Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: problème des arithmodistances pour un arithmotriangle donné.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17324

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle donné.

91. — Les côtés d'un triangle étant mesurés rationnellement, s'il existe dans le plan du triangle un seul point dont les trois distances aux côtés soient rationnelles, ce triangle est de toute nécessité un arithmotriangle héronien.

Si, conformément aux conclusions du paragraphe 20, l'arithmotriangle héronien est défini par trois arithmodirigées quelconques du plan, tout arithmopoint du plan est alors à des distances rationnelles des côtés du triangle.

Voilà donc un problème d'arithmogéométrie simplement et complètement résolu. Il y a lieu de se poser d'une manière analogue le problème suivant que j'appellerai par la suite *problème des arithmodistances pour un arithmotriangle :*

Etant donné un arithmotriangle quelconque, c'est-à-dire un triangle à côtés commensurables, déterminer les points de son plan qui sont situés à des distances rationnelles de ses trois sommets.

92. — Le quadrilatère rationnel. — Ce problème important doit être rattaché au problème du *quadrilatère rationnel*, c'est-à-dire du quadrilatère à côtés et à diagonales commensurables. Dans le cas actuel, trois sommets du quadrilatère rationnel sont imposés.

Le premier quadrilatère rationnel considéré fut celui de *Brahmagupta* (paragraphe 30) ; ce quadrilatère rationnel est inscriptible dans un cercle.

L'étude du quadrilatère rationnel le plus général semble avoir été faite pour la première fois en 1848, par E.-E. Kummer[1] qui a démontré que :

Dans tout quadrilatère à côtés et à diagonales rationnels les diagonales se coupent en parties rationnelles.

Ce résultat essentiel pour la théorie des quadrilatères ra-

---

[1] E.-E. Kummer. Ueber die Vierecke deren Seiten und Diagonalen rational sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 37e B., 1848, S. 1-20.

tionnels avait d'ailleurs été déjà signalé par L.-N.-M. CARNOT[1] dès 1803 ; le géomètre français forme les expressions des segments des diagonales et il insiste sur le fait que chacun des quatre segments des diagonales s'obtient par une équation du premier degré. Il en est de même, ajoute Carnot, des segments formés sur les côtés par les prolongements d'autres côtés.

La théorie des quadrilatères rationnels, fondée sur le théorème précédent, a été ramenée par KUMMER à l'étude d'une équation

$$\left[\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2\right]^2 + 4k^2\gamma^2 x^2 = \square ,$$

dans laquelle α, γ, c, k sont des constantes, et par suite aux fonctions elliptiques, comme application d'un mémoire de JACOBI[2] sur les équations

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = \square .$$

93. — Ces résultats relatifs aux quadrilatères rationnels rappelés, je reprends l'étude du problème des arithmodistances aux sommets d'un quadrilatère et vais réduire ce problème aux fonctions elliptiques par une voie plus géométrique.

Si a, b et c sont les côtés de l'arithmotriangle ABC et si x, y et z sont les distances aux trois sommets respectifs A, B et C d'un point M quelconque du plan, ces six longueurs sont liées par la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & x^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & z^2 \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou encore après développement du déterminant :

$$\begin{gathered} a^2(x^2 - y^2)(x^2 - z^2) + b^2(y^2 - z^2)(y^2 - x^2) + c^2(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) \\ + a^2(a^2 - b^2 - c^2)x^2 + b^2(b^2 - c^2 - a^2)y^2 + c^2(c^2 - a^2 - b^2)z^2 \\ + a^2b^2c^2 = 0 . \end{gathered}$$

---

[1] *Géométrie de position*, Paris, 1803, p. 391-393 (non citée par KUMMER).

[2] JACOBI. De usu theoriæ integralium ellipticorum et abelianorum in Analysi Diophantea, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13e B, 1835, S. 353-355.

Cette condition, nécessaire et suffisante pour que quatre points dont les distances mutuelles sont données, soient situés dans un même plan[1], montre que le problème posé est *équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface du quatrième degré.*

Avant de pousser plus loin l'étude du problème dans toute sa généralité, il convient de mettre en évidence les solutions particulières dont la connaissance sera ensuite précieuse, puisqu'elle assurera aux biquadratiques gauches génératrices de cette surface l'existence d'arithmopoints particuliers.

94. — Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle quelconque admet une infinité de solutions particulières qu'il est possible de déterminer simplement. *Ce problème est, en effet, résoluble dans le cas le plus général sur le périmètre du triangle.*

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC et un point M de l'un des côtés, BC par exemple, situé à des distances rationnelles

$$\mathrm{BM} = \lambda \ ,$$
$$\mathrm{CM} = \lambda - a \ ,$$

des sommets; λ étant un nombre algébrique quelconque, tous les cas possibles de figure correspondent à ces formules. Le point M sera une solution particulière du problème des arithmodistances si sa distance au point A est rationnelle; celle-ci est fournie par la relation de Stewart :

$$c^2 . \mathrm{MC} + b^2 . \mathrm{BM} - a . \overline{\mathrm{AM}}^2 = a . \mathrm{BM} . \mathrm{CM}$$

qui se traduit algébriquement par l'équation

$$b^2\lambda + c^2(a - \lambda) - a\lambda(a - \lambda) = a . \overline{\mathrm{AM}}^2 \ ,$$

c'est-à-dire une équation de Brahmagupta-Fermat du second degré :

$$c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{a}\lambda + \lambda^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 \ .$$

---

[1] Cette relation doit être connue depuis fort longtemps. Elle est formée dans la *Géométrie de position* de CARNOT (1803, p 387-389), rappelée par FÖRSTEMANN (Umkehrung des Ptolomäischen Satzes, *Journal de Crelle*, 13e tome, 1835, p. 233-236) d'après l'édition allemande de SCHUMACKER de l'ouvrage précédent et formée encore par SALMON (*Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 1882, p. 50-51).

