Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1914)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUE SUR LES POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE A POINT DOUBLE

Autor: Bydžovsky, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15538

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REMARQUE SUR LES POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE A POINT DOUBLE[1]

La construction des points d'inflexion d'une cubique à point double revient, au fond, à la construction des trois éléments unis d'une correspondance (1, 2). Sous ce point de vue, le problème n'est point nouveau, puisque la définition des points d'inflexion par une correspondance (1,2), a déjà été donnée par Em. Weyr[2] et que la construction des points unis d'une correspondance (1,2) générale par l'intersection de deux coniques est un problème depuis longtemps résolu[3].

Mais on peut se poser un autre problème au sujet de la construction des points d'inflexion d'une cubique unicursale : c'est celui de construire la droite, joignant les trois points d'inflexion et que l'on peut appeler ligne des inflexions. On verra dans la suite que cette construction se fait par la règle seule ; aussi cette construction résume-t-elle une grande partie de la théorie des points d'inflexion.

J'appelle conjugués[4] deux points qui ont le même point tangentiel. Rappelons deux propriétés de ces points :

a) La ligne qui joint deux points conjugués, dont le point tangentiel est A, rencontre la courbe à nouveau au point A′, conjugué du point A[5].

b) Toutes ces lignes touchent une même conique[6].

Les couples de points conjugués forment une involution sur la courbe ; ils sont donc découpés par les coniques d'un faisceau [F]

---

[1] A propos de la communication de M. L. Crelier, *Sur les correspondances en géométrie synthétique* (V. l'*Enseignement mathématique*, n° du 15 nov. 1913).

[2] E. Weyr, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde* (Leipzig, 1869), p. 93.

[3] V. p. ex. H. Schrœter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888), p. 20.

[4] V. p. ex. H. Schrœter, *l. c.*, p. 6.

[5] V. p. ex. H. Schrœter, *l. c.*, p. 11.

[6] V. Em. Weyr, *l. c.*, p. 103.

passant par le point double O, par deux points fixes choisis arbitrairement sur la courbe et par un quatrième point Q situé hors de la courbe et déterminé par les trois précédents. Prenons pour les deux points fixes sur la courbe un couple de points conjugués P,P′. Le faisceau [F] est lié par une correspondance homographique au faisceau de droites projetant du point O les points tangentiels communs des couples de points conjugués. Ces deux faisceaux engendrent une cubique C ayant O pour point double et passant par les points P,P′,Q ; on conçoit facilement qu'elle coupe en outre la courbe primitive aux trois points d'inflexion. La courbe C se compose de trois droites. En effet : à la droite $\overline{OP}$ correspond dans le faisceau [F] la conique découpant les deux points conjugués dont le point tangentiel est P ; ces deux points sont situés (théorème *a*) sur une droite *p* contenant P′ ; comme cette droite a trois points communs avec la conique, cette courbe se compose de la droite *p*, qui doit contenir le point Q, et de la droite OP. Donc, cette droite fait partie de la courbe C ; il en est de même de la droite OP′. Appelons *i* la troisième droite concourant à former la courbe C. On conclut du raisonnement qui précède que la droite *i* contient les trois points d'inflexion de la courbe ; que cette droite contient le point Q ; que par le point Q passent aussi la droite *p* et la droite analogue *p′*, laquelle passe par le point P et joint les points dont le point tangentiel est P′.

On a le théorème : *Prenons deux couples de points conjugués dont les points tangentiels communs sont eux-mêmes conjugués. Les droites joignant les deux couples se rencontrent sur la ligne des inflexions.*

On pourrait déduire de ce théorème une construction quadratique de la ligne des inflexions.

On a vu que chaque conique passant par le point double, par le couple de points conjugués P,P′ et par un autre couple arbitraire de tels points passe par le même point Q situé sur la droite *i*. Soit B le point d'intersection de la droite OQ avec la courbe ; et soient R,R′ les points conjugués ayant B pour point tangentiel. La conique déterminée par les points O,P,P′R,R′ passe aussi par le point Q. Puisqu'on peut intervertir les rôles des deux couples P,P′R,R′, on conçoit facilement que la droite joignant le point double au point tangentiel du couple P,P′ rencontre la conique pour la deuxième fois en un point de la ligne des inflexions.

Donc : *la conique déterminée par le point double et par deux couples de points conjugués rencontre la droite des inflexions aux mêmes points que les deux droites qui joignent le point double aux points tangentiels des deux couples.*

Faisons coïncider les deux couples ; on conclut du théorème précédent : *la conique passant par le point double et touchant la courbe en deux points conjugués touche la ligne des inflexions au*

point où cette ligne est rencontrée par la droite qui joint le point double au point tangentiel du couple des points conjugués.

On déduit de ce théorème la *construction* suivante *de la ligne des inflexions* : construisons la tangente en un point P de la courbe et déterminons son point tangentiel A ; menons de ce point la seconde tangente à la courbe et déterminons son point de contact P′. La ligne PP′ rencontre la droite $\overline{OA}$ au point A_1 ; construisons le conjugué harmonique Q du point O par rapport aux points A, A_1, et le conjugué harmonique N du point A_1 par rapport aux points P, P′ ; la ligne joignant les points Q, N est la ligne des inflexions. Cette construction se fait par la règle seule.

Puisque la ligne PP′ contient le point A′ conjugué au point A, il est facile de voir que la ligne NA contient le couple de points conjugués ayant A′ pour point tangentiel. Les lignes NA, NA_1 sont par suite deux tangentes de la conique-enveloppe des droites qui contiennent les couples de points conjugués (théorème *b)* ; il suit de la construction précédente que *la ligne des inflexions est la polaire du point double par rapport à cette conique.* Les tangentes au point double de la courbe sont aussi des lignes contenant des couples de points conjugués (ce sont les deux points superposés au point double ; il s'ensuit que *la ligne des inflexions rencontre la conique aux deux points où elle est coupée par les tangentes au point double*[1].

B. Bydžovsky (Prague-Karlin).

---

[1] J'ai publié une autre démonstration de la construction de la ligne des inflexions dans *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, t. XXXV (Prague, 1905).