UNE LEÇON D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE SUR LES POLYNOMES BIQUADRATIQUES ET DOUBLEMENT QUADRATIQUES

Autor(en): **Cailler, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15539

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

UNE LEÇON D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE SUR LES POLYNOMES BIQUADRATIQUES ET DOUBLEMENT QUADRATIQUES

I. — Préambule.

1. — La leçon qu'on va lire était destinée primitivement à servir d'introduction au cours que je professe ce semestre à l'Université de Genève sur les fonctions elliptiques. Diverses considérations, en particulier la longueur de cette étude m'ont engagé, en modifiant mon plan, à renoncer à ma première idée. Je me décide à faire paraître ici cette leçon, malgré le caractère élémentaire et même classique des questions que j'y discute.

En écrivant ces pages je me suis surtout inspiré du grand traité de G. H. Halphen[1] que j'ai dû consulter à maintes reprises pour la préparation de ce cours. On sait la manière de cet auteur, dense et pleine. Visant toujours à la perfection il ne touche aucun sujet sans l'épuiser. Un tel écrivain ne s'accommode guère d'une lecture cursive, et c'est le plus souvent la plume à la main que je l'ai étudié.

Il est résulté de là toute une série de notes, les unes très brèves, les autres assez développées, serrant de plus ou moins près le texte que je me proposais de commenter. La présente étude n'est, pour une forte part, qu'une de ces notes ; elle s'écarte d'ailleurs beaucoup du livre d'Halphen. La méthode dont je me sers est partiellement nouvelle, et me paraît présenter des caractères intéressants ; à défaut d'autres mérites, mon travail aidera peut-être quelques étudiants à lire plus facilement les chapitres 9, 10, 11 et 14 au second volume d'un ouvrage qu'on ne saurait aujourd'hui encore trop recommander.

Au chapitre 9, consacré à l'équation d'Euler, Halphen n'emploie évidemment les fonctions elliptiques qu'à titre d'auxiliaires : le

[1] G.-H. Halphen. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Paris 1886-1891, 3 vol. in 8°.

but principal demeure l'équation doublement quadratique, la recherche de ses invariants, le problème de l'équivalence entre de semblables équations, etc. Or on peut se demander si le détour par les fonctions elliptiques offre un avantage bien réel, et si ces diverses questions ne se résoudraient pas aussi simplement par les seules ressources de l'Algèbre.

En prenant ce point de vue direct, opposé à celui d'Halphen, il semble en effet qu'on gagne plutôt; on obtient en tout cas un exposé aussi approfondi, et peut-être plus clair, des propriétés de l'équation dont il s'agit. Il est loisible ensuite de fermer le cercle par l'étude de l'intégrale elliptique attachée au polynôme doublement quadratique, c'est par là que je termine.

Tel est donc l'objectif que j'ai poursuivi; j'ai essayé de discuter par une marche élémentaire, bien qu'assez à fond, le problème algébrique, et de trouver, dans sa résolution, la clef des premières propriétés de l'intégrale elliptique. Cette marche qui m'était suggérée par le plan même de mon cours, tel que je l'avais d'abord tracé, se confond avec celle qu'ont dû suivre tout naturellement les premiers inventeurs du théorème d'addition, Euler en particulier. Il me semble, en la renouvelant, l'avoir sensiblement perfectionnée; au lieu de me contenter de vérifier des formules en quelque sorte toutes préparées, j'ai cherché à mettre partout en évidence les raisons cachées de ces formules. Ceci ne va pas sans quelques longueurs.

C'est notamment par ce souci de clarté qu'on s'expliquera la présence ici des deux premiers chapitres de mon travail: tout élémentaires qu'ils sont, ils font corps avec la suite et ne sauraient en être séparés, ce sont eux qui renferment le secret des propriétés assez complexes de l'équation doublement quadratique. On n'y verra peut-être pas sans intérêt le rôle prédominant que je fais jouer, notamment dans la théorie des équations du 4me degré, aux polynômes quadratiques dont les racines se divisent harmoniquement deux à deux. L'introduction méthodique de pareils polynômes *conjugués*, ou *orthogonaux*, me paraît jeter une vive lumière sur tout le sujet; aussi me suis-je attardé sur les propriétés de ces polynômes au delà de ce qui était strictement nécessaire.

II. — Polynômes du second degré.

2. — Dans toute la suite nous rencontrerons constamment des combinaisons homogènes de divers polynômes f, g, h, ... , les degrés de ces polynômes en x sont zéro, un, ou deux. Nous n'emploierons pas la notation homogène, et nous regarderons toujours ces polynômes comme de degré 2. Ils possèdent deux racines; seulement quand le degré effectif s'abaisse, une des racines, ou toutes

les deux, se trouve rejetée à l'infini. A ce point de vue, deux polynômes d'un degré égal à l'unité ne sont jamais premiers entre eux comme ayant en commun le facteur $x - \infty$; une constante est un polynôme carré dont les deux racines sont à l'infini et dont la dérivée est identiquement nulle, etc.

Notons encore qu'une relation telle que $h^2 = fg$ ne peut subsister que dans les deux suppositions que voici: ou bien f et g sont des carrés parfaits, ayant respectivement pour racines les facteurs linéaires de h, ou bien f, g, h, ne diffèrent les uns des autres que par un facteur constant. Ce théorème, évident, ne suppose pas non plus le degré effectif égal à 2. En voici une application immédiate.

On sait que si $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ est l'équation d'une conique rapportée à un axe de symétrie, les coordonnées x et y peuvent, d'une infinité de manières, s'écrire sous la forme

$$x = \frac{f}{g} \qquad y = \frac{h}{g} \; . \tag{1}$$

Les trois polynômes f, g, h, en t, sont du second degré et donnent lieu à l'identité

$$h^2 = af^2 + 2bfg + cg^2 = \mathrm{FG} \; , \tag{2}$$

où F et G désignent certaines combinaisons linéaires de f et g. Par exemple si $a \neq o$, on peut prendre

$$\mathrm{F}\sqrt{a} = af + (b + \sqrt{\Delta})g \; , \qquad \mathrm{G}\sqrt{a} = af + (b - \sqrt{\Delta})g \; ,$$

la lettre Δ représente ici le discriminant $b^2 - ac$ du polynôme $ax^2 + 2bx + c$.

En tout cas si la conique est non décomposable F, G, h sont distincts, car dans le cas contraire on aurait une relation linéaire entre x, y. On doit donc conclure de (2) que F et G sont des carrés,

$$\mathrm{F} = \varphi^2 \; , \qquad \mathrm{G} = \gamma^2 \; , \qquad h = \varphi\gamma \; , \tag{3}$$

et voici la conséquence. *Dans la représentation* (1) *le polynôme* h *ne diffère que par un facteur constant de cet autre* $\mathrm{fg}' - \mathrm{f}'\mathrm{g}$.

En effet, si $\mathrm{F} = lf + mg$ et $\mathrm{G} = l'f + m'g$, on a d'abord

$$\mathrm{FG}' - \mathrm{F}'\mathrm{G} = (lm' - l'm)(fg' - f'g) \; :$$

puis d'après (3)

$$\mathrm{FG}' - \mathrm{F}'\mathrm{G} = 2\varphi\gamma\,(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma) = 2h\,(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma) \; .$$

La proposition est prouvée, car les quantités $lm' - l'm$ et $\varphi\gamma' - \varphi'\gamma$ sont évidemment constantes.

Réciproquement, si f, g, h représentent trois polynômes quadratiques en t, la courbe $x = \frac{f}{g}$, $y = \frac{h}{g}$ est une conique, décomposable ou non. Si, f et g restant quelconques, on prend h égal ou proportionnel au polynôme du second degré $h = fg' - f'g$, notre conique admet l'axe des x comme axe de symétrie. Cela résulte de l'identité

$$(fg' - f'g)^2 = (g'^2 - 2gg'')f^2 + 2(f''g - f'g' + fg'')fg + (f'^2 - 2ff'')g^2 ,$$

que nous écrivons en abrégé

$$(fg' - f'g)^2 = (gg)f^2 - 2(fg)fg + (ff)g^2 , \tag{4}$$

en posant, pour deux polynômes quelconques qui peuvent coïncider

$$(fg) = f'g' - f''g - fg'' . \tag{5}$$

La quantité (fg) ainsi définie est une constante, comme on le voit en la différentiant; elle s'appelle *l'invariant simultané* des polynômes f et g; lorsqu'ils deviennent égaux, l'invariant (ff) se trouve égal au quadruple du discriminant $B^2 - AC$ de la forme $f = Ax^2 + 2Bx + C$.

D'après l'identité (4), on voit bien que les formules

$$x = \frac{f}{g} , \qquad y = \frac{f'g - fg'}{g} ,$$

donnent la représentation paramétrique de la conique

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c , \tag{6}$$

aux coefficients $a = (gg)$, $b = -(fg)$, $c = (ff)$.

Considérons le polynôme $h = fg' - f'g$; de cette définition on tire les formules

$$h = fg' - f'g , \qquad h' = fg'' - f''g , \qquad h'' = f'g'' - f''g' , \tag{7}$$

d'où

$$hf'' - h'f' + h''f = 0 , \qquad hg'' - h'g' + h''g = 0 , \tag{8}$$

c'est-à-dire $(hf) = 0$ et $(hg) = 0$.

Si on nomme *conjugués* ou *orthogonaux* deux polynômes à invariant nul, on montre aisément que les racines de l'un d'entre eux divisent harmoniquement l'intervalle des racines de l'autre. Les équations ci-dessus $(hf) = (hg) = 0$ signifient donc que dans la

représentation paramétrique de la conique (6), le polynôme h est orthogonal à f et g, comme aussi à tout polynôme $lf + mg$ appartenant à leur faisceau. Et cette règle suffit à déterminer h, sauf un coefficient constant, en fonction de deux polynômes quelconques du dit faisceau.

Tirons quelques conséquences du système (7).

a) Si f et g admettent un facteur commun $t - \alpha$, les deux premières formules (7) montrent que h et h' admettraient ce même facteur $t - \alpha$; h serait donc carré parfait. Il n'y a pas d'exception pour $\alpha = \infty$; f et g seraient alors tous deux du premier degré et h une simple constante.

Inversement, si f et g sont premiers entre eux, h n'est jamais carré. Car d'abord il ne peut être constant, parce que, d'après la seconde formule (7), f et g seraient dans ce cas identiques, à un facteur près. En second lieu, si on pose $h = \frac{h''}{2}(t - \alpha)^2$, avec $h'' \neq 0$, h et h' s'annulent pour $t = \alpha$ et comme le déterminant $f'g'' - f''g' = h''$ est non nul, f et g possèdent tous deux le diviseur $t - \alpha$; ceci en vertu des mêmes formules (7).

En résumé ; si f et g n'ont aucun facteur commun, h est non carré, s'ils en ont un seul, h est carré parfait, s'ils en ont deux, h est nul identiquement.

b) Supposons désormais f et g premiers entre eux, par suite h non carré, ou son discriminant $\frac{1}{4}(hh)$ différent de zéro. Dans ce cas la conique (6) est non décomposable ; en effet, son discriminant

$$(fg)^2 - (ff)(gg) = (f''g - f'g' + fg'')^2 - (f'^2 - 2ff'')(g'^2 - 2gg'') ,$$

peut aussi s'écrire

$$(fg'' - f''g)^2 - 2(fg' - f'g)(f'g'' - f''g') = h'^2 - 2hh'' = (hh) ,$$

ce qui rend la proposition évidente.

c) Les polynômes f, g, h sont linéairement indépendants. Soit en effet $F = lf + mg$ un polynôme appartenant au faisceau f, g ; on ne saurait avoir $h = F$, car la condition d'orthogonalité $(hF) = 0$ donnerait dans ce cas $h'^2 - 2hh'' = 0$, chose absurde h n'étant pas carré.

