Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: Arithmogéométrie autour des cubiques de Lucas.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17321

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire n'est évidemment pas particulière aux systèmes d'équations quadratiques. Lorsqu'en effet les équations $\varphi = u^2$ et $\psi = v^2$ à étudier sont de degrés plus élevés, la méthode précédente conduit à deux équations algébriques en t; l'élimination de t permet alors de se ramener à l'étude d'une relation unique entre α, β, γ, δ, homogène par rapport à ces mêmes variables.

La réductibilité à l'étude d'une surface cubique de l'espace ordinaire du système des deux équations quadratiques $\varphi(x, y) = u^2$ et $\psi(x, y) = v^2$ étant acquise, il faut maintenant observer que les conclusions du § 36 peuvent en outre être appliquées à la nouvelle équation cubique. *La surface cubique obtenue est précisément douée de trois arithmopoints non-singuliers.* Ce sont les arithmopoints de coordonnées respectives

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = 0\,, \quad \delta \neq 0\,,$$
$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma \neq 0\,, \quad \delta = 0\,,$$
$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = u_0\,, \quad \delta = v_0\,,$$

c'est-à-dire deux des sommets du tétraèdre de référence et un troisième point de l'arête qui les joint. La connaissance d'un seul de ces arithmopoints suffit pour assurer et diriger par le procédé du § 36 la représentation rationnelle de la surface cubique au moyen de deux paramètres indépendants.

Dans ces conditions, la *connaissance d'une solution particulière du système d'équations quadratiques généralisées de Bhaskara entraîne la résolubilité du système; la solution dépend de deux paramètres.* Si la représentation trouvée de la surface cubique est propre, cette solution est la solution générale.

Arithmogéométrie autour des cubiques de Lucas.

58. — Pour un nombre assez considérable d'équations indéterminées ayant été l'objet de recherches spéciales, le groupement $x^2 + y^2 + z^2$ intervient dans la structure de ces équations. Il semble donc qu'il y ait intérêt — et effective-

ment il y a très souvent un réel intérêt — de rattacher une équation de cette espèce à l'étude d'une arithmosphère.

C'est ainsi que, pour une courbe sphérique, tracée sur une sphère de rayon pris pour unité, les coordonnées d'un point quelconque et leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport au paramètre qui repère le point courant de cette courbe sphérique sont liées par une identité due à E. CATALAN :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(xy'' - yx'')^2 + (yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2]$$
$$= (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + [x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')]^2 .$$

Cette identité donne une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) = U^2 + V^2 ;$$

on en conclut, par exemple [1],

$$(24^2 + 7^2 + 15^2)(30^2 + 36^2 + 23^2) = 375^2 + 1475^2 .$$

Mais en pareil cas il convient de ne pas se laisser fasciner par la présence du groupement $x^2 + y^2 + z^2$; il peut y avoir au contraire avantage à chercher des solutions arithmogéométriques n'ayant absolument aucun rapport avec l'arithmosphère.

59. — L'ÉQUATION $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Cette équation quadratique homogène à six indéterminées se rattache manifestement à l'arithmosphère. Si l'on se donne, en effet, arbitrairement les trois indéterminées x', y', z', la détermination de x, y, z n'est autre que la recherche d'un arithmopoint quelconque sur l'arithmosphère de centre O qui passe par l'arithmopoint de coordonnées x', y', z'. L'équation considérée peut donc être résolue par une des méthodes indiquées au § 8 (représentation géographique, ou mieux : projection stéréographique).

La même équation peut être étudiée arithmogéométriquement d'une manière toute différente. J'observerai dans ce but que cette équation est susceptible d'une interprétation

[1] Question n° 1124 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

géométrique remarquable. Etant considéré un triangle de référence ABC, si l'on prend sur les côtés des points A′ sur BC, B′ sur CA et C′ sur AB, déterminant sur ces mêmes côtés six segments

$$BA' = x\ , \qquad A'C = x'\ ,$$
$$CB' = y\ , \qquad B'A = y'\ ,$$
$$AC' = z\ , \qquad C'B = z'\ ,$$

la condition nécessaire et suffisante de concours des perpendiculaires aux côtés en ces points A′ B′ C′ est précisément la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\ .$$

Cette remarque élémentaire faite, je supposerai que les sommes $x + x'$, $y + y'$ et $z + z'$ sont imposées ; soient :

$$x + x' = a\ , \qquad y + y' = b\ , \qquad z + z' = c\ .$$

Je suppose en outre que les nombres a, b, c peuvent être considérés comme étant les mesures des côtés d'un arithmotriangle héronien.

