E est de première sorte s'il diffère de chacun de ses éléments.

---

[1] Russell : *The Principles of Mathematics.*

[2] H. Poincaré : *Science et Méthode. Dernières pensées.*

[3] J. König : *loc. cit.*, chap. II et IX. On trouvera des indications bibliographiques et des remarques intéressantes dans le livre de G. Hessenberg : *Grundbegriffe der Mengenlehre* ; dans le t. II de l'ouvrage de K. Schoenflies : *Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten* ; et dans les mémoires de Zermelo.

Un ensemble E est de seconde sorte s'il contient un élément qui ne diffère pas de E.

Il résulte de cette définition qu'un ensemble de deuxième sorte contient toujours parmi ses éléments un ensemble de deuxième sorte. D'où ce *lemme* :

Un ensemble d'ensembles de *première sorte* est également un ensemble de *première sorte*.

Envisageons maintenant, avec Russell, l'ensemble R de *tous* les ensembles de *première sorte*.

Il est facile de montrer que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait, il devrait être, en vertu du lemme précédent, de première sorte, c'est-à-dire différent de chacun de ses éléments ; d'autre part, l'ensemble R doit contenir *tous* les ensembles de première sorte, donc, en particulier, l'ensemble R lui-même, — résultat absurde.

Par conséquent, les conditions exprimées par les mots *première sorte* et *tous* sont incompatibles, et l'ensemble R n'existe pas.

Tel est l'exemple remarquable donné par Russell, et il prouve bien, comme je l'ai rappelé dans l'introduction, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister bien que ces individus existent [1].

2. — Nous allons maintenant donner à l'exemple de Russell une forme légèrement différente.

Faisons remarquer d'abord que la seule propriété des éléments qui intervienne dans cet exemple est leur composition. Un élément est-il un ensemble ou non (par définition) ? et s'il l'est, de quelle manière se compose-t-il ? Ses éléments sont-ils à leur tour décomposables ou non ?... et ainsi de suite. Voilà ce qui est seul important de savoir.

Pour préciser, j'introduirai une notion qui nous sera très utile dans la suite.

Soient deux ensembles E et E'. Je dirai qu'ils sont *isomorphes* si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Les ensembles E et E' sont équivalents ; en d'autres

---

[1] On sait que l'exemple de Burali-Forti, que nous allons examiner plus loin, a été donné avant celui de Russell.

termes, une correspondance parfaite peut être établie entre les éléments de E et ceux de E′.

b) Cette correspondance peut être établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable e de E corresponde un élément indécomposable e' de E′, et réciproquement ; et qu'à tout élément-ensemble F de E corresponde un élément-ensemble équivalent F′ de E′, la correspondance parfaite entre les éléments de F et F′ pouvant être à son tour établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable de F corresponde un élément indécomposable de F′, et à tout élément-ensemble de F un élément-ensemble équivalent de F′, — et ainsi de suite.

Si donc deux ensembles sont isomorphes, les éléments correspondants le sont aussi, et réciproquement.

Sont isomorphes, par exemple, les deux ensembles $(e_1, e_2, \ldots, e_m, \mathrm{F})$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m, \mathrm{F}')$[1], où les e et les e' sont des éléments indécomposables, et les F, F′ des ensembles contenant chacun un même nombre d'éléments indécomposables.

Nous dirons qu'un ensemble E est de première sorte s'il n'est isomorphe à aucun de ses éléments ; nous dirons qu'il est de deuxième sorte s'il est isomorphe à l'un au moins de ses éléments. Est, par exemple, de deuxième sorte l'ensemble $\mathrm{E} = (e, \mathrm{E}')$, où $\mathrm{E}' = (e', \mathrm{E}'')$, $\mathrm{E}'' = (e'', \mathrm{E}''')$, et en général $\mathrm{E}^{(n)} = (e^{(n)}, \mathrm{E}^{(n+1)})$ pour tout n, les e désignant des éléments indécomposables.