Je dis de plus que si h et F possèdent un facteur commun, F est un carré parfait. En effet, soit $t - \alpha$ le facteur commun ; la condition $(hF) = h'F' - hF'' - h''F = 0$ montre que $t - \alpha$ divisera $h'F'$, sans diviser h' puisque h est non carré. C'est donc que F et F' sont tous deux divisibles par $t - \alpha$ et qu'ainsi F est carré ; cette conséquence persiste, comme on voit facilement, même si $\alpha = \infty$. Ré-

ciproquement toutes les fois que F est un carré exact $(t-\alpha)^2$, h admet le diviseur $(t-\alpha)$, la chose est évidente.

On voit, en somme, que h étant écrit sous la forme $h = A(t-\alpha)(t-\beta)$, le faisceau (f, g) qui contient certainement deux carrés, comme on a vu plus haut, n'en contient pas d'autre que ces deux-ci $(t-\alpha)^2$ et $(t-\beta)^2$. Les racines α et β du polynôme h définissent ce qu'on appelle les points doubles du *faisceau*, ou de *l'involution* (f, g).

3. — *Condition de réalité.* — Supposons f et g non seulement premiers entre eux, mais réels; je dis que les points doubles sont toujours réels sauf dans le cas où les racines de f et g sont réelles et se séparent mutuellement.

En effet, on a

$$h = g^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) = -f^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{f}\right);$$

par suite, si un de nos polynômes, par exemple g, a des racines imaginaires, le quotient $\frac{f}{g}$, continu de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, reprend la même valeur pour ces deux valeurs de t. Il admet ainsi des maxima ou des minima, en même temps h s'annule. Si f et g admettent tous deux des racines réelles, mais que celles de f, γ et δ par exemple, soient comprises entre les racines de g, le quotient $\frac{f}{g}$ reste continu dans l'intervalle $\gamma\,\delta$ et s'annule à ses extrémités, ainsi h s'annule de nouveau. Passons au cas où les racines réelles de f et g se séparent mutuellement.

Si on fait dans ce cas varier les coefficients de f et g de manière que leurs racines conservent la même position relative, h ne peut devenir carré parfait, puisque f et g n'acquièrent pas de facteurs communs; ainsi les racines de $h = 0$ restent réelles ou imaginaires selon qu'elles l'étaient au début. Or on peut évidemment par les dits changements amener f à prendre la forme (t^2-1) et g la forme $2t$, polynômes à racines séparées. A cet instant $h = 2(t^2+1)$, et ses racines sont imaginaires, comme le voulait la proposition énoncée ci-dessus.

Les cas précédents sont évidemment exclusifs les uns des autres, et comme h est le même, à un facteur près, quand on le déduit de deux polynômes quelconques F, G du faisceau (f, g), on voit que si f et g sont deux polynômes à racines réelles se séparant mutuellement, $F = lf + mg$ et $G = l'f + m'g$ sont dans le même cas, cela quels que soient les facteurs réels l, m, l', m'.

4. — *Intégration.* — On sait que la représentation paramétrique (1) est employée dans les éléments pour intégrer les différentielles

$f(x, y)\,dx$, attachées à la conique $y^2 = ax^2 + 2bx + c$. Disons, en passant, un mot de cette intégration.

Admettons, pour fixer les idées, que g n'est pas carré parfait; il y a alors dans le faisceau $f - xg$ deux carrés parfaits. Soient donc

$$f - x_1 g = A_1 (t - t_1)^2 , \quad f - x_2 g = A_2 (t - t_2)^2 . \tag{9}$$

L'équation $x = \frac{f}{g}$ donne

$$g(x - x_1) = A_1 (t - t_1)^2 , \qquad g(x - x_2) = A_2 (t - t_2)^2 , \tag{10}$$

puis

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{t - t_1}{t - t_2}\right)^2 ,$$

qui n'est qu'une forme nouvelle pour $x = \frac{f}{g}$. On y lit que si t_1 et t_2 sont les racines du polynôme h, x_1 et x_2 représentent les extrêmums du quotient $\frac{f}{g}$, alors que t_1 et t_2 sont les valeurs de la variable correspondant à ces extremums.

Posons $h = gf' - fg'$, désignons par m un facteur de proportionnalité, et revenons à l'identité (4), nous avons

$$x = \frac{f}{g} , \qquad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = m \frac{h}{g} , \qquad dx = h \frac{dt}{g^2} = \frac{r}{m} \frac{dt}{g} .$$

On a donc

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{m} \frac{dt}{g} ,$$

ce qui est la formule bien connue de l'Analyse élémentaire. Il est aisé, en la généralisant, de l'adapter à l'intégration des fonctions rationnelles du type $\frac{rt + s}{f\sqrt{g}} dt$, où r et s sont deux coefficients constants.

Tirons à cet effet de (10)

$$\sqrt{g(x - x_1)} = (t - t_1)\sqrt{A_1} , \qquad \sqrt{g(x - x_2)} = (t - t_2)\sqrt{A_2} ,$$

additionnons celles-ci, après les avoir multipliées par deux facteurs constants, nous aurons

$$\frac{rt + s}{\sqrt{g}} = c_1 \sqrt{x - x_1} + c_2 \sqrt{x - x_2} .$$

Multiplions cette formule à son tour par le facteur

$$\frac{dt}{f} = \frac{m}{x}\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{p}{x}\frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)}} ,$$

il vient

$$\frac{rt + s}{f\sqrt{g}}\,dt = b_1\frac{dx}{x\sqrt{x - x_1}} + b_2\frac{dx}{x\sqrt{x - x_2}} . \tag{11}$$

C'est là une formule très pratique pour l'intégration des différentielles du premier membre, une fois déterminés en fonction de r et s les paramètres b_1, b_2 qu'elle contient.

5. — *Transformations linéaires.* — Nous allons exécuter sur nos polynômes des transformations du type

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'} , \quad \text{ou} \quad u = \frac{-\beta' t + \beta}{\alpha' t - \alpha} , \tag{12}$$

dont le déterminant $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ doit être différent de zéro. Il est ici bien entendu, à titre de convention expresse, que nous nous interdisons la suppression des facteurs communs dans les quatre coefficients α, α', β, β' de la transformation ci-dessus ; ces coefficients comptent ainsi pour eux-mêmes et non pas simplement par leurs rapports mutuels. L'importance de cette convention va ressortir à l'instant.

Le polynôme transformé de $f(t)$ est, par définition,

$$\varphi(u) = (\alpha' u + \beta')^2 f\left(\frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}\right) . \tag{13}$$

Désignons semblablement par $\gamma(u)$ le transformé de $g(t)$, par $\eta(u)$ le polynôme orthogonal à la fois à $\varphi(u)$ et $\gamma(u)$ comme $h(t)$ est orthogonal simultanément à $f(t)$ et $g(t)$. On a

$$dt = \frac{\delta du}{(\alpha' u + \beta')^2} , \qquad \text{puis} \qquad \eta(u) = \gamma^2\frac{d}{du}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) = (\alpha' u + \beta')^2\delta g^2\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) ,$$

donc

$$\eta(u) = \delta(\alpha' u + \beta')^2 h(t) ;$$

ainsi, sauf le facteur δ, $\eta(u)$ est précisément le transformé de $h(t)$.

Multiplions l'identité fondamentale (4) par le facteur $\delta^2(\alpha' u + \beta')^4$, elle devient, grâce à l'égalité précédente,

$$\eta^2 = \delta^2[(gg)\varphi^2 - 2(fg)\varphi\gamma + (ff)\gamma^2] ;$$

mais comme d'autre part

$$\eta^2 = (\gamma\gamma)\varphi^2 - 2(\varphi\gamma)\varphi\gamma + (\varphi\varphi)\gamma^2 ,$$

la comparaison de ces deux résultats donne de suite les invariants de φ et γ. Ce sont

$$(\varphi\varphi) = \delta^2(ff) , \qquad (\varphi\gamma) = \delta^2(fg) , \qquad (\gamma\gamma) = \delta^2(gg) ; \tag{14}$$

la seconde de ces formules reproduit les deux autres en faisant simplement coïncider les deux formes f et g.

Réciproquement je dis que si quatre polynômes f, g et φ, γ, les premiers en t, les deux autres en u, sont tels que les relations d'invariance (14) soient vérifiées, il existe une transformation linéaire de déterminant δ transformant f en φ et g en γ. Pour le montrer, prenons le polynôme doublement quadratique

$$F(t, u) = f(t)\gamma(u) - g(t)\varphi(u) ,$$

nous allons voir que, les conditions ci-dessus étant supposées vraies, il se décompose en un produit de deux facteurs linéaires en t et u.

En effet, le discriminant de F, relativement à t, s'écrit

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= (f'\gamma - g'\varphi)^2 - 2(f\gamma - g\varphi)(f''\gamma - g''\varphi) , \\ &= (f'^2 - 2ff'')\gamma^2 + 2(f''g + fg'' - f'g')\gamma\varphi + (g'^2 - 2gg'')\varphi^2 , \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant les coefficients (ff), (fg), (gg) par leurs valeurs (14)

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= \frac{1}{\delta^2}\left[(\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2 - 2(\varphi''\gamma - \gamma''\varphi)(\varphi\gamma - \gamma\varphi)\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}(\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2 . \end{aligned}$$

Ce discriminant est donc carré parfait et la proposition est démontrée.

D'après le calcul qui précède on voit que la condition $F = 0$, laquelle contient évidemment toutes les transformations possibles de f en φ, et de g en γ, se dédouble dans les deux suivantes

$$F_t' = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} , \qquad \text{et} \qquad F_t' = -\frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} , \tag{15}$$

qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de δ.

Prenons l'une d'elles, la première par exemple; alors les conditions compatibles

$$F = 0 \ , \quad F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} \ ,$$

ou bien

$$f\gamma - g\varphi = 0 \ , \quad \left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right)\gamma - \left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right)\varphi = 0 \ ,$$

donnent en éliminant le rapport $\frac{\gamma}{\varphi}$

$$f\left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right) - g\left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right) = 0 \ , \qquad \text{soit} \qquad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right) \ .$$

On peut donc, au lieu de $F = 0$, poser les deux conditions équivalentes

$$F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} \ , \qquad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right) \ , \tag{16}$$

qui montrent que t est linéaire en u, et u en t.

Soit donc

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'} \ , \tag{17}$$

la solution des équations ci-dessus (16), admettons que le facteur indéterminé qui figure dans les coefficients $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ a été choisi de manière que $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ soit égal à δ. Je dis que cette transformation change f en φ, et g en γ.

Soient en effet $\Phi(u)$, $\Gamma(u)$ les transformées de $f(t)$, $g(t)$ par cette transformation, ou

$$(\alpha' u + \beta')^2 f(t) = \Phi(u) \ , \qquad (\alpha' u + \beta')^2 g(t) = \Gamma(u) \ ,$$

d'où $\frac{f}{g} = \frac{\Phi}{\Gamma}$; à cause de $F(t, u) = 0$ on a aussi $\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\gamma}$. Donc, avec un facteur constant de proportionnalité, on a

$$\Phi(u) = K\varphi(u) \ , \qquad \Gamma(u) = K\gamma(u) \ .$$

Je dis que ce facteur K est égal à l'unité.

En effet, récrivons les formules précédentes sous la forme

$$(\alpha' u + \beta')^2 f(t) = K\varphi(u) \ , \qquad (\alpha' u + \beta')^2 g(t) = K\gamma(u) \ .$$

et dérivons-les en tenant compte de $dt = \frac{\delta du}{(\alpha' u + \beta')^2}$; il vient

$$\delta f'(t) + 2\alpha'(\alpha' u + \beta') f(t) = K\varphi'(u) \ .$$

$$\delta g'(t) + 2\alpha'(\alpha' u + \beta') g(t) = K\gamma'(u) \ .$$

Eliminons entre celles-ci le terme en $(\alpha' u + \beta')$, on a

$$\delta(fg' - f'g) = K(f\gamma' - g\varphi) = KF'_u(t, u) \ ;$$

il suffit de comparer ce résultat à la seconde formule (16), pour voir que $K = 1$.

