SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

Autor(en): **Broggi, Ugo**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15540

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La somme

$$(e_2 - e_3)\sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1)\sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2)\sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w \ , \qquad (95)$$

qui est nulle pour $u = v = w = 0$, *le reste quand* $u + v + w = 0$; *en outre, à cause de la parité des* $\sigma_i(u)$, *la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes* $\pm$ *dans la formule*

$$u \pm v \pm w = 0 \ .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k)\sigma_i(u)\sigma_i(v)\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Pi\sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right); \qquad (96)$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. Cailler (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

1. — Considérons le système

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r \ ,$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx$$

égale à un minimum. On a évidemment (nous écrirons partout $\int$ au lieu de $\int_{x_1}^{x_2}$

$$\int \varphi_0 \psi_r dx = \int \varphi_1 \psi_r dx = \ldots = \int \varphi_{r-1} \psi_r dx = 0$$

et pourtant, pour $s < r$, puisque ψ_s est une expression linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0, \qquad (s < r)$$

d'où l'on tire en général

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0. \qquad (s \neq r)$$

Les fonctions ψ sont orthogonales dans l'intervalle $(x_1 x_2)$, arbitrairement choisi.

En particulier, si nous posons

$$x_2 = -x_1 = 1, \qquad \varphi_r = x^r$$

nous arrivons à la définition de fonctions qui ne diffèrent des fonctions sphériques que par un facteur constant. C'est un résultat connu[1].

2. — M. Goursat[2] arrive à la définition de fonctions orthogonales Φ_0, Φ_1, ... déduites des fonctions données $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en posant d'abord

$$\varphi_0 = \Phi_0, \qquad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + c_i \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

la constante c_i étant déterminée de façon que

$$\int \Phi_0 \bar{\varphi}_i dx = 0.$$

---

[1] Runge, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig, 1904, p. 14.

[2] *Annales de la Faculté de Toulouse*, Tome 10, 2e série, 1908. L'auteur cite, d'après Lalesco, *Introduction à la Théorie des Equations Intégrales*, Paris 1912.

Les fonctions $\overline{\varphi}_i$ sont orthogonales à $\boldsymbol{\Phi}_0$. Nous définissons d'une façon analogue des fonctions $\overline{\overline{\varphi}}_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$ orthogonales à $\boldsymbol{\Phi}_0$ et à $\boldsymbol{\Phi}_1$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \overline{\varphi}_1$$

en formant les expressions

$$\overline{\overline{\varphi}}_i = \overline{\varphi}_i + \gamma_i \Phi_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

et en déterminant la constante γ_i de façon, que

$$\int \Phi_1 \overline{\overline{\varphi}}_i \, dx = 0$$

La répétition du procédé indiqué nous donne toutes les fonctions $\boldsymbol{\Phi}_r$ telles que

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = 0 . \qquad (r \neq s)$$

3. — Nous nous proposons de démontrer que

$$\psi_r \equiv \Phi_r .$$

Il est avant tout évident, que $\boldsymbol{\Phi}_r$ est une expression de la forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \ldots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r .$$

En réalité, si nous exprimons en général par $D_\Phi f(x)$ la transformation linéaire

$$D_\Phi f(x) = f(x) - \frac{\int f(x) \Phi(x) \, dx}{\int \Phi(x) \Phi(x) \, dx} \Phi(x) ,$$

et si nous posons

$$D^2_{\Phi_1 \Phi_2} f(x) = D_{\Phi_2} [D_{\Phi_1} f(x)] ; \; D^0_\Phi f = f ,$$

. . . . . .

nous obtenons de suite

$$\Phi_r = D^r_{\Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_{r-1}} \varphi_r = \varphi_r + \text{expression linéaire de } \varphi_0, \ldots \varphi_{r-1} .$$

On a avant tout

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \Phi_0 \, dx \, .$$

Mais l'égalité

$$\int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx = 0$$

entraîne l'autre

$$\int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \, ,$$

dès que, si l'on suppose

$$\Phi_s = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_{s-1} \varphi_{s-1} + \varphi_s \, .$$

on a aussi

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = \alpha_0 \int \Phi_r \varphi_0 \, dx + \alpha_1 \int \Phi_r \varphi_1 \, dx + \ldots$$

$$\alpha_{s-1} \int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx + \int \Phi_r \varphi_s \, dx = \int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \, . \qquad (s < r)$$

Nous obtenons donc

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \varphi_1 \, dx = \ldots = \int \Phi_r \varphi_{r-1} \, dx = 0 \, .$$

Ce sont les équations qui découlent du problème de minimum

$$\int (a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \ldots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx = \text{minimum}$$

formulé au commencement et qui définissent la fonction ψ_r.

(Février 1914). Ugo Broggi (Buenos-Aires).