La solution générale de l'équation indéterminée dépend alors de a, b et c et de deux paramètres arbitraires. *Pour avoir cette solution générale, il suffira de se donner arbitrairement un arithmopoint du plan de l'arithmotriangle héronien et de le projeter sur les droites arithmodirigées qui portent les trois côtés de ce triangle : les six segments déterminés par ces trois projections constituent précisément la solution générale désirée.*

60. — L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2$, qui de son côté a fait aussi l'objet d'assez nombreuses remarques[1] se rattache à la précédente au titre de cas particulier. Les formules déduites de l'étude arithmogéométrique d'une arithmosphère de centre O et qui passe par l'arithmopoint des coordonnées (x', y' et 0) se simplifient du fait que l'arithmopoint connu *a priori* a sa cote nulle.

---

[1] Cette équation indéterminée $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ a été fréquemment considérée (question n° 3621 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*). Je pense toutefois que la solution géométrique ci-dessus doit être nouvelle.

[1] Question 4383 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Cette équation comme la précédente est susceptible d'une solution dépendant de la considération de l'arithmotriangle héronien général. Ici toutefois la solution générale dépend des côtés de l'arithmotriangle héronien et d'un seul paramètre. Cette solution générale s'obtient, en effet, en supposant que l'arithmopoint que l'on projette sur les côtés du triangle n'est plus arbitraire dans le plan mais appartient à une autre droite arithmodirigée spéciale du plan (perpendiculaire en B à l'arithmodirigée AB).

61. — Le problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux. — Le problème du § 46 peut être étudié sous un nouveau point de vue et rattaché à l'étude arithmogéométrique de l'une ou l'autre de deux cubiques remarquables du plan d'un triangle. Ces cubiques ayant été l'objet de deux questions très précises posées par Ed. Lucas, il m'a paru justifié de proposer de leur donner le nom de l'illustre géomètre, puisqu'il s'agit ici d'une application arithmologique que Lucas aurait parfaitement pu suggérer, s'il ne l'a pas fait d'ailleurs dans des notes aujourd'hui perdues.

L'énoncé du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, au sujet desquels toutes mes recherches bibliographiques sont restées infructueuses, est le suivant :

Etudier les couples de parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles dont les diagonales sont égales, sans être nécessairement rationnelles, et dont les volumes sont équivalents. Soient (x, y, z) et (x', y', z') les arêtes respectives des deux parallélépipèdes que l'on désire associer ainsi. Les équations du problème sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \,. \\ x.y.z = x'.y'.z' \,. \end{cases}$$

La question se traduisant ainsi par deux équations homogènes respectivement des second et troisième degrés à six inconnues, il convient de se donner arbitrairement trois conditions supplémentaires. Pour chaque choix de ces conditions supplémentaires, on aura à résoudre un problème du

genre de celui traité au § 44, où j'avais imposé une arête d'un des volumes et deux de l'autre.

Le problème des parallélépipèdes équivalents et isodiagonaux se rattache à des considérations particulièrement élégantes d'arithmogéométrie lorsqu'on impose les trois sommes formées avec une arête de chacun des deux parallélépipèdes. Soient, en effet, a, b, c les sommes

$$x + x' = a \ , \qquad y + y' = b \ , \qquad z + z' = c \ .$$

Pour simplifier, je supposerai que ces longueurs a, b, c sont les côtés d'un triangle ; cette hypothèse nécessaire pour pouvoir introduire des considérations d'arithmogéométrie conduit à des formules qui sont plus généralement valables pour (a, b, c) absolument quelconques.