Le théorème est ainsi démontré ; ayant donc choisi à volonté le signe de δ dans la formule (16), il y a deux transformations au déterminant δ, déterminées par cette formule même, qui changent f en φ et g en γ. En changeant δ en $-\delta$, on aura de la même manière deux nouvelles transformations, soit quatre en tout, pour effectuer le passage du système (f, g) au système (φ, γ).

Il est à peine besoin de faire remarquer que si de l'équation $F'_t = \dfrac{\varphi'\gamma - \varphi\gamma'}{\delta}$, on tirait une transformation de t en u au déterminant $-\delta$, cette transformation changerait f en $-\varphi$, et g en $-\gamma$.

Terminons par une observation importante.

Nous avons jusqu'à présent pris les polynômes f et g comme point de départ ; c'est d'eux qu'ont été tirés les invariants $a = (ff)$, $b = \ldots$, ainsi que le polynôme conjugué h, pour former les éléments qui figurent dans l'identité fondamentale (4). Si, à l'inverse, les données sont a, b, c, on vient de voir que les polynômes f et g ne sont plus déterminés qu'aux transformations linéaires près. On pourrait, par exemple, prendre pour f et g les polynômes purement quadratiques

$$f = At^2 + B \ , \qquad g = A't^2 + B' \ ,$$

les conditions seraient alors

$$a = -4AB \ , \qquad c = -4A'B' \ , \qquad b = A'B - BA' \ .$$

elles pourraient être encore réalisées d'une infinité de manières.

Relativement à la conique fondamentale il y aurait, pour être complet, à rechercher encore la signification géométrique du paramètre t ; je me dispenserai de mentionner ici cette interprétation très connue et le théorème classique qui s'y rattache sur le rapport anharmonique de quatre points sur une conique.

6. — *Système de trois polynômes conjugués.* — En résumé, soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, et l_1, l_2, l_3 trois polynômes du second degré, les relations

$$x_1 = l_1 \ , \qquad x_2 = l_2 \ , \qquad x_3 = l_3 \ ,$$

caractérisent une conique. Si on veut que l'axe $x_1 = 0$ devienne,

relativement à la conique, la polaire du côté opposé, on doit prendre sauf un facteur constant, $l_1 = l_2 l'_3 - l_3 l'_2$.

Supposons la conique rapportée à un triangle autopolaire, son équation ne contiendra plus que des termes carrés; elle est du type

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0 ,$$

dans ce cas, chacun des polynômes l est le conjugué des deux autres. Ainsi ces polynômes seront premiers deux à deux et linéairement indépendants; aucun n'est carré parfait, en outre ils donnent lieu à une identité telle que

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 ; \qquad (17')$$

Réciproquement toutes les fois que trois polynômes, premiers entre eux, sont liés par une semblable relation, celle-ci est unique de son espèce, et ces polynômes sont conjugués deux à deux.

En effet, en différentiant la relation précédente, on a

$$\alpha_1 l_1 l'_1 + \alpha_2 l_2 l'_2 + \alpha_3 l_3 l'_3 = 0 ;$$

par suite

$$\frac{\alpha_1 l_1}{l_2 l'_3 - l_3 l'_2} = \frac{\alpha_2 l_2}{l_3 l'_1 - l_1 l'_3} = \frac{\alpha_3 l_3}{l_1 l'_2 - l_2 l'_1} = \rho , \qquad (17'')$$

relations où le facteur de proportionnalité ρ est nécessairement constant. La proposition est établie.

Il est clair qu'un système de polynômes conjugués le reste par transformation linéaire: si donc on avait pris l'équation de la conique sous sa forme la plus réduite soit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, on aurait eu

$$l_1 = t^2 - 1 , \quad l_2 = 2t , \quad l_3 = i(t^2 + 1) , \quad \text{d'où} \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0 . \qquad (18)$$

C'est le système conjugué *réduit à sa forme normale;* pour cette forme les trois invariants simultanés sont zéro, et les trois discriminants sont égaux à l'unité. On peut, à partir de la forme normale, reproduire le cas général d'un système conjugué, en transformant les polynômes ci-dessus à l'aide d'une transformation linéaire quelconque, après les avoir affectés de coefficients constants arbitraires.

Reprenons ce cas général, et désignons par la notation $(l_2 l'_3)$ le déterminant $l_2 l'_3 - l_3 l'_2$, et ainsi des autres. On a donc

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 , \qquad (19)$$

et

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 l_1 = \rho\left(l_2 l'_3\right), & \alpha_2 l_2 = \rho\left(l_3 l'_1\right), & \alpha_3 l_3 = \rho\left(l_1 l'_2\right), \\ \alpha_1 l'_1 = \rho\left(l_2 l''_3\right), & \alpha_2 l'_2 = \rho\left(l_3 l''_1\right), & \alpha_3 l'_3 = \rho\left(l_1 l''_2\right), \\ \alpha_1 l''_1 = \rho\left(l'_2 l''_3\right), & \alpha_2 l''_2 = \rho\left(l'_3 l''_1\right), & \alpha_3 l''_3 = \rho\left(l'_1 l''_2\right), \end{array}\right\} \quad (20)$$

Dans ce tableau les deux dernières lignes proviennent par dérivation de la première, celle-ci n'étant que la reproduction de la formule (17″) ci-dessus.

Composons avec (20) les quantités

$$\alpha_i\left(2 l_i l''_i - l'^2_i\right) = \alpha_i\left(l_i l''_i - l'_i l'_i + l''_i l_i\right), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nous trouvons de suite

$$\alpha_i\left(2 l_i l''_i - l'^2_i\right) = \rho\left[l_i\left(l'_j l''_k\right) + l'_i\left(l''_j l_k\right) + l''_i\left(l_j l'_k\right)\right] = \rho\left(l_1 l'_2 l''_3\right)^{1}.$$

De là la conséquence suivante : *le polynôme l_i a pour discriminant la quantité*

$$-\frac{\rho}{4\alpha_i}\left(l_1 l'_2 l''_3\right). \qquad (21)$$

Empruntons encore au tableau (20) les combinaisons suivantes ; elles sont constantes comme il ressort de la valeur des seconds membres

$$\alpha_1 l'^2_1 + \alpha_2 l'^2_2 + \alpha_3 l'^2_3 = -\rho\left(l_1 l'_2 l''_3\right), \qquad (22)$$

$$\alpha_1 l_1 l''_1 + \alpha_2 l_2 l''_2 + \alpha_3 l_3 l''_3 = \rho\left(l_1 l'_2 l''_3\right). \qquad (23)$$

III. — Théorie du polynôme du quatrième degré.

7. — Avec trois polynômes conjugués l^2_1, l^2_2, l^2_3, tels que ceux qu'on a défini au § précédent, composons une forme du 4me degré, telle que

$$l = c_1 l^2_1 + c_2 l^2_2 + c_3 l^2_3. \qquad (24)$$

L'identité (17′) qui règne entre les l_i, permet, pour une même forme l, de choisir les coefficients c_i d'une infinité de manières. On pourrait par exemple faire $c_i = 0$, en chassant complètement de

[1] On désigne ici, et plus loin, par i, j, k les indices 1, 2, 3 permutés circulairement d'une manière quelconque ; $\left(l_1 l'_2 l''_3\right)$ représente le déterminant fonctionnel des trois polynômes l_i.

la représentation (24) un des polynômes l_i^2 choisi à volonté ; en réalité, malgré la présence de trois coefficients, la formule (24) ne renferme qu'une double infinité de formes l.

Il importe de remarquer que les seuls carrés contenus dans le faisceau (24) sont précisément l_1^2, l_2^2, l_3^2. En effet, prenons un tel carré qui ne soit égal ni à l_1^2, ni à l_2^2; son expression serait donc

$$L^2 = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 , \qquad \text{avec} \qquad c_1 c_2 \neq 0 .$$

Pour chacune des racines de $L = 0$, nous aurions

$$c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 = 0 , \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l_1' + c_2 l_2 l_2' = 0 .$$

On tire de là $(l_1 l_2') = 0$, ou $l_3 = 0$, condition satisfaite en même temps que $L = 0$; le dit carré L^2 est donc forcément l_3^2, sauf un facteur constant. La proposition est prouvée.

Remarquons maintenant que, les coefficients constants étant exceptés, le système l_1, l_2, l_3 renferme trois paramètres ; la formule (24), nous l'avons dit, en contient deux autres. Ainsi la définition de la forme l possède précisément autant de paramètres que le polynôme le plus général de son degré ; on doit donc prévoir que *tout polynôme du 4me degré peut revêtir la forme* (24).

Pour justifier cette présomption, désignons par a_0 le premier coefficient d'une biquadratique X, par γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ses racines supposées distinctes ; employons les notations (xi) et (ij) pour représenter les différences $x - \gamma_i$ et $\gamma_i - \gamma_j$, et posons

$$\left.\begin{aligned} l_2 + l_3 &= a_0(12)(x4)(x3) , & l_2 - l_3 &= a_0(43)(x1)(x2) , \\ l_3 + l_1 &= a_0(14)(x3)(x2) , & l_3 - l_1 &= a_0(32)(x1)(x4) , \\ l_1 + l_2 &= a_0(13)(x2)(x4) , & l_1 - l_2 &= a_0(24)(x1)(x3) . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Le calcul direct montre immédiatement que ces six relations sont compatibles ; d'ailleurs les trois polynômes $l_1 l_2 l_3$ sont premiers entre eux deux à deux puisque tout facteur commun à l_2 et l_3, par exemple, divisant $l_2 + l_3$ et $l_2 - l_3$, ne peut exister que si les racines γ_i ne sont pas toutes distinctes, cas exclu.

Je dis que ces polynômes l sont conjugués ; en effet, en égalant les trois valeurs de

$$X = a_0(x1)(x2)(x3)(x4) = \frac{l_2^2 - l_3^2}{a_0(12)(43)} = \frac{l_3^2 - l_1^2}{a_0(14)(32)} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{a_0(13)(24)} , \qquad (26)$$

nous obtenons une seule identité entre les carrés l_1^2, l_2^2, l_3^2. En faisant

$$\alpha_1 = a_0(12)(43) , \qquad \alpha_2 = a_0(14)(32) , \qquad \alpha_3 = a_0(13)(24) ,$$

quantités qui vérifient l'équation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \ ,$$

la dite identité s'écrit

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 \ . \tag{27}$$

Les l_i sont donc conjugués ; il importe de remarquer qu'ils ne sont pas ordinairement réduits à la forme normale et que, à moins que le contraire ne soit expressément indiqué, nous en déterminerons toujours les coefficients constants conformément au tableau (25) ci-dessus.

Pour exprimer X en fonction de l_1^2, l_2^2, l_3^2, il est préférable d'employer, au lieu des formes dissymétriques (26), la forme symétrique

$$3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 X = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) l_1^2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) l_2^2 + \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1) l_3^2 \ , \tag{28}$$

que l'on en déduit immédiatement.

On vient donc de démontrer que, *étant donné un polynôme du* 4me *degré* X, *il existe toujours trois polynômes orthogonaux* l_i^2 *tels que* X *soit un polynôme de leur faisceau.*

Une telle représentation est unique, car si on avait, par exemple, de deux manières différentes

$$X = l_1^2 - l_2^2 \ , \qquad \text{et} \qquad X = m_1^2 - m_2^2 \ ,$$

on aurait aussi, en changeant éventuellement le signe de m_2,

$$l_1 + l_2 = a(m_1 + m_2) \ , \qquad l_1 - l_2 = \frac{1}{a}(m_1 - m_2) \ ;$$

et alors le conjugué $l_3 = (l_1 l'_2)$ des polynômes l_1, l_2 serait, à un facteur constant près, égal à celui $m_3 = (m_1 m'_2)$ des polynômes m_1, m_2. On démontrerait de même les égalités $l_1 = m_1$ et $l_2 = m_2$ qui ont lieu, bien entendu, seulement sous réserve des coefficients constants.

