I INTRODUCTION

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LES PRINCIPES ANALYTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE

I

INTRODUCTION

Le raisonnement géométrique. — Précisons d'abord ce que l'on doit entendre par la question des Principes de la Géométrie.

Si l'on examine avec quelque attention les démonstrations géométriques — et les considérations que nous allons développer s'étendent facilement aux autres sciences rationnelles —, on reconnaît rapidement que les arguments employés se divisent en deux catégories.

Les arguments de la première catégorie consistent à mettrent en évidence l'identité *logique* (de λόγος, langage) d'une proposition avec une autre déjà admise, combinée généralement avec des définitions de mots n'ayant pas d'autre effet que d'abréger le discours.

C'est à ce procédé de raisonnement que s'appliquent presque exclusivement les conseils généralement donnés — par Descartes, Pascal et bien d'autres — en vue d'enseigner à raisonner correctement.

Il ne s'agit là que de combinaisons plus ou moins transcendantes de mots ou de signes, et la possibilité d'introduire des définitions nouvelles assure l'extension indéfinie de la science.

On conçoit la possibilité virtuelle de remplacer, pour une telle opération, le cerveau humain par une machine à raisonner.

C'est là le raisonnement proprement *logique*.

Ce procédé de raisonnement n'est pas le seul employé en Géométrie.

Considérons, par exemple, la démonstration donnée par Legendre de la proposition : « D'un point A pris hors d'une droite CD on peut abaisser une perpendiculaire sur cette droite. »

« Prenons sur CD un point B, et menons AB; faisons « l'angle DBA′ égal à l'angle DBA; prenons BA′=BA, et ti- « rons la droite AA′. Les deux triangles ABE, A′BE, ont le « côté BE commun; AB=BA′, et l'angle ABE est égal à « l'angle EBA′; ils sont donc égaux. On en conclut, etc. »

Le raisonnement ci-dessus n'a une signification que moyennant une figure. Nous devons effectuer, ou tout au moins nous représenter, les diverses opérations indiquées et en *constater* ainsi la possibilité, en confondant dans une même évocation les éléments géométriques et leurs propriétés.

Ce n'est plus de la pure logique.

Si, à la rigueur, la deuxième phrase du raisonnement cité peut être assez facilement ramenée, par une interprétation purement logique, à des propositions antérieurement énoncées, il ne saurait en être de même de la première phrase et celle-ci suppose que l'on suit les opérations indiquées sur une figure, en évoquant mentalement les propriétés que comportent implicitement les notions de droite, d'angle et d'égalité géométrique.

L'on effectue ainsi un raisonnement par images sensorielles.

C'est là le raisonnement *imaginatif* — certains disent *intuitif*.

Ce procédé, dans lequel on se contente de constater *de visu* les propriétés admises pour les notions mises en œuvre, dispense de la tâche difficile d'exprimer explicitement ces propriétés.

Son danger consiste en ce que, entraîné par l'image sensorielle, forcément particulière, qui sert de guide au raisonnement, on risque d'attribuer aux conclusions une généralité illégitime; bref ce procédé distingue mal ce qui découle *logiquement* des propositions antérieures de ce qui est dû

aux propriétés de la figure particulière que l'on a devant les yeux.

Les deux sortes de raisonnement que nous avons caractérisées par les qualificatifs de *logique* et *imaginatif* peuvent l'être aussi par ceux de *analytique* et *synthétique*, ces termes se justifiant par cette considération que la première catégorie nécessite une *décomposition* préalable des notions en leurs différentes propriétés, afin de préciser nettement celles qui interviennent, tandis que, dans la deuxième catégorie, chaque notion se présente avec toutes ses propriétés, sans que l'on distingue nettement celles qui sont réellement utilisées dans la déduction.

Avertissons, à cette occasion, que, dans la suite de la présente étude, les mots *analyse* et *analytique* se rapporteront exclusivememt à l'Analyse mathématique, c'est-à-dire à la Théorie des Nombres.

La question des fondements. — La question des Principes de la Géométrie a pour objet la détermination précise de tout ce qui, en Géométrie, ne peut être rattaché à la pure logique et la distinction de la part d'influence qui revient aux différents concepts qui seront ainsi mis en évidence.