Si donc ABC est un triangle de côtés (a, b, c) et si (x, x', y, y', z, z') sont les mesures de six segments consécutifs, dans l'ordre même de ces lettres, pris sur les côtés BC, CA, AB du triangle, les équations ci-dessus écrites expriment des propriétés géométriques remarquables.

La relation de J. Céva,

$$xyz = x'y'z' \ ,$$

exprime le concours des trois droites AA′, BB′, CC′. Quant à la seconde relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \ ,$$

elle exprime que les perpendiculaires en A′B′C′ aux côtés BC, CA, AB du triangle sont trois droites concourantes (§ 59).

Dans ces conditions, une solution particulière apparaît manifestement ; elle est tellement remarquable qu'elle mérite d'être signalée avant de pousser plus loin l'étude générale du système d'équations ci-dessus. En se bornant au cas d'un triangle acutangle, *les parallélépipèdes rectangles admettant respectivement pour arêtes les segments d'ordre pair et d'ordre impair déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs du triangle sont des solutions particulières du problème.*

Si a, b, c désignent les mesures rationnelles des côtés du

triangle figuratif ABC, les expressions correspondantes des arêtes des deux parallélépipèdes associés sont :

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \qquad x' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a},$$

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \qquad y' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b},$$

$$z = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \qquad z' = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$

C'est ainsi que le triangle de côtés (4, 5, 6) donne, après multiplication par 8, les deux parallélépipèdes rectangles d'arêtes respectives

$$x = 27, \quad y = 4, \quad z = 30,$$
$$x' = 5, \quad y' = 36, \quad z' = 18.$$

62. — La première cubique d'Edouard Lucas. — C'est aux cubiques qui font l'objet de la question suivante que se rattache l'étude générale du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux. « On joint les trois sommets d'un triangle ABC à un point P et l'on prend les « intersections A′B′C′ des lignes de jonction avec les côtés « opposés. Trouver le lieu des points P de telle sorte que les « perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A′B′C′ « se rencontrent en un même point Q. Ce lieu est une cubi- « que dont il est facile de déterminer seize points et trois « tangentes. Déterminer les asymptotes et, aussi, trouver le « lieu du point Q.[1] »

Soient X, Y, Z les coordonnées barycentriques du point courant P de la première cubique de Lucas, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence. La droite AP a pour équation

$$\frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z},$$

[1] Ed. Lucas, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XV, 1876, question n° 1207, p. 240. Solution p. 550-555 (Dewulf).

Enoncé analogue par Ed. Lucas, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, 1876, question n° 83, p. 94. Solutions : 1re partie, 1880, p. 56-65 et 2e partie, 1878, pp. 261-272 par H. van Aubel.

Cf. aussi un article de H. van Aubel, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 87, Sur un lieu géométrique (trouver le lieu des points Q tels que les perpendiculaires QA′, QB′, QC′ abaissées sur les trois côtés d'un triangle ABC déterminent sur ces côtés des segments en involution.

et, par suite, les segments $BA' = x$ et $A'C = x'$ déterminés sur le côté $\xi = 0$ sont entre eux dans le rapport $\frac{x}{x'} = \frac{Z}{Y}$. Les valeurs des six segments BA', A'C, CB', B'A, AC' et C'B sont donc

$$x = a.\frac{Z}{Y+Z}, \qquad x' = a.\frac{Y}{Y+Z},$$

$$y = b.\frac{X}{Z+X}, \qquad y' = b.\frac{Z}{Z+X},$$

$$z = c.\frac{Y}{X+Y}, \qquad z' = c.\frac{X}{X+Y};$$

la relation $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ donne alors l'équation de la première cubique de Lucas en ce système de coordonnées barycentriques :

$$a^2.\frac{Y-Z}{Y+Z} + b^2.\frac{Z-X}{Z+X} + c^2.\frac{X-Y}{X+Y} = 0 .$$

Cette cubique se transforme en elle-même dans la transformation quadratique définie par les formules

$$XX_1 = YY_1 = ZZ_1$$

et qui est analogue à la transformation isogonale. Cette invariance de la cubique correspond à l'échange entre eux des deux parallélépipèdes associés.