C'est donc d'une manière parfaitement déterminée que les polynômes l_i^2 correspondent à X ; en outre, sous l'angle de la définition (24), X peut être considéré comme un individu extrait d'un faisceau de formes biquadratiques qui possèdent en commun les mêmes polynômes conjugués l_i^2, et se trouve étroitement uni avec ces derniers.

Nous avons trouvé plus haut les l_i, correspondant à X, et construit le faisceau en partant de l'élément X décomposé en ses

facteurs; c'est un problème fondamental que d'opérer la même construction à l'aide des seuls coefficients de X. Il suffit pour le résoudre de déterminer, en fonction de X, une seconde forme appartenant au même faisceau.

Pour y parvenir, reprenons les définitions (25) des l_i, et écrivons pour eux les relations (20) du § précédent. Un calcul rapide donne

$$\rho = 1 , \qquad \text{et} \qquad (l_1 l'_2 l''_3) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ,$$

on a donc

$$\alpha_i l_i = (l_j l'_k) , \qquad \alpha_i l'_i = (l_j l''_k) , \qquad \alpha_i l''_i = (l'_j l''_k) , \tag{29}$$

et, pour le discriminant de l_i, la valeur

$$-\frac{\alpha_j \cdot \alpha_k}{4} . \tag{30}$$

Soit maintenant une forme quelconque

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 , \tag{30'}$$

du faisceau en question; il s'agit de calculer la valeur des deux combinaisons suivantes

$$c_1 l_1'^2 + c_2 l_2'^2 + c_3 l_3'^2 , \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l''_1 + c_2 l_2 l''_2 + c_3 l_3 l''_3 ,$$

qu'on a trouvées au § 6 pour le cas $c_i = \alpha_i$.

Pour les déterminer dans le cas général, tirons de (30') les égalités

$$\left.\begin{aligned} l = \sum c_i l_i'^2 , \qquad \frac{l'}{2} = \sum c_i l_i l'_i , \qquad \frac{l''_i}{2} = \sum c_i l_i'^2 + \sum c_i l_i l''_i , \\ \frac{l'''}{2} = 3 \sum c_i l'_i l''_i . \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Intégrons la dernière, et comparons le résultat avec l'avant-dernière formule; nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{l''}{6} &= \sum c_i l_i l''_i + c , \\ \frac{l''}{3} &= \sum c_i l_i'^2 \quad - c . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Pour déterminer la constante c d'intégration, éliminons l'', et remplaçons les discriminants $\frac{1}{4}(l_i'^2 - 2 l_i l''_i)$ par leurs valeurs (30),

il vient

$$3c = \sum c_i \left(l_i'^2 - 2 l_i l_i''\right) = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \sum \frac{c_i}{\alpha_i},$$

ou

$$c = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{3} \sum \frac{c_i}{\alpha_i}. \tag{33}$$

Appliquons ce résultat général au cas particulier $l = X$, qui donne, d'après (28), $c_i = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_k}\right)$; dans ce cas on a $c = 0$, et les formules (31) et (32) deviennent

$$\frac{X''}{3} = \sum c_i l_i'^2, \qquad \frac{X'}{2} = \sum c_i l_i l_i', \qquad X = \sum c_i l_i^2.$$

On tire de là

$$\frac{XX''}{3} - \frac{X'^2}{4} = \sum c_i l_i^2 \sum c_i l_i'^2 - \left(\sum c_i l_i l_i'\right)^2 = \sum c_j c_k \left(l_j l_k'\right)^2. \tag{34}$$

Enfin cette dernière relation s'écrit encore, à cause des formules (29)

$$\frac{XX''}{3} - \frac{X'^2}{4} = \sum c_j c_k \alpha_i^2 l_i^2.$$

Voici donc formé un nouveau polynôme $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48}$, appartenant au même faisceau que X; c'est lui qu'on nomme le *Hessien* de X, et dont la valeur en fonction des coefficients de

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

est

$$\begin{aligned} H = {} & (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 \\ & + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2) x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x + a_2 a_4 - a_3^2. \end{aligned} \tag{35}$$

La relation (34) nous en donne l'expression en l_i^2; quelques réductions faciles, où intervient la condition $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, amènent le Hessien à la forme

$$12H = -l_1^2 - l_2^2 - l_3^2. \tag{36}$$

§ 8. — *Propriétés d'invariance.* Nous savons que le faisceau l_i^2 contient les deux formes X et H; ces polynômes étant certainement indépendants, au moins quand les racines de X sont dis-

tinctes, on peut les adopter comme base du faisceau, à la place des l_i^2. Nous avons donc trois équations telles que

$$H + e_i X = b_i l_i^2 . \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (37)$$

Pour déterminer ces constantes b_i et e_i, faisons d'abord x égal à la racine γ_1 de X; alors $X = 0$, $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\frac{X'^2}{16}$; $l_i = \frac{X'}{2}$; on a donc, dans (37), $b_i = -\frac{1}{4}$.

Ajoutons maintenant les mêmes équations, multipliées soit par 1, soit par α_i, soit encore par $\alpha_i(\alpha_j - \alpha_k)$; il vient, à cause de $\Sigma\alpha_i = 0$, des équations (28) et (36) pour X et H, et de l'identité (27),

$$\sum e_i = 0 , \quad \sum e_i \alpha_i = 0 , \quad \sum e_i \alpha_i (\alpha_j - \alpha_k) = \frac{3}{4} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .$$

On tire immédiatement de là

$$e_i = -\frac{1}{12}(\alpha_j - \alpha_k) .$$

Avant de récapituler les divers résultats qui précèdent, il est opportun de changer les notations en éliminant partout les quantités α_i pour mettre à leur place les trois *invariants irrationnels* e_i du polynôme X. Voici la correspondance entre ces quantités

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{12} = \frac{a_0}{12}[(13)(24) - (14)(32)] , \\ e_2 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{12} = \frac{a_0}{12}[(12)(43) - (13)(24)] , \\ e_3 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{12} = \frac{a_0}{12}[(14)(32) - (12)(43)] , \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

ou bien

$$\alpha_1 = 4(e_2 - e_3) , \quad \alpha_2 = 4(e_3 - e_1) , \quad \alpha_3 = 4(e_1 - e_2) . \qquad (39)$$

Les invariants irrationnels e_i, dont la somme est nulle, vérifient une équation cubique telle que

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0 , \qquad (40)$$

avec les conditions

$$-\frac{1}{4} g_2 = e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 , \qquad \frac{1}{4} g_3 = e_1 e_2 e_3 .$$

Ces dernières quantités, évidemment symétriques par rapport aux racines du polynôme X, sont exprimables rationnellement par

les coefficients de X : voici la valeur de ces invariants rationnels

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \,. \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \,. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Rappelons d'ailleurs que la combinaison

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2 = \Delta \qquad (42)$$

joue le rôle du *discriminant* de X.

La théorie générale conduit donc au résumé suivant où se trouvent récapitulées les propriétés les plus essentielles du polynôme du 4me degré.

a) Désignons toujours par l_i les polynômes conjugués, tels qu'ils sont définis au tableau (25) ; l_i a pour discriminant

$$\frac{-\alpha_j \alpha_k}{4}\,, \qquad \text{ou} \qquad 4(e_i - e_j)(e_i - e_k)\,. \qquad (30'')$$

Alors, si H représente le Hessien de X, les trois combinaisons suivantes sont des carrés, à savoir

$$\mathrm{H} + e_i \mathrm{X} = -\frac{1}{4} l_i^2\,; \qquad (37')$$

ce sont les seuls carrés contenus dans le faisceau $\mathrm{H} + e\mathrm{X}$.

b) Mettons au lieu de $4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = \sqrt{\Delta}$, quantité parfaitement déterminée, on a le tableau

$$\left.\begin{aligned}
&(e_2 - e_3) l_1^2 + (e_3 - e_1) l_2^2 + (e_1 - e_2) l_3^2 = 0\,, && (27') \\
&\mathrm{X}\sqrt{\Delta} = e_1(e_2 - e_3) l_1^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3^2\,, && (28') \\
&\mathrm{X}''\sqrt{\Delta} = 3[e_1(e_2 - e_3) l_1'^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2'^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3'^2]\,, && (32') \\
&\mathrm{H} = \frac{4\mathrm{X}\mathrm{X}'' - 3\mathrm{X}'^2}{48} = -\frac{1}{12}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)\,, && (36') \\
&\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{H}\mathrm{X}' - \mathrm{X}\mathrm{H}') = \frac{1}{4} l_1 l_2 l_3\,, && (43) \\
&\mathrm{T}^2 = -4(\mathrm{H} + e_1\mathrm{X})(\mathrm{H} + e_2\mathrm{X})(\mathrm{H} + e_3\mathrm{X}) = -4\mathrm{H}^3 + g_2\mathrm{H}\mathrm{X}^2 + g_3\mathrm{X}^3\,. && (44)
\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Dans le tableau ci-dessus, les diverses formules sont affectées du même numéro, avec un accent, que celles dont elles ne sont qu'une simple répétition ; seules (43) et (44) sont nouvelles et ont besoin de démonstration.

Il s'y introduit un covariant T, du sixième degré, dont l'annulation caractérise les extremas du quotient $\frac{H}{X}$. Or ces extremas, à cause de

$$\frac{H + e_2 X}{H + e_1 X} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

sont les mêmes que ceux du quotient $\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$, à savoir les racines de l_1, les racines de l_2, celles enfin du polynôme $l_1 l_2' - l_2 l_1'$ ou l_3. La partie littérale de la formule 43 $T = \frac{1}{4} l_1 l_2 l_3$ est ainsi évidente. Quant au coefficient numérique $\frac{1}{4}$, on le trouve en comparant la valeur des deux membres pour une valeur particulière de x, $x = \gamma_1$ par exemple.

On sait par l'Algèbre élémentaire que les divers éléments du tableau (A) sont des invariants, lesquels, sauf introduction de certaines puissances de δ, se reproduisent par les transformations linéaires de déterminant δ. Mais cette propriété résulte à son tour, et immédiatement, du tableau lui-même, ainsi que d'une remarque au sujet du Hessien.

En intégrant l'équation différentielle $4XX'' - 3X'^2 = 0$, on reconnaît que le Hessien de X est identiquement nul dans le seul cas où X est une quatrième puissance exacte. Or si on opère la transformation linéaire $\left(x, \frac{ay + b}{a'y + b'}\right)$, le transformé $Y = (a'y + b')^4 X$ est une puissance quatrième en même temps que X lui-même. Le Hessien H_y de Y, s'annulant avec celui H_x de X, est divisible par ce dernier, et l'on a

$$H_y = \delta^2 (a'y + b')^4 H_x :$$

la partie littérale de la formule est évidente, la présence du facteur δ^2, carré du déterminant de la transformation, se démontre immédiatement, par exemple par le calcul direct.

Revenons alors au tableau (A), et effectuons la transformation dont il s'agit. On voit, d'après la propriété du Hessien, que e_i acquiert le facteur δ^2, puis l_i, T, g_2, g_3 respectivement les facteurs δ, δ^3, δ^4, δ^6.

Les conditions d'invariance relatives à g_2 et g_3, qui sont nécessaires pour l'équivalence, sont aussi suffisantes. Autrement dit, *si deux formes* X et Y *ont le même invariant absolu* $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, ou bien encore, *si deux formes ont des invariants irrationnels* e_i *propor-*

tionnels entre eux, il existe une transformation linéaire changeant X *en* Y.

En effet, dans ce cas, le système l_i d'un des polynômes est transformable dans le système l_i relatif au second; la chose est évidente puisque le déterminant de l_i étant $4(e_i - e_j)(e_i - e_k)$, la proportionnalité des e_i implique celle des invariants fondamentaux des deux systèmes l_i. Soit δ le déterminant de la transformation T opérant le passage de l'un à l'autre; reprenons, pour les deux polynômes les identités (31), on en conclut de suite

$$Y = (a'y + b')^4 X , \qquad H_y = \delta^2 (a'y + b')^4 H_x .$$

Ou bien, *la même transformation* T *qui transforme le premier système* l_i *dans le second, transforme aussi* X *en* Y.