La définition que nous venons de donner n'est pas identique à celle du paragraphe précédent, mais les propriétés essentielles des ensembles de première et de deuxième sorte subsistent, et le lemme reste vrai.

Revenons maintenant à l'antinomie de Russell. Envisageons l'ensemble R′ de tous les ensembles de première sorte, au sens nouveau. On démontre comme dans le paragraphe précédent, que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait,

---

[1] Dans ce travail, je désigne un ensemble dont les éléments sont $a, b, c, \ldots$ par $(a, b, c, \ldots)$, et cela quels que soient ces éléments ; par exemple, une parenthèse de la forme (E, F), où E, F sont des ensembles, représente l'ensemble dont les éléments sont E et F, et non l'ensemble-somme formé par la réunion des ensembles E et F.

il serait, en vertu de notre lemme, de première sorte, et, d'autre part, il devrait être isomorphe à l'un de ses éléments, résultat absurde.

La forme nouvelle sous laquelle nous venons de mettre l'exemple de Russell ne se prête pas bien, comme nous le verrons dans la suite, à un rapprochement avec l'exemple de Burali-Forti. Pour y arriver, une transformation nouvelle est nécessaire. Je vais la donner dans le paragraphe suivant.

3. — Je commencerai par introduire une notion dont nous nous servirons souvent.

Soient E un ensemble, E′ un de ses éléments, E″ un élément quelconque de E′, et ainsi de suite. J'appelle *descente* la suite des passages de E à E′, de E′ à E″, etc. Cette descente prend fin lorsqu'on tombe sur un élément indécomposable. Dans ce cas elle est finie, mais elle peut ne pas l'être, ce qui arrive par exemple pour tout ensemble de deuxième sorte E, lorsqu'on passe de cet ensemble E à l'élément E′ qui lui est isomorphe, de E′ à son isomorphe E″, et ainsi de suite.

Je dirai qu'un ensemble est *ordinaire* lorsqu'il ne donne lieu qu'à des descentes finies ; je dirai qu'il est *extraordinaire* lorsque parmi ses descentes il y en a qui sont infinies.

Tout ensemble de deuxième sorte est donc un ensemble extraordinaire, mais ces deux notions (d'ensemble de deuxième sorte et d'ensemble extraordinaire) ne sont pas équivalentes, puisqu'une descente infinie peut se présenter aussi dans un ensemble de première sorte.

Soit, par exemple, l'ensemble $E = (e_1, E')$, où E′ est un ensemble de la forme (e_1, e_2, E''), $E'' = (e_1, e_2, e_3, E''')$, et, en général, $E^{(n)} = (e_{n+1}, e_1, e_2, E^{(n+1)})$ pour tout n. L'ensemble E ainsi défini est de première sorte, bien que la descente $E, E', \ldots E^{(n)} \ldots$ soit infinie.

Appelons *longueur* d'une descente (dans un ensemble ordinaire) le nombre des passages qui la constituent. A toute descente correspond ainsi un nombre entier n déterminé, mais cette correspondance n'est pas biunivoque en général, et les nombres n bien que finis, ne sont pas nécessairement bornés dans leur ensemble.

Les propriétés des ensembles de première sorte dont nous

avons fait usage dans le paragraphe précédent subsistent pour les ensembles ordinaires ; notre lemme reste vrai et s'énonce de la manière suivante :

Un ensemble d'ensembles ordinaires est un ensemble ordinaire.

Envisageons maintenant l'ensemble V de *tous* les ensembles *ordinaires* existants. On démontre, comme dans les paragraphes 1 et 2, que l'ensemble V ne saurait exister.

Introduisons à présent une restriction.

Soit E un ensemble ordinaire. Par définition, toutes les descentes de E sont finies et aboutissent à des éléments indécomposables qui, bien entendu, ne sont pas en général des éléments de E. Pour éviter la confusion, je les appellerai *noyaux* de E.

Envisageons les ensembles ordinaires dont les noyaux $e, f, g, \ldots$ font partie d'un ensemble existant donné $N = (e, f, g, \ldots)$. Soit V′ l'ensemble de tous ces ensembles. On démontre immédiatement que cet ensemble, qui est un sous-ensemble de V n'existe pas non plus.