La solution de la question comporte l'établissement d'un système de *fondements* permettant d'éliminer totalement (du moins théoriquement) le raisonnement imaginatif et comprenant :

1° des notions fondamentales, au moyen desquelles toutes les autres puissent être construites par de simples définitions *logiques* (*alias* : définitions de mots) ;

2° des *axiomes*, c'est-à-dire des propositions exprimant certaines propriétés de ces notions fondamentales, telles que les autres propositions de la Géométrie puissent en résulter par déduction logique, avec combinaison des définitions que l'on est successivement conduit à introduire.

Observons tout de suite que, au point de vue auquel nous nous plaçons, les axiomes ont pour unique caractéristique d'être *admis sans démonstration*. Il n'est donc nullement question de décider s'ils sont vrais ou faux — question qui ne pourrait avoir qu'une signification physique —; évidents

ou non — question sans signification précise — ; d'origine empirique ou *aprioristique* — question d'ordre exclusivement psychologique.

Dans la voie qui conduit aux éléments irréductibles de la Géométrie, on peut s'arrêter plus ou moins loin, et l'on néglige des points de vue fort intéressants, lorsque l'on pousse d'une traite jusqu'aux régions dénudées où la raison s'exerce sur de pures abstractions.

Dans ces dernières années, les principes de la Géométrie ont fait l'objet de beaux travaux, et l'on est parvenu à plusieurs systèmes de fondements, également acceptables, mais totalement abstraits : les notions prises pour bases sont de purs symboles (symboles non définis de M. Padoa [1]), n'ayant pas d'autres propriétés que celles qu'on leur attribue au moyen des axiomes, et à ces propriétés n'est attachée aucune image sensorielle.

Toute image sensorielle est ainsi éliminée, non seulement du raisonnement, mais encore des notions.

C'est ainsi que, pour M. Hilbert [2], les « POINTS », les « DROITES », les « PLANS » sont des êtres ou éléments n'ayant pas d'autres propriétés que celles d'être susceptibles d'avoir entr'eux certaines relations mutuelles exprimées par les mots « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT ».

Les mots écrits en majuscules représentent les *notions fondamentales*. Chacune d'elles n'a pas d'existence par elle-même et ne saurait avoir de propriétés intrinsèques.

Les axiomes expriment les propriétés de relation permettant de combiner ces notions telles, par exemple, que :

« Deux points distincts déterminent toujours une droite. »

Une telle théorie ne fait appel qu'aux éléments les plus abstraits de notre conception, savoir ceux qui n'ont pas d'autres propriétés que d'être des concepts.

Même lorsqu'il se présente des éléments qui, au fond, sont

---

[1] PADOA. *Un nouveau système de définitions pour la Géométrie euclidienne.* (Compte rendu du Congrès international de mathématiques). Gauthiers-Villars, Paris, 1902.

[2] HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 : traduit en français par M. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

des nombres, on est obligé d'établir leurs propriétés, comme si l'Analyse algébrique n'existait pas, ce qui oblige à consacrer une large place à des considérations qui intéressent plutôt cette dernière science que la Géométrie.

Cet ostracisme de l'analyse est d'autant moins avantageux que, ainsi que l'on s'en rend facilement compte, toutes les combinaisons d'axiomes envisagées par les divers auteurs — notamment la Géométrie non-pascalienne de M. Hilbert — sont au fond des conceptions analytiques, de sorte que l'emploi de l'Analyse apporterait la clarté, tout en laissant, semble-t-il, la porte ouverte aux hypothèses.

Sont également des conceptions analytiques les *métriques* édifiées par MM. Minkowski[1], Hilbert[2] et Hamel[3], où disparaît l'idée de déplacement, l'idée de mesure étant basée uniquement sur la notion généralisée de la distance, qui n'est plus qu'une fonction d'un couple de points soumise à certaines conditions très générales.

Il est donc permis, avant d'essayer de créer des conceptions géométriques non susceptibles d'être représentées par des propriétés numériques — nous n'en connaissons d'ailleurs pas —, de demander à l'Analyse tout ce qu'elle peut donner.

En outre, sans méconnaître le grand intérêt que présente, tant pour la philosophie des Mathématiques que pour l'étude de l'intelligence, la réduction de la Géométrie à des conceptions purement logiques, l'on peut trouver utile de ne pas pousser aussi loin la dissociation des idées et de s'arrêter à un stade intermédiaire, où les notions fondamentales et les axiomes présentent encore une signification figurée (ou, proprement, géométrique).

Nous nous sommes donc proposé, dans ce travail, d'établir les fondements de la Géométrie en prenant pour notions fondamentales les seuls concepts inhérents à l'idée de figure, savoir : le point, la ligne et la surface.

---

[1] MINKOWSKI. *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1896.

[2] HILBERT, *Mathematische Annalen*, Bd. 34.

[3] HAMEL. *Ueber die Geometrieen, in denen die Geraden die kürzesten sind*, Göttingen, Dieterich, 1901.

Quant aux axiomes, ils auront pour objet de réduire la Géométrie à n'être qu'une application de l'Analyse algébrique. Ce résultat atteint, on se trouve sur un terrain solide et bien connu : la Géométrie est fondée.

Ce point de vue est loin d'être nouveau : c'est celui de Riemann, Helmholtz, Cayley, Sophus Lie, et nous ne pouvons avoir la prétention de faire œuvre bien originale. Nous croyons toutefois qu'il n'est pas sans intérêt, dans l'état où se trouve actuellement la question des Principes de la Géométrie, de coordonner, en vue d'une idée d'ensemble, des matériaux qui, à notre connaissance, sont demeurés épars.

Ajoutons que nous y avons trouvé l'occasion de présenter quelques observations, qui n'ont peut-être pas encore été faites.

Divisions de la géométrie. — Il est d'ailleurs remarquable que le point de vue analytique soit précisément celui d'où les principes de la Géométrie se présentent sous l'aspect le plus clair et qu'il conduise à un classement des notions géométriques conforme à la division qui s'est naturellement établie.

La géométrie vulgaire ou euclidienne — on s'en rend facilement compte par l'examen de ses principales propositions — est la science de la « mesure ».

Ses fondements doivent donc être constitués par les propriétés primordiales de l'égalité géométrique, qui est définie elle-même par la superposabilité, de sorte que, en dernière analyse, comme l'a vu pour la première fois Helmholtz, les vrais axiomes de la géométrie vulgaire ne sont autre chose que les propriétés des déplacements d'une figure invariable.

C'est pourquoi, les opérations employées dans les raisonnements que nous avons qualifiés d'*imaginatifs*, consistent toujours — directement ou indirectement — dans la superposition d'une figure à une autre.

Ce procédé joue, en Géométrie, le rôle tenu en arithmétique par le raisonnement *par récurrence*, qui s'impose là en raison de la genèse même des nombres entiers, laquelle s'opère par récurrence.

Mais la Géométrie s'est enrichie, depuis Euclide, d'un beau domaine, d'où est exclue l'idée de mesure.

On a d'abord établi, au commencement du dernier siècle, sous le nom de *Géométrie de situation* ou *Géométrie projective*, un ensemble de propriétés basées sur la seule idée de ligne droite.

Plus récemment s'est constituée, sous le nom d'*Analysis sitûs,* une doctrine qui s'attache à des propriétés encore plus générales des figures.

Tels sont donc les trois domaines : *Analysis sitûs,* Géométrie projective, Géométrie vulgaire ou métrique, que nous allons voir apparaître par l'introduction de notions de moins en moins générales.

II

ANALYSIS SITUS

Réduction de la géométrie a l'analyse. — Le premier des axiomes qui permettent l'application de l'Analyse algébrique à la Géométrie est le suivant :

A I. *L'espace ponctuel peut être représenté par une variété (ou multiplicité, Mannigfaltigkeit) numérique triple.*

Cet axiome ramène à des idées analytiques les notions de continuité, de ligne, de surface, d'intersection, de contact. Mais rien n'empêche d'associer les idées géométriques aux expressions analytiques correspondantes.

Nous conserverons donc, comme concepts essentiels de la Géométrie, les concepts de point, de continuité, de ligne et de surface, c'est-à-dire ceux qui sont inhérents à l'idée de figure.

Pour pouvoir donner une interprétation géométrique à l'axiome A I, il faudrait concevoir des géométries où cet axiome ne fût pas réalisé.

M. Hilbert[1] a établi une Géométrie, où les points ne constituent pas une variété numérique (Géométrie *non-pascalienne*), mais la théorie ainsi édifiée a une existence pure-

[1] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.*