Il est clair que ces questions d'équivalence se réduisent en réalité au cas $\delta = 1$ d'une transformation unimodulaire. Pour qu'une telle transformation de X en Y soit possible, il faut naturellement que les invariants rationnels g_2, g_3, ou irrationnels e_i, soient les mêmes pour X et pour Y. Supposons cette condition remplie, il est facile de trouver toutes les substitutions opérant le passage d'une forme à l'autre.

En effet, soient $l_i(x)$ les polynômes conjugués relatifs à X, $m_i(y)$ ceux relatifs à Y. Nous avons

$$H_x + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 , \qquad H_y + e_i Y = -\frac{1}{4} m_i^2 ,$$

et comme l_i^2 doit se transformer en m_i^2 en même temps que X en Y, il faut que

$$\frac{l_1^2}{m_1^2} = \frac{l_2^2}{m_2^2} , \qquad \text{ou bien} \qquad YH_x - XH_y = 0 ,$$

cette dernière est une conséquence de l'équation $x = \dfrac{ay + b}{a'y + b'}$ qu'on cherche pour passer de X à Y.

Si réciproquement nous avons $YH_x - XH_y = 0$, nous aurons aussi $\dfrac{l_1}{m_1} = \pm \dfrac{l_2}{m_2}$. Suivant la théorie développée au § 5, il résulte de cette équation et du fait de la concordance des deux discriminants pour l_i et m_i, que l'équation

$$F(x, y) = l_1 m_2 \pm l_2 m_1 = 0$$

se partage en deux équations linéaires. Voici donc le résultat.

Si deux polynômes biquadratiques X, Y *ont les mêmes invariants* e_i, *l'équation*

$$YH_x - XH_y = 0 ,$$

se décompose en quatre équations linéaires en x *et en* y. *A chacun des quatre facteurs correspond une transformation unimodulaire de* X *en* Y ; *il n'en existe pas d'autres.*

Remarquons enfin que, dans tout ce qui précède, le degré effectif de X peut fort bien s'abaisser au troisième par le transport à l'infini d'une des racines γ_i. Ainsi parmi les diverses formes équivalentes à X figure le polynôme $4x^3 - g_2 x - g_3$ dont les racines sont, comme nous savons, e_1, e_2, e_3. Il est intéressant de se procurer les polynômes conjugués n_i de cette forme réduite : ce sont d'après les définitions (25)

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 2(x^2 - 2e_1 x - e_1^2 - e_2 e_3) = 2[(x - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)] , \\ n_2 &= 2(x^2 - 2e_2 x - e_2^2 - e_3 e_1) = 2[(x - e_2)^2 - (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)] , \\ n_3 &= 2(x^2 - 2e_3 x - e_3^2 - e_1 e_2) = 2[(x - e_3)^2 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)] . \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ces polynômes n_i ne dépendent ainsi que des e_i, propriété qui n'appartient pas aux conjugués l_i d'une forme X quelconque ayant les e_i pour invariants ; on trouvera d'ailleurs les l_i en opérant sur les n_i une transformation unimodulaire quelconque.

9. — *Théorème de Cayley.* — On sait que toute forme du faisceau X, H, par exemple $a\mathrm{H} + b\mathrm{X}$ possède les mêmes polynômes conjugués l_i^2 que X lui-même ; il serait intéressant de se procurer, pour une telle forme, le système des invariants et covariants fondamentaux qui figurent dans le tableau (A). Nous nous bornerons à esquisser rapidement cette question en cherchant d'abord le Hessien de la forme précédente, lequel faisant partie du faisceau l_i^2, est lui aussi du type AH + BX.

Or le Hessien contient les coefficients de la forme au second degré, on a donc

$$\mathrm{A} = \alpha_0 b^2 + 2\beta_0 ab + \gamma_0 a^2 , \qquad \mathrm{B} = \alpha_1 b^2 + 2\beta_1 ab + \gamma_1 a^2 .$$

Pour déterminer ces polynômes, partons de la remarque que voici. Si X est un carré, ou $\mathrm{X} = f^2$, son Hessien $\mathrm{H} = \frac{4\mathrm{XX}'' - 3\mathrm{X}'^2}{48} = -\frac{(f'^2 - 2ff'')}{12} f^2$. Ce Hessien vaut donc $-\frac{\Delta}{3} f^2$, si Δ représente le discriminant de f.

Appliquons cette remarque à l'expression

$$H + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 ,$$

dont le Hessien doit être $\frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3}(H + e_i X)$. Comparons ce résultat à la règle générale énoncée ci-dessus ; nous avons les conditions d'identification

$$\alpha_0 e_i^2 + 2\beta_0 e_i + \gamma_0 = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

$$\alpha_1 e_i^2 + 2\beta_1 e_i + \gamma_1 = \frac{e_i(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

Remplaçons aux seconds membres

$$\frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} , \quad \text{et} \quad \frac{e_i(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

par les valeurs égales

$$e_i^2 - \frac{1}{12} g_2 , \quad \text{et} \quad e_i^3 - \frac{1}{12} g_2 e_i = \frac{g_2 e_i}{6} + \frac{g}{4} ,$$

on obtient à l'instant

$$\alpha_0 = 1 , \quad \beta_0 = 0 , \quad \gamma_0 = -\frac{1}{12} g_2 ,$$

$$\alpha_1 = 0 , \quad \beta_1 = \frac{g_2}{12} , \quad \gamma_1 = \frac{g_3}{4} .$$

Voici donc le résultat

Le Hessien de la combinaison aH + bX *est un polynôme du même faisceau, égal à*

$$h = \left(b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}\right) H + \left(\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2\right) X . \tag{46}$$

Si on appelle E_i les invariants irrationnels de cette forme $aH + bX$, on trouvera E_i en exprimant que

$$h + E_i(aH + bX) ,$$

ou bien,

$$\left(b^2 - \frac{g_2}{12} a^2 + E_i a\right) H + \left(\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 + E_i b\right) X$$

se réduit à un carré. On a donc, pour déterminer E_i, la condition

$$e_i\left(E_i a + b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}\right) = E_i b + \frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 ,$$

soit, après quelques réductions

$$E_i = ae_i^2 + be_i - \frac{g_3}{6}a \ . \tag{47}$$

Quant au covariant $T = \frac{1}{2}(HX' - XH')$, c'est évidemment un *combinant* du faisceau (X, H) ; si on substitue $aH + bX$ à X, il se reproduit multiplié par le facteur

$$-\frac{1}{4}(4b^3 - g_2 ba^2 - g_3 a^3) \ .$$

IV. — Formes doublement quadratiques.

10. — On nomme *forme doublement quadratique* un polynôme tel que

$$F = \sum a_{mn} x^m y^n \ ; \qquad (m, n = 0, 1, 2) \tag{48}$$

soit, en le développant suivant les puissances de l'une ou de l'autre des variables,

$$F = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 = Y_2 x^2 + 2Y_1 x + Y_0 \ . \tag{49}$$

Les coefficients X_i et Y_i, dans ces représentations, valent

$$X_i = a_{2i}x^2 + 2a_{1i}x + a_{0i} \ , \qquad Y_i = a_{i2}y^2 + 2a_{i1}y + a_{i0} \ . \tag{50}$$

Relativement à ces formes F doublement quadratiques, nous avons à résoudre plusieurs questions importantes qui se rattachent toutes, plus ou moins directement, au problème de l'équivalence de deux pareilles formes par transformation linéaire unimodulaire. Un rôle fondamental, dans toute la théorie, est dévolu aux discriminants de F relatifs à chaque variable ; ce sont les fonctions

$$D_y(x) = X_1^2 - X_0 X_2 \ , \qquad \text{et} \qquad D_x(y) = Y_1^2 - Y_0 Y_2 \ , \tag{51}$$

que nous représentons le plus souvent par les lettres X et Y.

Commençons par exclure le cas où X et Y possèdent des racines multiples ; à ce sujet on doit remarquer que les racines multiples apparaissent ensemble dans les deux polynômes, ou que si X possède une racine multiple, Y en possède une autre.

En effet, il est évident que X et Y sont des covariants de la forme. Si on opère dans F une transformation portant sur les deux variables et telle que

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'} \ , \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\alpha y' + \beta}{\alpha' y' + \beta'} \ , \tag{52}$$

le nouveau polynôme F′ obtenu après avoir chassé les diviseurs est encore doublement quadratique en x' et y' ; sauf des facteurs constants, ses deux discriminants sont les transformés

$$X' = (a'x' + b')^4 X(x) , \qquad Y' = (\alpha'y' + \beta')^4 Y(y) ,$$

de X et Y par (52).

Au moyen d'une transformation semblable amenons une racine de l'équation $X = 0$ à l'origine $x = 0$. En vertu de la condition $F = 0$, à cette racine $x = 0$, simple ou multiple, correspond une racine y de F, celle-là est une racine double. Amenons de nouveau y à l'origine des y par une transformation linéaire. Supposons maintenant que la première racine $x = 0$ soit multiple pour l'équation $X = 0$; on trouve immédiatement pour satisfaire ces diverses conditions les deux hypothèses que voici. Ou bien, on a $a_{00} = a_{01} = a_{10} = 0$, ou bien $a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$. Si c'est le premier système qui est vérifié, $y = 0$ est une racine double de $Y = 0$, si c'est le second $Y_0 = 0$, $Y = Y_1^2$ est un carré parfait ; ce deuxième cas n'existe par conséquent que si l'équation $F = 0$ est décomposable en deux équations linéaires en y.

De toute manière il est établi que X ne peut admettre de racines multiples sans que Y en admette de son côté. Il importe de fixer par une interprétation géométrique la signification du résultat précédent.

La courbe $F = 0$ est une biquadratique C_4 rencontrée en deux points seulement par les parallèles aux axes coordonnés. Elle possède donc deux points doubles à l'infini, un sur chaque axe ; elle est ainsi de 2me classe et de genre 1. Ce sera même, parmi les courbes du 4me degré, la plus générale possédant deux points doubles si, par une perspective, on a pris soin de les transporter tous deux à l'infini.

Il est aisé de voir que la condition pour que C_4 possède un troisième point double est précisément que X admette une racine double. On aperçoit immédiatement ainsi, à cause de la symétrie des axes, l'équivalence de la dite condition pour X et Y ; c'est donc simultanément que X et Y ont des racines multiples, et dans ce cas, le genre de C_4 s'abaisse de 1 à 0.

Si, dans $F = 0$, le coefficient a_{22} est nul, la courbe n'est plus que du troisième degré. Cette cubique C_3 contient les points situés à l'infini sur les deux axes, et ce sont des points ordinaires ; la courbe, d'un genre égal à l'unité, ne deviendra unicursale que si X, et par suite Y, admet une racine double.

Laissons désormais de côté les cas de dégénérescence, nos discriminants X et Y n'auront aucun facteur multiple, et leur degré ne peut s'abaisser au-dessous du troisième.

11. — *Forme normale. Equivalence des deux discriminants.* — Désignons par l_1, l_2, l_3 les polynômes conjugués relatifs à X, par m_1, m_2, m_3 ceux relatifs à Y. Nous savons que les l_i sont linéairement indépendants; c'est dire que les quantités x^2, x, 1 peuvent s'exprimer en fonction linéaire homogène des polynômes l_i; exactement de même on peut remplacer y^2, y, 1 par certaines combinaisons homogènes des m_i.

Cela étant, le polynôme F peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme doublement linéaire

$$(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) l_1 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3) l_2 + (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3) l_3 . \qquad (53)$$

Or je dis que cette réduite à neuf termes se ramène en réalité à un simple trinôme, et que, en numérotant autrement, si besoin est, les trois polynômes m_1, m_2, m_3 dont l'ordre importe peu, elle s'écrira

$$a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 .$$

Pour établir ce fait supposons, pour plus de simplicité, que les l_i, m_i ont été réduits à leur forme normale avec des discriminants égaux à l'unité, et considérons une forme linéaire telle que

$$f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 ;$$

son discriminant est, par définition, égal à

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sum f_i l_i'\right)^2 - 2\sum f_i l_i \sum f_i l_i''\right] .$$

A cause des conditions d'orthogonalité entre les l_i, il se réduit à

$$f_1^2 l_1^2 + f_2^2 l_2^2 + f_3^2 l_3^2 .$$

Appliquons cette règle pour trouver les deux discriminants de la forme bilinéaire ci-dessus (53), où l'on suppose, répétons-le, les l_i et m_i réduits à leur forme normale. On trouve à l'instant

$$X = (a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3)^2 + (a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3)^2 + (a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3)^2 .$$

$$Y = (a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)^2 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3)^2 + (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3)^2 .$$

Or, par supposition, les l_i sont les polynômes conjugués relatifs à X comme les m_i le sont à Y; il faut donc que les seconds membres des formules précédentes se réduisent tous les deux à la

forme purement quadratique, par destruction des doubles produits, de manière que

$$X = A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2 , \qquad \text{et} \qquad Y = B_1 m_1^2 + B_2 m_2^2 + B_3 m_3^2 . \quad (54)$$

Mais d'après un lemme d'Algèbre élémentaire, les conditions moyennant lesquelles les deux sommes de carrés

$$\Phi = (a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 .$$
$$\Phi' = (a_1 x + a_2 y + a_3 z)^2 + (b_1 x + b_2 y + b_3 z)^2 + (c_1 x + c_2 y + c_3 z)^2 ,$$

deviennent purement quadratiques des types

$$\Phi = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 , \qquad \text{et} \qquad \Phi' = B_1 x^2 + B_2 y^2 + B_3 z^2 ,$$

sont des plus limitées. On démontre, en effet, aisément la proposition suivante.

Si Φ et Φ' sont tous deux purement quadratiques et que, en outre, les constantes A_1, A_2, A_3 soient différentes les unes des autres, les trois polynômes

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z , \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z , \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z ,$$

se réduisent nécessairement à des monômes qui, de plus, sont linéairement indépendants.

Pour ne pas allonger, je laisse au lecteur le soin d'obtenir la démonstration, facile, de ces divers points ; je me borne à en faire l'application aux polynômes X, Y auxquels je reviens.

Remarquons que les discriminants des six polynômes l_i, m_i ont été supposés égaux à l'unité, et les polynômes eux-mêmes réduits à leur forme normale. On a donc

$$\sum l_i^2 = \sum m_i^2 = 0 ;$$

si donc, dans la formule (54), pour X, deux coefficients étaient égaux, par exemple $A_1 = A_2$, en remplaçant $l_1^2 + l_2^2$ par la quantité égale $- l_3^2$, ce discriminant serait un carré parfait, cas exclu.

Il faut donc que les formes réduites (54) possèdent trois coefficients distincts ; dès lors, en vertu du lemme ci-dessus, les trois trinômes

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 , \qquad b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 , \qquad c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 ,$$

dégénèrent en trois monômes indépendants. Il suffit de changer au besoin la numérotation des m_i pour leur donner la forme

$$a_1 m_1 , \qquad a_2 m_2 , \qquad a_3 m_3 .$$

Du même coup l'expression doublement quadratique F apparaît sous sa *forme réduite*, soit

$$F = a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 \,.\,^{1} \tag{55}$$

Quant aux discriminants, leur valeur correspondante sera

$$X = a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l_2^2 + a_3^2 l_3^2 \,, \tag{56}$$

$$Y = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 \,. \tag{57}$$

Or, nous savons que des transformations unimodulaires permettent de passer du système l_i^2 au système m_i^2. Les deux théorèmes fondamentaux suivants s'offrent à présent d'eux-mêmes.

a) *Les deux discriminants* X, Y *de la forme* F *sont transformables l'un dans l'autre ; ils sont équivalents et possèdent les mêmes invariants rationnels* g_i, *ou irrationnels* e_i.

b) *A l'aide d'une transformation linéaire opérée sur* y *seul* F *devient symétrique en* x *et en* y.

Arrêtons-nous un instant sur les interprétations géométriques de ces résultats, elles sont classiques et fort simples.

1° Soit d'abord le cas où la courbe $F = 0$ est une cubique ; pour qu'une cubique C_3 se présente sous la forme $F = 0$, il suffit de transporter à l'infini une corde AB de la cubique, puis O désignant un point quelconque de son plan, de prendre OA, OB pour axes coordonnés.

Cela étant, l'équation $X = 0$ détermine les abscisses des tangentes menées par le point B, autres que celles qui touchent la courbe en B ; il y a quatre tangentes pareilles puisque C_3 est de la sixième classe.

L'équation $Y = 0$ déterminera de même les tangentes menées à C_3 par le point A. Le théorème d'équivalence entre X et Y nous donne donc la propriété fondamentale de la géométrie des cubiques.

Qu'on mène par un point A *d'une cubique les quatre tangentes à la courbe telles que leur contact n'ait pas lieu en* A, *le rapport anharmonique de ces tangentes est constant quand* A *varie.*

2° Supposons, en second lieu, que la courbe $F = 0$ soit une biquadratique C_4 non dégénérée. Les points A et B sur la droite de l'infini sont les points doubles de C_4 ; la même interprétation nous apprend que

---

[1] Il est clair que cette même forme réduite peut être adoptée, même si l_i m_i ne sont pas réduits à leur forme normale. Les formules qui suivent pour X et Y supposent simplement, par exemple, que les l_i, m_i ont l'unité pour discriminant.

Si, par les points doubles d'une C_4 *de genre* 1, *on mène quatre tangentes autres que les tangentes aux points doubles eux-mêmes, ces deux faisceaux de quatre tangentes sont projectifs.*

3° Généralisons ceci en considérant une biquadratique gauche C_4. Soient A, B, C trois points de la courbe, choisissons ABC comme plan de l'infini, OA, OB, OC comme axes coordonnés. D'après ces conventions, les équations de C_4 seront

$$ayz + bzx + cxy + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 ,$$
$$a'yz + b'zx + c'xy + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 .$$

Eliminons z, nous trouvons pour définir la projection de la courbe sur le plan OX, OY, une équation doublement quadratique $F = 0$. Donc, toujours par la même interprétation, si par la corde $\overline{BC}$ on mène quatre plans tangents à C_4, ils ont le même rapport anharmonique que quatre autres plans semblables conduits suivant CA ; ou bien

Le rapport anharmonique des quatre plans tangents menés à la biquadratique gauche par une corde quelconque est constant.

4° Il existe encore d'autres interprétations géométriques du théorème d'équivalence ; la plus connue, en dehors des précédentes, est celle fournie par le système de deux coniques. Elle résulte aisément du rapport qui existe entre un semblable système et l'équation doublement quadratique. Halphen a développé ces relations, avec un grand détail, dans les chapitres 10 et 11 de son second volume ; je me borne à citer ici la proposition qui traduit, pour deux coniques, le théorème d'équivalence entre les deux discriminants X et Y.

Deux coniques étant tracées à volonté dans un plan, le rapport anharmonique des points d'intersection, pris sur l'une des coniques, est égal au rapport anharmonique des tangentes communes pris sur l'autre[1].

12. — *Formes symétriques. Conditions d'équivalence.* — Le problème à résoudre consiste à trouver les conditions à satisfaire pour qu'une forme F soit équivalente à une autre F′ ; la première forme doit se changer dans la seconde quand on exécute sur elle les deux transformations linéaires unimodulaires

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'} , \qquad y = \frac{cy' + d}{c'y' + d'} . \tag{58}$$

Une condition d'équivalence se rencontre immédiatement ; il est clair en effet que si F se transforme en F′, les deux discriminants

[1] HALPHEN. *Fonctions elliptiques*, 2me vol. p. 174.

doivent être équivalents deux à deux, X à X′ et Y à Y′. En écrivant les conditions de cette double équivalence entre les discriminants, on se procure toutes les transformations possibles de F en F′, selon le mode susindiqué (58).

La condition précédente, qui est nécessaire pour l'équivalence et fournit toutes les équations de la transformation, n'est pas suffisante. Prenons en effet une forme F et essayons de la reconstruire à partir de ses discriminants X et Y.

Soient e_i les invariants irrationnels communs à X et à Y, l_i les polynômes conjugués de X, m_i ceux de Y ; ces polynômes sont de nouveau déterminés par les formules (25), et leur discriminant, identique pour l_i et m_i, vaut comme nous savons, $4(e_i - e_j)(e_i - e_k)$.

On a entre les l_i l'identité

$$\sum (e_j - e_k) l_i^2 = 0 , \tag{59}$$

tandis que X est donné par l'expression

$$X = \sum \frac{e_i (e_j - e_k) l_i^2}{\sqrt{\Delta}} . \tag{60}$$

Soit donc

$$F = \sum a_i l_i m_i , \tag{61}$$

la représentation bilinéaire de F; son discriminant relatif à y trouvé suivant les règles du § précédent, sera

$$D_y(x) = \sum 4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) l_i^2 . \tag{62}$$

Il faut que D_y coïncide avec X ; en comparant (59) (60) et (62), on voit que la condition nécessaire et suffisante de cette égalité est

$$4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) = \frac{(e_i - \rho)(e_j - e_k)}{\sqrt{\Delta}} ,$$

la quantité ρ désignant une indéterminée.

On en tire

$$a_i^2 = \frac{(\rho - e_i)(e_j - e_k)^2}{\Delta} , \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{(e_j - e_k)\sqrt{\rho - e_i}}{\sqrt{\Delta}} ; \tag{63}$$

tels sont les coefficients à porter dans (61). On voit, par ce calcul, que *si* X *et* Y *sont donnés,* F *peut prendre une infinité de formes différentes qui se distinguent les unes des autres par la valeur du paramètre* ρ.

Si donc une autre forme F′ a des discriminants X′, Y′ respectivement équivalents à X et Y, elle donne lieu aux équations

$$F' = \sum a'_i l'_i m'_i \ , \qquad \text{avec} \qquad a'_i = \frac{(e_j - e_k)\sqrt{\varrho' - e_i}}{\sqrt{\Delta}} \ .$$

Or toute transformation qui changerait F en F′ changera aussi X en X′, Y en Y′, c'est-à-dire l_i en l'_i et m_i en m'_i ; ainsi donc l'équivalence entre F et F′ ne saurait avoir lieu à moins que $\varrho' = \varrho$.

Voici donc un nouvel invariant absolu qui vient s'adjoindre aux deux autres g_2, g_3, pour que F se change en F′, en même temps que X en X′ et Y en Y′ ; il y a, sans plus, trois invariants g_2, g_3, ϱ dont l'égalité est nécessaire, mais aussi suffisante, pour la possibilité de la transformation.

Les expressions a_i ci-dessus dépendent de trois irrationnelles $\sqrt{\varrho - e_i}$, il est aisé de les remplacer par une seule irrationnelle. Soit en effet Z un nouveau polynôme biquadratique en z, possédant les mêmes invariants e_i que X et Y ; nommons-en K le Hessien et n_i les polynômes conjugués.

Posons $\varrho = -\frac{K}{Z}$; alors, d'après la formule (37′)

$$\sqrt{\varrho - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}} \ ;$$

en substituant ces trois valeurs dans l'équation (61), on voit que *tout polynôme* F *aux discriminants* $D_y = X$ et $D_x = Y$ *se présente sous la forme canonique trilinéaire*

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\Delta Z}} \sum (e_j - e_k)\, l_i m_i n_i \ .$$

Répétons que, dans cette forme, le polynôme Z qui contient l'arbitraire z est lui-même quelconque, pourvu qu'il ait les invariants e_i en commun avec X et Y.