En particulier, l'ensemble de tous les ensembles ordinaires à un seul noyau e n'existe pas. Dans le paragraphe 7 nous serons amené à définir des ensembles à un noyau d'une forme particulière.

En partant des ensembles déjà introduits, on peut définir des ensembles non-existants d'une nature différente.

Soit, par exemple, E un ensemble de première sorte au sens nouveau, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les ensembles isomorphes à E. A tout E correspond un $\mathcal{E}$, et si un ensemble E′ est non-isomorphe à E, l'ensemble correspondant $\mathcal{E}'$ est différent de $\mathcal{E}$. Prenons dans chacun des ensembles $\mathcal{E}$ un représentant quelconque E_0. L'ensemble de tous ces E_0, qui est un sous-ensemble de R′, n'existe pas. Des sous-ensembles analogues peuvent être définis en partant des ensembles V et V′.

Dans les paragraphes suivants, j'aurai à m'appuyer sur une propriété des ensembles existants qui est loin d'être évidente, mais que je regarderai comme vraie, du moins pour les ensembles que j'envisage dans ce travail.

Propriété I. — L'existence d'un ensemble entraîne celle de tous ses sous-ensembles[1].

En vertu de cette propriété, il suffit de montrer que V′ n'existe pas pour en conclure immédiatement qu'il doit en être de même des ensembles V, R′ et R.

Antinomie de Burali-Forti.

4. — Burali-Forti arrive, comme on le sait, à l'antinomie qui porte son nom[2] par la considération des types d'ordre d'ensembles bien ordonnés (nombres ordinaux de Cantor). Je rappelle que ces nombres se succèdent suivant une loi déterminée, et forment une sorte de chaîne dont les premiers chaînons sont les suites finies de 1 (suite ou ensemble impropre), 2,... n,... éléments, puis la suite ω, et les types d'ordre $\omega + 1$, $\omega + 2$,... $\omega + n$, etc.

Les propriétés des ensembles bien ordonnés sont très bien connues. Je me bornerai à en rappeler les deux suivantes qui nous seront particulièrement utiles :

a) Tout ensemble bien ordonné infini est semblable à l'ensemble de tous ses segments. Cette propriété est encore vraie pour les ensembles finis et, par conséquent, pour tous les ensembles bien ordonnés, si l'on adjoint à l'ensemble des segments un segment fictif dont le type d'ordre est 0, par définition. Je le désignerai par la lettre e. Il en résulte que tout nombre ordinal π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$, y compris 0.

b) Un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments.

Ceci rappelé, envisageons avec Burali-Forti l'ensemble W de tous les nombres ordinaux de Cantor.

L'ensemble W ainsi défini n'existe pas. En effet, si W existait, il serait bien ordonné et aurait un type d'ordre π (cf. introduction) ; or, tout nombre π est un élément de W, et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$ est un segment

---

[1] Cf. J. König : *loc. cit.*, chap. VI, § 16.

[2] Burali-Forti : *Una questione sui numeri transfiniti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 11 (1897), p. 154.

de W. L'ensemble de Burali-Forti serait donc, en vertu de (*a*), semblable à l'un de ses segments ; conclusion absurde, en vertu de (*b*).

Telle est l'antinomie de Burali-Forti, la plus ancienne et peut-être la plus importante des antinomies cantoriennes connues.

Il semblerait à première vue qu'on s'appuie implicitement, dans l'antinomie de Burali-Forti, sur le postulat suivant : tous les nombres ordinaux de Cantor existent. En réalité, l'antinomie signalée par Burali-Forti est indépendante de ce postulat ; pour s'en assurer, il suffit d'envisager l'ensemble de tous les nombres ordinaux *existants*. En effet, si un nombre ordinal π existe, il en est de même, en vertu de la propriété I, de tous les nombres ordinaux $\alpha < \pi$, et, par conséquent, tout nombre existant π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux *existants* inférieurs à π. Le raisonnement de Burali-Forti s'applique sans modification, et l'on retombe sur la même antinomie qu'auparavant. Nous désignerons par W l'ensemble de tous les nombres ordinaux existants.

Je ferai remarquer que l'antinomie de Burali-Forti ne dépend que des relations d'ordre de W. Or les relations d'ordre d'un ensemble sont transmises à tout ensemble équivalent. D'où cette propriété.

Propriété II. — Un ensemble n'existe pas, s'il est équivalent à l'ensemble W de Burali-Forti.

Et, d'une manière plus générale (en vertu de la propriété I) : Un ensemble n'existe pas s'il contient un sous-ensemble équivalent à W.

Je vais maintenant donner une forme un peu différente à l'exemple de Burali-Forti que je viens de rappeler.

5. — Soit E un ensemble bien ordonné quelconque, et E′ l'ensemble de tous ses segments, y compris le segment *e* (voir le paragraphe précédent). En vertu de la propriété (*a*), E′ est semblable à E. Remplaçons les segments dont se compose E′ par les ensembles des segments de ces segments, et appliquons une transformation analogue aux segments introduits de cette manière, et ainsi de suite. A chaque

ensemble bien ordonné E correspond ainsi un ensemble d'une forme particulière que j'appellerai ensemble S (lettre initiale du mot segment, pour rappeler le rôle joué par les segments dans cette transformation).

Le segment fictif e subsiste seul après cette transformation. On voit qu'un même ensemble S correspond à tous les ensembles bien ordonnés du même type d'ordre α. Je le désignerai par α_s, et je dirai que le nombre ordinal α est le *rang* de l'ensemble α_s.

Par exemple les ensembles S qui dérivent des ensembles bien ordonnés des types 1, 2 et 3 s'écrivent

$$(e);\ (e,\ (e));\ (e,\ (e),\ (e,\ (e))).$$

L'élément e sera considéré comme indécomposable.

Il résulte de la définition précédente que les éléments d'un ensemble S sont également des *ensembles* S.

Je dis maintenant que tout ensemble S est un ensemble ordinaire à un seul noyau e. En effet, dans les descentes auxquelles donne lieu un ensemble S, on parcourt une suite de segments s'emboîtant les uns dans les autres, et l'on sait que les suites de ce genre sont toujours finies.

Toute descente prend nécessairement fin et aboutit à l'élément e.

Les ensembles S sont donc bien des ensembles ordinaires. Il en résulte entre autres qu'un ensemble S ne saurait être isomorphe à l'un de ses éléments.

Soient maintenant deux ensembles bien ordonnés quelconques, E et F, et soient E_s, F_s les ensembles S correspondants. Deux cas sont possibles : ou bien les ensembles E et F sont semblables, ou bien l'un d'eux (par exemple E) est semblable à un segment de l'autre (ensemble F).

Nous avons vu que dans le premier cas $E_s = F_s$; dans le deuxième cas, E_s est isomorphe et même égal à un élément F_s.

Ceci établi, revenons à l'antinomie de Burali-Forti. Soit W′ l'ensemble de tous les α_s existants. Je dis que l'ensemble W′ n'existe pas.

Première hypothèse : A tout nombre existant α correspond

un ensemble existant α_s. L'ensemble W′ est alors équivalent à W ; il n'existe pas, en vertu de la propriété II.

Deuxième hypothèse : L'existence d'un nombre α n'entraîne pas nécessairement celle de l'ensemble α_s. Soit alors π le plus petit nombre tel que π_s n'existe pas. Aucun α_s n'existe pour $\alpha > \pi$, car l'existence d'un ensemble α_s pour $\alpha > \pi$ entraînerait celle de π_s, qui est un élément de α_s ; par conséquent, W′ est l'ensemble des α_s de rangs inférieurs à π; donc $W' = \pi_s$. W′ n'existe pas, puisque π_s n'existe pas.

Il est facile maintenant de rapprocher l'exemple de Burali-Forti de celui de Russell. En effet, l'ensemble R est relié à W par l'intermédiaire des ensembles R′, V, V′ et W′. Or l'ensemble R′ est un sous-ensemble de R ; l'ensemble V, un sous-ensemble de R′; tout ensemble V′, un sous-ensemble de V ; et, enfin, l'ensemble W′, un sous-ensemble d'un V′. Les ensembles R, R′,... W′ forment donc une suite d'ensembles s'emboîtant les uns dans les autres. Il en résulte qu'il suffit de montrer que l'ensemble de Burali-Forti n'existe pas pour en conclure qu'il doit en être de même de chacun des ensembles R, R′,... W′. Cela est vrai, comme nous l'avons vu, de l'ensemble W′, et, en vertu de la propriété I, cela est vrai encore de chacun des ensembles R, R′, V et V′. Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer à ces ensembles le raisonnement de Russell ; chacun des résultats partiels que nous avons obtenus d'une manière directe peut être considéré comme une conséquence de l'antinomie de Burali-Forti.

6. — Je ferai remarquer encore qu'on peut définir les ensembles S sans passer par l'intermédiaire des ensembles bien ordonnés. Soit E un ensemble S. Nous avons vu que :

1. L'ensemble E est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).
2. Si x et y sont deux éléments quelconques de E, l'un d'eux est un élément de l'autre.

En outre :

3. Si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E.

Ces propriétés sont caractéristiques des ensembles S, et peuvent servir à les définir. On démontre immédiatement

que les ensembles E ainsi définis sont bien les ensembles S du paragraphe précédent. A tout ensemble E correspond un type d'ordre déterminé, et l'ensemble de tous les ensembles E ne diffère pas de l'ensemble W'.

Solution du problème fondamental dans le cas d'ensembles ordinaires.

7. — L'étude des différentes antinomies que nous avons rencontrées jusqu'ici a mis en évidence les faits suivants : dans chacun de nos exemples, il est possible de former des ensembles de plus en plus vastes, mais l'ensemble de *tous* les individus n'existe pas ; quel que soit l'ensemble qu'on envisage (pourvu qu'il existe), des individus nouveaux surgissent, et un ensemble plus vaste apparaît nécessairement ; on est bien en présence d'une extension indéfinie qui ne comporte pas d'arrêt ou borne. En traitant le problème fondamental, je serai amené à préciser cette notion un peu vague de borne et d'absence de borne.

Rappelons à ce propos qu'on trouve dans les ouvrages cités au commencement de ce travail une analyse logique et psychologique approfondie des antinomies cantoriennes et de la notion d'ensemble ; je n'en aurai pas besoin pour le but que j'ai en vue.

Nous supposerons que les ensembles ordinaires E que nous aurons à envisager dans l'étude du problème fondamental vérifient les deux conditions suivantes :

Condition (a). — Les éléments de E sont distincts ; il en est de même des éléments de chacun de ces éléments, et ainsi de suite. Par cette condition je n'écarte pas les ensembles E qui ont des éléments isomorphes ni ceux dont les éléments-ensembles contiennent des éléments isomorphes, etc. L'identité seule est exclue.

Condition (b). — Les noyaux $e, f, g, \ldots$ de tout ensemble E font partie d'un ensemble $N = (e, f, g, \ldots)$ que nous considérerons comme donné ou connu (cf. paragraphe 3).

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour

qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts, vérifiant les conditions (*a*) et (*b*), existe ?

Je partirai des trois postulats suivants :

Postulat 1. — Si un ensemble d'ensembles ordinaires existe, il en est de même de l'ensemble de tous ses sous-ensembles distincts (Potenzmenge).

Postulat 2. — Si un ensemble (E, F,...), où les éléments E, F,... sont des ensembles ordinaires, existe, il en est de même de la somme des ensembles E, F,... (Vereinigungsmenge)[1].

Postulat 3. — Si un ensemble (a, b, c, ...) existe, il en est de même de tout ensemble équivalent (E, F, G,...), où E, F,... sont des ensembles ordinaires existants.