Elle admet trois solutions $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$ (point B), $\lambda = a$ (point C) connues *a priori;* elle est donc résoluble et sa solution générale en fonction d'un paramètre est :

$$\lambda = \frac{c^2 - t^2}{\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{a} + 2t} .$$

95. — *Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle quelconque est de même toujours résoluble sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.*

Soient, en effet, x, y et z les distances d'un point M de cette circonférence aux sommets ABC de l'arithmotriangle. Les deux théorèmes de Ptolémée relatifs au quadrilatère inscriptible ABCM se traduisent par les relations

$$cz = ax + by ,$$
$$\frac{c}{z} = \frac{bx + ay}{xy + ab} ;$$

par multiplication membre à membre de ces deux relations, on obtient

$$c^2 = \frac{(ax + by)(bx + ay)}{xy + ab} ,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} xy + z^2 = c^2 ,$$

ou encore

$$x^2 + 2\cos A . xy + y^2 = c^2 .$$

Si x et y sont regardées comme des coordonnées ordinaires, cette dernière équation est celle d'une ellipse passant par un certain nombre d'arithmopoints simples : $(x = \pm c,\ y = 0)$, $x = 0,\ y = \pm c)$, $(x = \pm a,\ y = \mp b)$, $(x = \pm b,\ y = \mp a)$. Il en résulte que cette ellipse est une arithmoconique et que, par suite, x et y peuvent être exprimés rationnellement en fonction d'un paramètre rationnel arbitraire ; la formule

$$cz = ax + by$$

donne ensuite la troisième distance. Telle est la solution simple et complète du problème sur la circonférence circonscrite.

96. — Les résultats qui précèdent sont d'ailleurs liés entre eux d'une manière très simple. Soit tout d'abord une solution D du problème des arithmodistances sur la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les segments AB, BC, CA, AD, BD, CD sont, par définition, mesurés par des nombres rationnels. Si E est alors le point de concours des diagonales, AD et BC pour fixer les idées, du quadrilatère inscriptible ABCD, les divers triangles semblables de la figure fournissent des relations qui permettent d'évaluer très simplement les segments de diagonales et de vérifier, pour ce quadrilatère inscriptible, le théorème de Carnot-Kummer. De toute solution du problème des arithmodistances sur la circonférence inscrite au triangle, les alignements avec les sommets A, B et C permettent donc de déduire trois nouvelles solutions situées sur le périmètre du triangle.

Réciproquement d'ailleurs, les mêmes relations simples prouvent que, d'une solution E située sur le périmètre du triangle, il est possible, par alignement avec l'un des sommets, d'en déduire une autre solution D située sur la circonférence circonscrite.

97. — A quels points de la surface du quatrième degré correspondent les solutions particulières dont il vient d'être question ?

Soit tout d'abord une solution sur le côté BC. Les coordonnées x, y, z satisfont alors à l'une des équations

$$\pm y \pm z = a ,$$

correspondant aux trois segments formés par les points B et C sur la droite illimitée qui porte le côté BC et à l'équation qui traduit le théorème de Stewart ; cette dernière est du second degré en x, y et z. Il en résulte qu'aux côtés du triangle correspondent trois coniques de la surface du quatrième ordre et les coniques symétriques de celles-ci par rapport aux plans coordonnés.

Ce sont des arithmoconiques d'après le résultat du paragraphe 95. Il en est de même des courbes qui correspondent aux trois arcs AB, BC et CA de la circonférence circonscrite, d'après les relations qui traduisent les deux théorèmes de Ptolémée.

La solution du problème général des arithmodistances aux sommets d'un arithmotriangle résulte alors des considérations qui précèdent. Soit, en effet, une droite issue d'un sommet, A par exemple, et contenant les deux solutions particulières mais dépendant d'un paramètre arbitraire, D sur le cercle circonscrit et E sur le côté BC. Sur cette droite ADE le problème des arithmodistances s'exprime par les deux équations :

$$\begin{cases} y^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \beta , \\ z^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \gamma , \end{cases}$$

β et γ étant les angles de la droite ADE avec les deux côtés partant du sommet A ; les cosinus de ces angles sont rationnels puisque les côtés des triangles ABE et ACE sont rationnels. Les deux équations qui précèdent représentent deux cylindres du second ordre et, par suite, sur la droite considérée ADE, le problème des arithmodistances aux sommets de ABC se rattache à l'étude d'une biquadratique gauche. Cette biquadratique gauche engendre évidemment la surface du quatrième degré, lorsque ADE pivote autour de A.

Sur la surface du quatrième degré attachée au problème des arithmodistances aux sommets d'un triangle, il existe donc une triple infinité (à un paramètre) de biquadratiques gauches. Chacune de ces biquadratiques gauches admet des arithmopoints connus, situés sur les arithmoconiques de la surface.

Arithmotriangles à médianes rationnelles.

98. — Arithmotriangles a médianes rationnelles. D'une manière générale, le centre de gravité de l'aire d'un arithmotriangle n'est pas une solution particulière du problème des arithmodistances attaché à ce triangle, car les médianes ne sont pas généralement mesurées rationnellement. Le difficile problème qui consiste à déterminer les triangles dont les côtés et les médianes sont rationnellement mesurés a été l'objet de toute une série de Mémoires de L. Euler :

a) *Solutio problematis de inveniendo triangulo in quo rectæ ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales*