arithmotriangles télémétriques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des tangentes aux sommets A, B, C du triangle de référence sont

$$\alpha = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}, \qquad \beta = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}, \qquad \gamma = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que QA, QB, QC soient normales à une même conique en A, B et C est donc

$$\alpha\beta\gamma = -1 ;$$

elle se traduit, par conséquent, par l'équation

$$(z + y\cos A)(x + z\cos B)(y + x\cos C)$$
$$= (y + z\cos A)(z + x\cos B)(x + y\cos C)$$

représentative de la seconde cubique d'E. Lucas.

Les arithmotriangles télémétriques.

65. — Le problème télémétrique conduit à la considération de triangles obtusangles particuliers ABC qui sont définis par la relation[1]

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0, \qquad \left(B > \frac{\pi}{2}\right).$$

J'appellerai triangles télémétriques les triangles de cette nature. Par exemple, les triangles d'angles

$$A = 30^\circ, \qquad B = 105^\circ, \qquad C = 45^\circ$$

qui peuvent être facilement construits à partir des triangles équilatéraux sont des triangles télémétriques particuliers.

Soient maintenant A′ B′ C′ les pieds des hauteurs d'un triangle télémétrique. Le triangle pédal A′ B′ C′ de ABC a pour angles

$$A' = 2A, \qquad B' = 2B - \pi, \qquad C' = 2C.$$

Il en résulte que la relation de définition d'un triangle télémétrique quelconque se traduit par une condition très sim-

[1] J.-E. Estienne, Note sur les télémètres, *Revue d'artillerie*, novembre 1904.
Jules Raibaud, Instruments d'optique, d'observation et de mesure, *Encyclopédie scientifique*, Paris, 1910, p. 321-322.

ple : *L'un des côtés du triangle pédal d'un triangle télémétrique est double d'un autre côté :*

$$A'B' = 2A'C' .$$

Cette relation très simple permet de résoudre graphiquement le problème télémétrique.

66. — Les arithmotriangles télémétriques héroniens. — Le problème qui consiste à rechercher les arithmotriangles télémétriques, c'est-à-dire ceux de ces triangles télémétriques qui sont à côtés rationnels se rattache à l'étude arithmogéométrique d'une quartique plane. La relation entre les côtés a, b, c d'un triangle télémétrique général se déduit immédiatement de la condition

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0 ;$$

c'est la relation homogène

$$(b^2 - c^2)(c^2 - 2b^2) + (c^2 + 2b^2)a^2 = 0 .$$

En posant donc

$$\frac{c}{a} = x , \qquad \frac{b}{a} = y ,$$

on réduit ainsi l'étude des arithmotriangles télémétriques à celle des arithmopoints de la quartique plane représentée par l'équation

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2 .$$

L'étude arithmogéométrique de cette quartique plane échappe aux procédés qui ont été développés dans les pages précédentes. Mais il est toutefois possible à l'occasion du problème de la détermination de ceux de ces arithmotriangles télémétriques qui sont aussi héroniens, d'établir la proposition négative suivante.

Le triangle pédal de tout arithmotriangle héronien est lui-même un arithmotriangle héronien. De sorte que l'*arithmotriangle télémétrique héronien le plus général a pour sommets le centre du cercle inscrit* I *et deux des centres* I_1 *et* I_3

des cercles exinscrits à l'arithmotriangle héronien A'B'C' *le plus général dont deux côtés soient entre eux dans le rapport* $\frac{1}{2}$:

$$A'B' = 2A'C' .$$

Reste à déterminer ceux-ci.

67. — Il s'agit donc de déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général A'B'C' tel que A'B' = 2 A'C'. De tels triangles se rencontrent à propos de l'équilibre *sur un plan incliné* d'un cercle vertical, dont le centre de gravité est au milieu d'un rayon [1].

En application de la règle du paragraphe 10, pour représenter un triangle héronien quelconque A'B'C', je dois poser

$$\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \frac{1 - y^2}{y + z}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B'}{2} = y, \qquad \operatorname{tg}\frac{C'}{2} = z,$$

y et z étant deux nombres rationnels assujettis à certaines inégalités. La condition

$$A'B' = 2A'C'$$

se traduit ici par

$$\sin C' = 2\sin B',$$

c'est-à-dire encore par l'équation

$$\frac{z}{1 + z^2} = 2\frac{y}{1 + y^2}.$$

Par conséquent *l'étude des arithmotriangles télémétriques héroniens* (ou encore celle des arithmotriangles héroniens dont deux côtés sont dans le rapport $\frac{1}{2}$) est *équivalente à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane* douée de quatre arithmopoints (l'origine et les arithmopoints à l'infini) mais ne possédant pas d'autre arithmopoint.

Cette propriété négative résulte de ce que l'équation du

[1] C. f. H. Brocard, *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 108-109. L'équation d'équilibre $\sin(\theta + \omega) = 2\sin\omega$, où ω est l'angle que fait le plan incliné avec l'horizon, a été rencontrée par le même géomètre dans des recherches bien différentes concernant une question de géométrie du triangle et un certain groupe de trois paraboles. *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 77-80, et *Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier*, Propriétés d'un groupe de trois paraboles, t. XL, 1885-1886, p. 51-58.

second degré en y ne peut admettre de racine rationnelle que si la quantité

$$\left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2 - 1$$

est un carré parfait. On est ainsi conduit à une équation

$$z^4 + z^2 + 1 = t^2$$

qui admet la seule solution banale $z = 0$ et dont l'impossibilité a été établie en 1777 par EULER [1]. *Il n'existe donc pas d'arithmotriangle télémétrique qui soit aussi un arithmotriangle héronien.*

68. — D'une manière générale, il convient d'observer que le problème qui consiste à déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général dont le rapport de deux côtés est imposé *a priori* se traduit par l'équation d'une cubique plane

$$\frac{z}{1+z^2} = n\frac{y}{1+y^2} .$$

Considérée comme une équation du second degré en z elle entraîne la condition

$$z^4 + 2(1-2k^2)z^2 + 1 = t^2 .$$

Le problème considéré est donc réductible à l'équation étudiée par EULER dans les mémoires cités plus haut.

On peut encore poser

$$\frac{z}{1+z^2} = n\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2\lambda} ;$$

la question est alors réduite à l'étude d'une biquadratique gauche représentée par le système d'équations :

$$\lambda^2 - 1 = \mu^2 , \qquad \lambda^2 n^2 - 1 = \nu^2 .$$

obtenues en écrivant que les deux équations quadratiques en z et en y

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0 ,$$
$$y^2 - 2\lambda n y + 1 = 0 ,$$

ont des racines rationnelles.

---

[1] L. EULERI, *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, t. 2. *De casibus, quibus hanc formulam* $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ *ad quadratum reducere licet* [avril 1777 et mai 1782] (pp. 183-189 et pp. 492-500).

A. GENOCCHI, Sur l'impossibilité de quelques équations doubles, *C. R.*, 1874, t. 78, pp. 433-435.

69. — Ici s'arrête l'article que je m'étais initialement proposé d'écrire sur les notions d'arithmogéométrie, la suite devant être consacrée à des compléments et à des considérations d'un tout autre ordre. Le but poursuivi était d'insister sur l'intérêt considérable qu'offrent les remarques géométriques dans toutes ces questions d'arithmologie. L'absence de remarques de cette nature dans presque toutes les études faites sur des problèmes spéciaux de la théorie des nombres est une lacune que j'ai souvent jugée regrettable. C'est pourquoi je me suis décidé à entreprendre cet examen, certainement très incomplet encore, de toute une série de questions arithmétiques susceptibles d'être interprétées géométriquement d'une manière intéressante.

Je me suis principalement efforcé de rester dans le domaine le plus élémentaire. C'est ainsi que j'ai systématiquement écarté les fonctions elliptiques, qui ne figurent point dans nos programmes d'enseignement secondaire. Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra d'ailleurs introduire la notion de fonctions elliptiques à l'occasion des propriétés arithmogéométriques des cubiques et des biquadratiques gauches, en suivant la voie tracée par J. Bertrand [1], par H. Léauté [2], par M. Picquet [3] et par H. Poincaré [4].

La plus grande partie du présent travail a été effectuée dans des conditions matérielles désastreuses, loin notamment de toute bibliothèque. Je n'aurais certainement pas eu la possibilité de le mener à bonne fin sans le concours précieux de MM. H. Brocard et A. Aubry, que j'ai souvent et toujours très utilement consultés.

Je me permets donc, dès maintenant, de leur adresser ici mes plus vifs remerciements.

(A suivre.)

---

[1] J. Bertrand, Traité de Calcul différentiel et intégral, t. II, p. 583.

H. Léauté, Etude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 46e cahier, 1879 (t. XXVIII, p. 67-99.

[3] Picquet, Application de la représentation des courbes du 3e degré à l'aide des fonctions elliptiques, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 54e année, 1884.

H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville*, 5e série, t. VII, 1901, pp. 161-233.