En revenant au problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, il résulte des considérations qui précèdent que sa solution générale s'exprime par les formules suivantes où a, b, c sont des paramètres absolument quelconques (qui ne sont pas de toute nécessité les mesures des côtés d'un triangle ABC) :

$$x = a.\frac{Z}{Y+Z}, \qquad x' = a.\frac{Y}{Y+Z},$$

$$y = b.\frac{X}{Z+X}, \qquad y' = b.\frac{Z}{Z+X},$$

$$z = c.\frac{Y}{X+Y}, \qquad z' = c.\frac{X}{X+Y};$$

X, Y, Z sont les coordonnées homogènes d'un arithmopoint quelconque de la cubique d'équation homogène

$$\sum a^2 \frac{Y - Z}{Y + Z} = 0$$

passant par les sommets du triangle de référence (qui n'est plus nécessairement le triangle A, B, C).

Il est essentiel de remarquer que la première cubique d'Edouard Lucas permet de résoudre le problème des parallélépipèdes lorsque a, b, c sont les mesures des côtés d'un triangle et que, si cette dernière condition n'est pas satisfaite, les formules obtenues gardent un sens et, par continuité, donnent la solution générale du même problème.

La première cubique de Lucas [ou sa généralisation pour le cas de a, b, c quelconques] est douée d'un certain nombre de points remarquables: les sommets ABC du triangle de référence, le centre de gravité, l'orthocentre, les sommets A, B, C, du triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC, etc..... D'où *a priori* un certain nombre d'arithmopoints très simples

$$\begin{array}{lll} X = 0\,, & Y = 0\,, & Z = 1\,, \\ X = 0\,, & Y = 1\,, & Z = 0\,, \\ X = 1\,, & Y = 0\,, & Z = 0\,, \\ X = 1\,, & Y = 1\,, & Z = 1\,, \\ X = 1\,, & Y = 1\,, & Z = -1\,, \\ X = 1\,, & Y = -1\,, & Z = 1\,, \\ X = -1\,, & Y = 1\,, & Z = 1\,, \end{array}$$

$$X = b^2 + c^2 - a^2\,, \qquad Y = c^2 + a^2 - b^2\,, \qquad Z = a^2 + b^2 - c^2\,;$$

Ce dernier arithmopoint correspond, par exemple, au point transformé de l'orthocentre dans la transformation quadratique signalée précédemment.

63. — La seconde cubique de Lucas. — Soient maintenant X, Y, Z les coordonnées trilinéaires du point Q. Le théorème des projections donne immédiatement les expressions des

segments BA′, A′C... déterminés sur les côtés du triangle ABC par les projections de Q :

$$x = \frac{Z + X\cos B}{\sin B}, \qquad x' = \frac{Y + X\cos C}{\sin C},$$

$$y = \frac{X + Y\cos C}{\sin C}, \qquad y' = \frac{Z + Y\cos A}{\sin A},$$

$$z = \frac{Y + Z\cos A}{\sin A}, \qquad z' = \frac{X + Z\cos B}{\sin B};$$

l'équation de la seconde cubique de Lucas résulte du théorème de J. Céva :

$$(Y + Z\cos A)(Z + X\cos B)(X + Y\cos C) = (Z + Y\cos A)(X + Z\cos B)(Y + X\cos C).$$

Cette cubique est invariante dans la transformation isogonale. Elle passe par les sommets A, B, C du triangle ABC, par l'orthocentre, par le centre du cercle circonscrit qui est d'ailleurs le centre de cette cubique, par les centres des quatre cercles tritangents aux côtés du triangle, par les points à l'infini des trois médiatrices qui sont asymptotes de la cubique.....