Commençons l'étude du problème fondamental par le cas particulièrement simple d'ensembles S.

Nous avons appelé *rang* d'un ensemble α_s son type d'ordre α. Je dis qu'en vertu du postulat 3, à tout nombre ordinal existant α correspond un ensemble *existant* α_s ; la deuxième hypothèse du paragraphe 5 doit donc être rejetée. En effet, un α_s est l'ensemble de tous les ensembles S de rangs inférieurs à α. Soit π le plus petit nombre existant tel que π_s n'existe pas ; tous les éléments de π_s existent ; d'autre part, π_s est équivalent à un ensemble bien ordonné existant ; il devrait donc exister, en vertu du postulat 3, contrairement à notre supposition.

Il en résulte que l'ensemble W′ de tous les α_s est équivalent à l'ensemble W de Burali-Forti.

Je dirai que les ensembles S ou leurs rangs ont une borne cantorienne s'il existe un nombre ordinal supérieur au rang de chacun de ses ensembles. Dans le cas contraire, les ensembles S envisagés n'ont pas de borne cantorienne. On a alors le critère suivant : pour qu'un ensemble d'ensembles S non-isomorphes existe, il faut et il suffit que ces ensembles aient une borne cantorienne.

Supposons d'abord que les ensembles S envisagés n'aient pas de borne cantorienne. Je dis que l'ensemble de ces

[1] J. König : *loc. cit.* chap. VI, par. 16.

ensembles, que je désignerai par $\mathcal{E}$ ne saurait exister. Supposons le contraire, et soit π_s l'un des ensembles S envisagés. J'appelle A (π) l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ dont les rangs sont inférieurs à π, et par B (π) l'ensemble des ensembles S dont les rangs sont supérieurs à ceux des éléments de A, mais ne dépassent pas π. L'ensemble B (π) qui ne contient qu'un seul élément de $\mathcal{E}$ (l'ensemble π_s) est un sous-ensemble de $(\pi + 1)_s$; il existe donc, en vertu de la propriété I.

A tout élément π_s de $\mathcal{E}$ correspond un ensemble déterminé B (π).

Si l'ensemble $\mathcal{E}$ existait, il en serait de même, en vertu des postulats 3 et 2, de la somme des ensembles B (π) étendue à tous les éléments π_s de $\mathcal{E}$; mais ce dernier ensemble n'est autre que l'ensemble W', et nous savons que W' n'existe pas ; donc l'ensemble $\mathcal{E}$ n'existe pas non plus.

La première partie de notre critère est établie.

Supposons maintenant que les ensembles S envisagés ont une borne cantorienne. Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous ces ensembles existe. Soit, en effet, π_s un ensemble S dont le rang soit supérieur aux rangs de nos ensembles ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de π_s; il existe donc, en vertu de la propriété I.

Notre critère est établi.

Avant de passer à l'étude du cas général, je ferai quelques remarques pour préciser le problème.

8. — Faisons remarquer d'abord que le critère du paragraphe précédent reste vrai si, au lieu des ensembles S, on envisage les nombres ordinaux de Cantor.

Soit maintenant $\mathcal{E} = (E_\alpha, E_\beta, \ldots)$ un ensemble quelconque équivalent à un ensemble de nombres ordinaux $\alpha, \beta, \ldots$ Si les nombres $\alpha, \beta, \ldots$ n'ont pas de borne cantorienne, l'ensemble $(\alpha_s, \beta_s, \ldots)$ n'existe pas. Par conséquent, $\mathcal{E}$ ne saurait exister, en vertu du postulat 3, car son existence entraînerait celle de $(\alpha_s, \beta_s, \ldots)$; d'où ce lemme :

Lemme. — Un ensemble $(E_\alpha, E_\beta, \ldots)$ n'existe pas, si les nombres $\alpha, \beta, \ldots$ n'ont pas de borne cantorienne. Il en est de même, en vertu de la propriété I, de tout ensemble qui contient un sous-ensemble de cette nature.