Le théorème précédent, facile à vérifier par le calcul direct, peut encore s'énoncer comme suit :

Soient trois polynômes en x, y, *et* z *du* 4me *degré* X, Y, Z ; *supposons-les équivalents ou doués des mêmes invariants* e_i. *Soient encore* l_i, m_i, n_i *leurs polynômes conjugués ; alors la forme triplement quadratique*

$$G = \sum (e_j - e_k)\, l_i m_i n_i \ . \tag{64}$$

admet, par rapport aux trois variables, des discriminants D_x, D_y, D_z *qui sont*

$$D_x = 4\Delta YZ \ , \qquad D_y = 4\Delta ZX \ , \qquad D_z = 4\Delta XY \ . \tag{65}$$

Toutes les propositions qui précèdent concernent des polynômes F quelconques : nous voulons en faire l'application au cas le plus important qui est celui d'une forme F, non seulement quadratique en x et en y, mais encore symétrique par rapport à ces lettres. Il va de soi que, dans ce cas, X et Y d'une part et les l_i, m_i de l'autre, ne diffèrent que par le nom de la variable, x chez les uns, y chez les autres.

Parmi les diverses formes Z possédant les mêmes invariants que X, la plus simple, qui s'offre d'abord, est la forme transformée de X par changement de x en z, de sorte que de même que $Y = X_y$ on ait aussi $Z = X_z$. Ce choix particulier présente un intérêt spécial dans l'étude du théorème d'addition des fonctions elliptiques. Toutefois nous ne l'adopterons pas ici, et nous ferons

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 ;$$

les valeurs qui s'en déduisent pour les polynômes conjugués n_i sont donc celles consignées sous le n° 45.

Cherchons, pour le cas actuel, la constitution du polynôme G (64), en fonction explicite des variables x, y, z, et des coefficients du polynôme X que j'appellerai aussi f_{xx}. Nous avons

$$X = f_{xx} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 .$$

Développons G suivant les puissances de z et remplaçons les n_i par leurs valeurs (45), il vient

$$G = \sum (e_j - e_k)\, l_i m_i n_i = P^0 z^2 + 2P^1 z + P^2 ,$$

$$P^0 = 2[(e_2 - e_3) l_1 m_1 + (e_3 - e_1) l_2 m_2 + (e_1 - e_2) l_3 m_3] ,$$

$$P^1 = -2[(e_1 - e_2 - e_3) l_1 m_1 + (e_2 - e_3 - e_1) l_2 m_2 + (e_3 - e_1 - e_2) l_3 m_3] ,$$

$$P^2 = -2[(e_1^2 + e_2 e_3) l_2 - e_3 l_1 m_1 + \ldots] ,$$

et il ne reste plus qu'à exprimer ces trois quantités en fonction des variables x, y et des coefficients de X.

Remarquons pour cela que si deux polynômes doublement quadratiques, et en outre symétriques, L_{xy}, M_{xy} — comme le sont les quantités P^i — deviennent égaux quand $x = y$, ce qui constitue le cas de coïncidence, ces polynômes ne diffèrent l'un de l'autre que par un terme du type $a(x - y)^2$.

En effet le quotient $\dfrac{L_{xy} - M_{xy}}{x - y}$ doit être bilinéaire, entier, et en outre gauche relativement à la permutation des deux variables. En écrivant ce quotient sous la forme $axy + bx + cy + d$, il faut donc que

$$a = 0 , \qquad d = 0 , \qquad b + c = 0 .$$

et l'on a bien $L_{xy} - M_{xy} = a(x-y)^2$. De cette remarque il résulte qu'une fonction telle que L_{xy} est complètement définie quand on connaît les deux valeurs L_{xx} et $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right)_{x=y}$; c'est cette observation que nous allons employer trois fois de suite pour déterminer les quantités $P^{(i)}$.

A l'égard de la première, on remarquera que dans le cas de coïncidence $x = y$, on a $l_i = m_i$; alors, en vertu de l'équation (27), P^0 s'annule. On a donc $P^0 = A(x-y)^2$; mais, comme d'autre part,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = \sum (e_j - e_k)\, l_i'^2 = -A ,$$

et que la somme nous est connue d'après (22), on tire

$$A = 4\sqrt{\Delta} , \qquad \text{et} \qquad P^0 = 4\sqrt{\Delta}(x-y)^2 .$$

Appliquons le même raisonnement à $P^{(1)}$; d'après l'équation (28') on a dans le cas de coïncidence

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta}X = -2\sqrt{\Delta} f_{xx} .$$

Or, en invoquant le résultat (32')

$$\left(\frac{\partial^2 P^1}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = -2\sum e_i (e_j - e_k)\, l_i'^2 = -\frac{2}{3} X''\sqrt{\Delta} ;$$

dédoublons donc la forme f_{xx} biquadratique en une forme doublement quadratique et symétrique; on trouve immédiatement, d'après ce qui précède, l'équation

$$f_{xy} = a_0 x^2 y^2 + 2a_1 xy(x+y) + a_2(x^2 + 4xy + y^2) + 2a_3(x+y) + a_4 , \quad (66)$$

et

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta} f_{xy} .$$

Soit enfin $P^{(2)} = -2(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3)\, l_1 m_1 + \ldots$; nous avons

$$3e_1^2 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) + \frac{1}{4} g_2 , \quad \text{et} \quad 3e_2 e_3 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) - \frac{1}{2} g_2 ;$$

donc

$$3(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{1}{4} g_2 (e_2 - e_3) .$$

Cette identité, et ses analogues obtenues par permutation, amènent P^2_{xy} à la forme

$$P^2_{xy} = \frac{\sqrt{\Delta}}{3} \sum l_i m_i + \frac{g_2}{3}\sqrt{\Delta}(x-y)^2 .$$

Désignons maintenant par H_{xx} le Hessien de f_{xx}, et prenons de nouveau le cas de coïncidence. En vertu des formules (36'), nous avons

$$P^2_{xx} = -4\sqrt{\Delta}H_{xx} , \qquad \left(\frac{\partial^2 P^2_{xy}}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = \frac{\sqrt{\Delta}}{3}\sum l_i'^2 - \frac{2}{3}g_2\sqrt{\Delta} .$$

Appliquons au Hessien la relation générale (32), nous avons

$$\sum l_i'^2 = -4H''_{xx} - \frac{16}{3}[(e_3-e_1)(e_1-e_2)+\ldots] = -4H''_{xx} + 4g_2 .$$

Voici donc les conditions à employer pour déterminer P^2_{xy},

$$P^2_{xx} = -4\sqrt{\Delta}H_{xx} , \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2 P^2}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\Delta}H''_{xx} ;$$

elles donnent, après un court calcul, par dédoublement du Hessien H_{xx}

$$P^2_{xy} = -4\sqrt{\Delta}H_{xy} ,$$

formule dans laquelle H_{xy} a la signification suivante

$$\begin{aligned} 4H_{xy} = {} & 4(a_0a_2 - a_1^2)x^2y^2 + 4(a_0a_3 - a_1a_2)xy(x+y) + (a_0a_4 - a_2^2)(x+y)^2 \\ & + 8(a_1a_3 - a_2^2)xy + 4(a_1a_4 - a_2a_3)(x+y) + 4(a_2a_4 - a_3^2) . \end{aligned} \tag{67}$$

Résumons. *Si une équation doublement quadratique et symétrique en* x, y *admet pour discriminant la forme*

$$X = f_{xx} = a_0x^4 + 4a_1x^3 + \ldots ,$$

elle a pour expression

$$H_{xy} + zf_{xy} - z^2(x-y)^2 = 0 , \tag{68}$$

où les symboles f_{xy} *et* H_{xy} *ont les valeurs* (66) *et* (67), *tandis que* z *désigne une arbitraire.*

De plus, le discriminant relatif à z de cette formule (68) est égal

au produit $f_{xx} f_{yy}$, ainsi que nous savons. *On peut donc écrire* (68) *sous la forme résolue*

$$z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2} . \tag{69}$$

Enfin une dernière forme de la même relation est digne de remarque, comme s'étant présentée à Euler[1] et Lagrange[2] dans leurs recherches sur le théorème d'addition des intégrales elliptiques. La voici.

Dans le carré $\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2$, remplaçons le double produit $-2\sqrt{f_{xx} f_{yy}}$ par sa valeur tirée de (69), il vient

$$\frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2} + 4z .$$

Or, si l'on fait

$$Q_{xy} = \frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2} ,$$

et qu'on remarque les identités

$$\left(\frac{\partial f_{xy}}{\partial x}\right)_{x=y} = \frac{1}{2} f'_{xx} . \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{xy}\right)_{x=y} = \frac{1}{6} f''_{xx} ,$$

on voit que la valeur de coïncidence est

$$Q_{xx} = \frac{f''_{xx} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{2} = \frac{1}{3} f''_{xx} = 4a_0 x^2 + 8a_1 x + 4a_2 .$$

D'ailleurs Q_{xy} est entier, symétrique et du second degré en x et y ; le terme du second degré est évidemment

$$a_0 \frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2}{(x-y)^2} = a_0 (x+y)^2 .$$

La valeur de Q_{xy} se dégage de suite de ce double renseignement, elle est

$$Q_{xy} = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4a_2 .$$

La nouvelle forme cherchée pour l'équation (68) se déduit de là, la voici :

$$\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2 = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4(a_2 + z) . \tag{70}$$

---

[1] EULER. *Institutiones Cal. Integr.*, vol. I, Sectio secunda c. VI.
[2] LAGRANGE. *Oeuvres, éd. Serret*, II, p. 533.

13. — *Détermination des invariants.* — Continuons à nous limiter aux équations doublement quadratiques symétriques. Ces équations possèdent comme nous savons, trois invariants qui sont g_2, g_3, et z; la détermination des invariants est extrêmement simple. Car, en premier lieu, g_2 et g_3 sont les invariants rationnels de la fonction $D_y = f_{xx}$; F_{xy} étant donné ils se trouvent ainsi d'une manière immédiate.

En second lieu, on a identiquement, comme nous savons,

$$F_{xy} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xy} + zf_{xy} - z^2 (x - y)^2] ; \qquad (71)$$

à leur tour les expressions f_{xy} et H_{xy} sont toutes connues quand f_{xx}, ou F_{xy}, sont donnés ; il suffit donc d'identifier les deux membres de (71) pour avoir le dernier invariant cherché z. On peut même, avant de procéder à cette identification, faire $x = y$, ce qui ramène l'équation précédente à la forme plus simple

$$F_{xx} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xx} + zf_{xx}] ; \qquad (72)$$

sous l'une ou l'autre de ces diverses formes, on voit que le problème de la détermination de z n'offre aucune difficulté.

Halphen a donné, pour trouver les trois invariants, une règle sur laquelle il nous faut revenir[1]; il propose de former une *équation caractéristique* dont les racines seraient proportionnelles aux trois quantités $z - e_i$. Mais la page 366 où est formée cette équation contient, à côté de quelques obscurités, une erreur qui compromet singulièrement le résultat énoncé.

Je suppose qu'on ait sous les yeux le passage en question ; on y verra que l'illustre auteur propose de considérer la forme

$$s F_{xy} + (x - y)^2$$

comme une fonction des deux variables

$$xy = \xi , \qquad x + y = \eta .$$

Le discriminant de la forme quadratique en $\xi\eta$ ainsi formée serait précisément l'équation caractéristique. Quelques essais suffisent à montrer l'inexactitude de la règle; la raison en est facile à découvrir.

---

[1] HALPHEN. *Fonctions elliptiques*, 2me vol. p. 344, 364-366.

Prenons généralement la forme

$$F_{xy} = aH_{xy} + bf_{xy} + c(x-y)^2 , \tag{73}$$

à trois coefficients arbitraires ; cherchons à en former le discriminant D_y relatif à y.

Nous savons que D_y est du type $AH_{xx} + Bf_{xx}$ et que les constantes A et B sont quadratiques en a, b, c. De plus, si $a = b = 0$, F_{xy} est un carré et D_y doit s'annuler ; c'est donc que A et B sont linéaires en c.