Revenons au problème des parallélépipèdes. Il résulte des considérations qui précèdent que l'on doit poser

$$x = \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{4S}, \qquad x' = \frac{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X}{4S}, \ldots$$

S représentant la surface du triangle ABC; l'équation de la seconde cubique de Lucas est alors :

$$\Pi \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X} = 1.$$

Il est absolument indispensable de supposer actuellement que a, b, c sont les mesures d'un véritable triangle et en outre que ce triangle est un *arithmotriangle héronien*. A la différence des considérations du paragraphe précédent relatif à la première cubique de Lucas, où aucune hypothèse restrictive n'était nécessaire sur la nature de a, b, c, ce n'est actuellement que moyennant cette double condition que le

problème des parallélépipèdes restangles équivalents et isodiagonaux étudié sera susceptible d'être rattaché à l'étude des arithmopoints de la seconde cubique de Lucas.

64. — Autre définition de la seconde cubique de Lucas. — Je crois devoir indiquer ici une propriété importante[1] qui peut servir à définir la seconde cubique de Lucas.

La seconde cubique d'E. Lucas est le lieu des points Q *du plan d'un triangle* ABC *tels que les droites* QA, QB *et* QC *soient normales en* A, B *et* C *à une même conique.*

Si l'on représente, en effet, en coordonnées trilinéaires par rapport au triangle de référence ABC, une droite issue du sommet A par l'équation

$$Y = mZ ,$$

l'involution des droites orthogonales autour du point A, qui comprend comme couples de droites associées d'une part les deux bissectrices ($m = 1$, $m' = -1$) et d'autre part la hauteur AH $\left(m = \frac{\cos C}{\cos B}\right)$ et le parallèle au côté opposé BC $\left(m' = -\frac{\sin C}{\sin B}\right)$, est définie par l'équation

$$mm' + 1 + (m + m') \cos A = 0 .$$

Si donc (x, y, z) sont les coordonnées trilinéaires du point Q du lieu étudié, les perpendiculaires en A, B et C aux droites QA, QB, QC ont pour équations respectives

$$Y = \alpha Z , \qquad Z = \beta X , \qquad X = \gamma Y ,$$

avec

$$\alpha = -\frac{z + y \cos A}{y + z \cos A} , \qquad \beta = -\frac{x + z \cos B}{z + x \cos B} , \qquad \gamma = -\frac{y + x \cos C}{x + y \cos C} .$$

Il résulte, d'autre part, de l'équation générale d'une conique circonscrite à ABC,

$$\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} = 0 ,$$

que les coefficients jouant le rôle de coefficients angulaires

[1] A porter au compte d'un auteur dont je ne puis préciser le nom, n'ayant pu retrouver la référence utile.

des tangentes aux sommets A, B, C du triangle de référence sont

$$\alpha = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}, \qquad \beta = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}, \qquad \gamma = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que QA, QB, QC soient normales à une même conique en A, B et C est donc

$$\alpha\beta\gamma = -1 ;$$

elle se traduit, par conséquent, par l'équation

$$(z + y\cos A)(x + z\cos B)(y + x\cos C)$$
$$= (y + z\cos A)(z + x\cos B)(x + y\cos C)$$

représentative de la seconde cubique d'E. Lucas.

Les arithmotriangles télémétriques.

65. — Le problème télémétrique conduit à la considération de triangles obtusangles particuliers ABC qui sont définis par la relation[1]

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0, \qquad \left(B > \frac{\pi}{2}\right).$$

J'appellerai triangles télémétriques les triangles de cette nature. Par exemple, les triangles d'angles

$$A = 30^\circ, \qquad B = 105^\circ, \qquad C = 45^\circ$$

qui peuvent être facilement construits à partir des triangles équilatéraux sont des triangles télémétriques particuliers.

Soient maintenant A′ B′ C′ les pieds des hauteurs d'un triangle télémétrique. Le triangle pédal A′ B′ C′ de ABC a pour angles

$$A' = 2A, \qquad B' = 2B - \pi, \qquad C' = 2C.$$

Il en résulte que la relation de définition d'un triangle télémétrique quelconque se traduit par une condition très sim-

[1] J.-E. Estienne, Note sur les télémètres, *Revue d'artillerie*, novembre 1904.
Jules Raibaud, Instruments d'optique, d'observation et de mesure, *Encyclopédie scientifique*, Paris, 1910, p. 321-322.