Nous pouvons maintenant étendre la notion de rang au cas d'un ensemble ordinaire quelconque (existant).

Définition (r). — Le rang d'un ensemble ordinaire est le plus petit nombre ordinal supérieur aux rangs de ses éléments. Le rang d'un noyau est zéro.

Cette définition fournit un rang déterminé à tout ensemble ordinaire E. Supposons en effet que chacun des éléments de E ait un rang déterminé, en vertu de (r) ; je dis qu'il devra en être de même de l'ensemble E, puisque les rangs des éléments de E ont une borne cantorienne, en vertu du dernier lemme. Si donc E n'avait pas de rang déterminé, il existerait au moins un élément E′ de E ayant la même propriété ; de même E′ contiendrait au moins un élément E″ n'ayant pas de rang déterminé, et ainsi de suite, — résultat absurde, puisque toute descente telle que E, E′, E″,... aboutit à un noyau dont le rang est zéro. Tout ensemble E a donc un rang déterminé, en vertu de (r).

9. — On a alors le critère suivant :

Pour qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts vérifiant les conditions (a) et (b) existe, il faut et il suffit que les rangs de ces ensembles aient une borne cantorienne.

Je vais d'abord démontrer un lemme.

Lemme. — L'ensemble O_α de tous les ensembles ordinaires distincts de rang α vérifiant les conditions (a) et (b) existe, quel que soit le nombre ordinal α.

Pour démontrer ce lemme, je me servirai d'un raisonnement que j'ai déjà employé dans le paragraphe précédent, et qui n'est qu'un transformé du principe d'induction complète.

Supposons que le lemme soit vrai pour tous les α inférieurs à un nombre π. Je dis qu'il sera vrai pour π.

Soit, en effet, Σ la somme des ensembles O_α, pour tous les $\alpha < \pi$. Cet ensemble existe, en vertu des postulats 3 et 2. Or, l'ensemble O_π, est un ensemble de sous-ensembles de Σ; il existe donc, en vertu du postulat 1.

Le lemme s'en déduit immédiatement. En effet, si un ensemble O_α n'existait pas, il en serait de même d'une suite d'ensembles $O_{\alpha'}$, $O_{\alpha''}$,..., où $\alpha > \alpha' > \alpha''$..., résultat absurde, cette suite devant aboutir à l'ensemble O_0, c'est-à-dire à

l'ensemble N qui existe par hypothèse. Donc O_α existe, quel que soit α, C. Q. F. D.

Revenons maintenant à notre critère, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ensembles ordinaires envisagés E.

Supposons d'abord que les rangs des ensembles E n'aient pas de borne cantorienne. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'existe pas, en vertu du lemme du paragraphe 8.

Supposons maintenant que les rangs des ensembles E ont une borne cantorienne, et soit π un nombre ordinal supérieur à tous ces rangs. Envisageons l'ensemble Σ, somme des O_α relatifs à tous les $\alpha < \pi$. Cet ensemble existe, en vertu du dernier lemme et des postulats 3 et 2. Mais l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de Σ. Il existe donc en vertu de la propriété I.

Notre critère est démontré.

Tels sont les principaux résultats que je voulais établir dans ce travail.

En résumé, dans les paragraphes consacrés aux antinomies de Russell et de Burali-Forti, je me suis attaché surtout à décrire et à coordonner d'une manière nouvelle des faits en partie connus. J'ai passé ensuite au problème fondamental dont j'ai donné une solution dans le cas d'ensembles ordinaires, en m'appuyant d'une part sur l'antinomie de Burali-Forti et, d'autre part, sur plusieurs postulats. Bien que ces postulats soient fréquemment employés dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles, ils sont loin d'être évidents, et auraient besoin d'être examinés de près et discutés.

J'aurai l'occasion de revenir sur ces questions dans un autre travail que je consacrerai aux antinomies cantoriennes et à la théorie de J. König [1].

Genève, mai-septembre 1916.

---

[1] Il m'a été impossible, à mon grand regret, de prendre connaissance des publications parues depuis le commencement de la guerre.