Considérons en second lieu le cas $a = 0$, et soit

$$f_{xy} = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 .$$

Le discriminant de f_{xy} est

$$X_1^2 - X_0 X_2 = - H_{xx} ;$$

celui de

$$F_{xy} = bf_{xy} + c(x-y)^2 ,$$

est égal à

$$(bX_1 - cx)^2 - (bX_2 + c)(bX_0 + cx^2) = - b^2 H_{xx} - bcf_{xx} .$$

Enfin, et en dernier lieu, si dans (73) on fait $a = 1$, $b = z$, $c = -z^2$, le polynôme F_{xy} se confond avec le premier membre de (68), le discriminant est alors égal au produit

$$\frac{1}{4}(4z^3 - g_2 z - g_3) f_{xx} .$$

Il suffit de rapprocher ces trois cas particuliers pour obtenir le discriminant D_y de la formule générale (73), sous la forme

$$D_y = -(b^2 + ac) H_{xx} - \left(\frac{g_3}{4} a^2 + \frac{g_2}{4} ab + bc\right) f_{xx} ; \tag{74}$$

on y lit, une fois de plus, ce fait fondamental qu'il existe une simple infinité de polynômes symétriques F_{xy} possédant un déterminant donné.

Voici maintenant la conséquence à tirer de (74). Parmi les formes F_{xy}, à quel caractère reconnaître celle qui sont décomposables en facteurs linéaires en x et en y ? La réponse est immédiate : il faut et suffit que le discriminant D_y soit un carré parfait. Or, nous con-

naissons les seuls carrés contenus dans la relation (74); ils dépendent de la condition

$$e_i = \frac{4bc + g_2 ab + g_3 a^2}{4(b^2 + ac)} ,$$

qui peut s'écrire également

$$(b - ae_i)\left(c - e_i b - e_i^2 a + \frac{g_2}{4} a\right) = 0 . \qquad (75)$$

Cette condition est donc réalisée si $b = ae_i$, quelle que soit la valeur de c; ainsi

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2$$

est toujours décomposable en facteurs linéaires. C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier à l'instant; car $H_{xx} + e_i f_{xx}$ se réduisant au carré

$$-\frac{1}{4} l_i^2 = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2 ,$$

on obtient le polynôme décomposable

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2 = (\alpha xy + \beta(x + y) + \gamma)^2 + \delta(x - y)^2 . \qquad (76)$$

Mais, c'est ici le point délicat, *les facteurs de la décomposition ne sont pas symétriques en* x *et en* y, *ils ne sauraient donc s'exprimer en* ξ *et en* η.

Soit D le discriminant de F_{xy} par rapport aux variables ξ, η; si D s'annule, F_{xy} est décomposable en facteurs linéaires en ξ, η; ou, si on préfère, F_{xy} se partage alors en facteurs bilinéaires relativement à x, y et *symétriques*. Aussi le discriminant de la forme (76) n'est pas nul, quoique cette forme soit décomposable, parce qu'elle l'est de manière non symétrique.

Il est d'ailleurs facile de trouver le discriminant D de la forme générale par rapport aux variables ξ, η. La fonction D est du troisième degré en a, b, c; la condition $D = 0$ entraîne la relation (75), et comme elle n'est pas vérifiée si $b = ae_i$, elle le sera forcément en annulant le second facteur de la dite relation. On conclut de là

$$D = 4\Pi\left(ae_i^2 + be_i + c - \frac{g_2}{4} a\right) ; \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (77)$$

le coefficient numérique de cette formule se vérifie sur un essai particulier, par exemple en faisant $a = c = 0$, $b = 1$, $F_{xy} = f_{xy}$.

V. — *Les Intégrales elliptiques.*

14. — Les résultats précédents s'appliquent immédiatement aux intégrales elliptiques de première espèce. Convenablement interprétés ils contiennent la théorie complète de la réduction de ces intégrales à la forme normale de Weierstrass sans aucune résolution d'équations de degré supérieur ; en outre, et du même coup, ils conduisent au théorème d'addition des intégrales elliptiques. Cette fusion en une seule formule de deux théories qui sembleraient de prime abord être bien éloignées l'une de l'autre est des plus remarquables ; elle découle tout naturellement des théorèmes concernant les équations doublement quadratiques.

Soit F un polynôme doublement quadratique que je suppose d'abord non symétrique

$$F = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 = Y_2 x^2 + 2Y_1 x + Y_0 . \tag{78}$$

Posons $F = 0$, et différentions, il vient

$$(X_2 y + X_1)\, dy + (Y_2 x + Y_1)\, dx = 0 ; \tag{78'}$$

ou bien, à cause de $X_2 y + X_1 = + \sqrt{X_1^2 - X_0 X_2} = \sqrt{X}$, et $Y_2 x + Y_1 = \sqrt{Y}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0^{1} . \tag{79}$$

Cette formule (78) donne donc une transformation algébrique d'une intégrale elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en une autre $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour obtenir cette transformation explicitement, il faut, X étant donné, retrouver la forme F (78), c'est-à-dire décomposer X sous la forme $X = X_1^2 - X_0 X_2$. Une semblable décomposition est possible de ∞^4 manières, puisque X_1 contient trois paramètres et qu'un coefficient arbitraire peut passer de X_0 à X_2.

A chacune des décompositions ci-dessus correspond une forme F(78), partant un polynôme Z ; d'après cet aperçu il semblerait que, X étant donné, il lui corresponde ∞^4 polynômes transformés Y. S'il en était ainsi, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ pourrait, sauf un facteur constant, se transformer par l'intermédiaire d'une équation doublement quadratique en toute autre différentielle elliptique $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

---

[1] Pour ne pas allonger, je supprime dans ce § les discussions de signe des radicaux ; le lecteur fera bien d'ailleurs de leur vouer l'attention qu'elles méritent.

Mais nous savons que, en réalité, les choses se passent différemment.

Au lieu d'être quelconques les polynômes X et Y sont toujours équivalents ; comme conséquence de ce fait, parmi nos ∞^4 transformations de X en Y, il en existe ∞^1 qui transforment X en un seul et même Y. Par exemple, lorsque F est symétrique, Y ne diffère de X que par la dénomination de la variable ; les dites ∞^1 transformations constituent l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler (79) et correspondent au théorème d'addition, les autres ∞^3 transformations changent X en ses équivalents.

Reprenons d'abord le cas général d'une transformation non-symétrique $F = 0$, et supposons donnés les polynômes X, Y aux invariants communs g_2, g_3.

Il existe ∞^1 formes F dont les discriminants D_y et D_x coïncident respectivement avec X et Y ; nous avons appris à construire toutes ces formes à la page ( ), et nous avons vu qu'il s'y introduit un troisième polynôme arbitraire Z possédant en commun avec X et Y les invariants g_2, g_3.

Les trois discriminants de la forme F, triplement quadratique ainsi constituée sont, comme nous l'avons vu,

$$D_x = 4\Delta YZ\ , \qquad D_y = 4\Delta ZX\ , \qquad D_z = 4\Delta XY\ . \tag{80}$$

Si donc on différentie, par rapport aux trois variables, l'équation $F = 0$, comme on l'avait différentiée en (78′) par rapport à x et à y seulement, on obtient

$$\sqrt{D_x}\,dx + \sqrt{D_y}\,dy + \sqrt{D_z}\,dz = 0\ ,$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0\ . \tag{81}$$

Telle est la formule générale que nous avions en vue.

Pour l'appliquer reprenons F symétrique en x et en y ; donnons-nous $X = f_{xx}$ et $Y = f_{yy}$, choisissons enfin $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$, où g_2 et g_3 sont, comme toujours, les invariants de f_{xx}.

Dans ces conditions, l'équation $F = 0$, s'écrit sous plusieurs formes équivalentes dont nous avons vu plus haut les principales ; ce sont

$$\left.\begin{aligned} &H_{xy} + z f_{xy} - z^2 (x-y)^2 = 0\ , \\ &z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2}\ , \\ &\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2 = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4(a_2 + z)\ . \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Toutes ces formules donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} + \frac{dy}{\sqrt{f_{yy}}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{83}$$

Si en premier lieu, on suppose que dans le système (82), z représente une constante arbitraire, dz est nul; dans cette hypothèse, le système (82) nous met en possession de l'intégrale générale de l'équation d'Euler, comme on le voit dans l'équation (83) dont le second membre est nul d'après l'hypothèse. Je n'ai pas à exposer ici par quelles transformations faciles, on en conclut le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Si, en second lieu, nous donnons dans (82) à la lettre y la signification d'un paramètre constant, l'équation différentielle devient, quelle que soit la valeur de cette indéterminée,

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}; \tag{84}$$

dans cette acception, le système (82) opère la réduction d'une différentielle elliptique quelconque $\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}}$ à la forme normale de Weierstrass $\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$.

Faisons enfin $x = y$, la première formule (82), donne la relation entre x et z sous la forme

$$z = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \tag{85}$$

équivalente, d'après (83), à l'équation différentielle

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{86}$$

C'est la formule de duplication obtenue, pour la première fois, par M. Hermite. Par son moyen, le même problème de la réduction à la forme de Weierstrass se trouve résolu rationnellement. Le procédé usuel, pour démontrer cette formule remarquable, consiste à la déduire des équations générales (43) et (44) relatives au polynôme du 4me degré; ce procédé a le défaut de laisser dans l'ombre la parenté qui unit la transformation (85) avec le théorème d'addition.

Supposons toujours donnée la forme f_{xx}, faisons-lui correspondre un argument elliptique u tel que

$$pu = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \qquad p'u = -\frac{T_{xx}}{f_{xx}^{3/2}}, \tag{87}$$ [1]

qui donnent, comme on vient de voir

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -du. \tag{88}$$

Soient de même v et w des arguments elliptiques correspondant à f_{yy} et à Z ; on a donc

$$pv = -\frac{H_{yy}}{f_{yy}}, \qquad p'v = -\frac{T_{yy}}{f_{yy}^{3/2}}, \qquad \frac{2dy}{\sqrt{f_{yy}}} = -dv, \tag{89}$$

$$pw = -\frac{K}{Z}, \qquad p'w = -\frac{U}{Z^{3/2}}, \qquad \frac{2dz}{\sqrt{Z}} = -dw. \tag{90}$$

De ces formules (87) à (90), nous tirons

$$pu - e_i = -\frac{H_{xx} + e_i f_{xx}}{f_{xx}} = \frac{l_i^2}{4f_{xx}}, \quad \text{donc} \quad \sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}; \tag{91}$$

on a ainsi

$$\sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}, \quad \sqrt{pv - e_i} = \frac{m_i}{2\sqrt{f_{yy}}}, \quad \sqrt{pw - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}}. \tag{92}$$

Portons ces valeurs dans l'équation doublement quadratique $G = 0$, écrite sous sa forme trilinéaire (64), ainsi que dans l'équation différentielle correspondante (83), nous obtenons le théorème suivant ;

Si trois arguments elliptiques u, v, w *sont liés par la condition*

$$\sum (e_j - e_k)\sqrt{(pu - e_i)(pv - e_i)(pw - e_i)} = 0, \tag{93}$$

on a aussi

$$d(u + v + w) = 0, \qquad \text{ou} \qquad u + v + w = \text{const.} \tag{94}$$

Remplaçons les $\sqrt{pu - e_i}$ etc... par leurs valeurs $\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}$; le théorème d'addition précédent prend un autre énoncé.

---

[1] T_{xx} représente ici le covariant T du tableau (A). K et U sont, de même, le Hessien et le covariant en question relatifs au polynôme $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$.

La somme

$$(e_2 - e_3)\sigma_1 u \sigma_1 v \sigma_1 w + (e_3 - e_1)\sigma_2 u \sigma_2 v \sigma_2 w + (e_1 - e_2)\sigma_3 u \sigma_3 v \sigma_3 w \ , \qquad (95)$$

qui est nulle pour $u = v = w = 0$, *le reste quand* $u + v + w = 0$; *en outre, à cause de la parité des* $\sigma_i(u)$, *la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes* $\pm$ *dans la formule*

$$u \pm v \pm w = 0 \ .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k)\sigma_i(u)\sigma_i(v)\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\Pi\sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right); \qquad (96)$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. Cailler (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

1. — Considérons le système

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r \ ,$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx$$