SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Autor(en): **Zervos, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7565

SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

1. Théorème. — *Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation qu'on a en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.*

Soit l'équation :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0 .$$

En posant

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1 , \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2 , \dots \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m ,$$

l'équation proposée devient :

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1\lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m = 0 .$$

Si cette équation avait toutes ses racines négatives, nous pourrions poser l'équation donnée sous la forme :

$$(x+a)(x+b)\dots(x+u) = 0 \quad \text{où} \quad a > 0 , b > 0 , \dots , u > 0 .$$

Mais

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + \mu_1 x + \mu_1\mu_2 ,$$

où, évidemment, nous avons $\mu_1 > \mu_2$ et par suite

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= x^3 + (\mu_1 + c)x^2 + \mu_1(\mu_2 + c)x + \mu_1\mu_2 c \\ &= x^3 + \eta_1 x^2 + \eta_1\eta_2 x + \eta_1\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

en posant

$$\eta_1 = \mu_1 + c , \ \eta_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 + c)}{\mu_1 + c} , \ \eta_3 = \mu_2 \frac{c}{\mu_2 + c} .$$

Mais, puisque $\mu_1 > \mu_2$, nous aurons $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$.

D'une manière générale, si l'on multiplie un polynome de la forme

$$x^{m-1} + \rho_1 x^{m-2} + \rho_1\rho_2 x^{m-3} + \dots + \rho_1\rho_2 \cdots \rho_{m-1} ,$$

où $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \dots > \rho_{\mu-1} > 0$, par $x + k$, où $k > 0$, dans le produit, que nous pouvons écrire sous la forme

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1\lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m ,$$

nous aurons

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_m .$$

En effet, le produit sera

$$x^m + (\rho_1 + k)x^{m-1} + \rho_1(\rho_2 + k)x^{m-2} + \dots + \rho_1\rho_2 \cdots \rho_m k ,$$

d'où nous déduisons

$$\lambda_1 = \rho_1 + k ,$$

$$\lambda_2 = \rho_1 \frac{\rho_2 + k}{\rho_1 + k} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_{n-1} = \rho_{n-2} \frac{\rho_{n-1} + k}{\rho_{n-2} + k} ,$$

$$\lambda_n = \rho_{n-1} \frac{\rho_n + k}{\rho_{n-1} + k} .$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Comparons les rapports λ_{n-1}, λ_n. Remarquons que

$$\lambda_{n-1} = \frac{\rho_{n-2}(\rho_{n-1}+k)(\rho_{n-1}+k)}{(\rho_{n-2}+k)(\rho_{n-1}+k)} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{\rho_{n-1}(\rho_n+k)(\rho_{n-2}+k)}{(\rho_{n-1}+k)(\rho_{n-2}+k)} .$$

En rappelant que $\rho_{n-2} > \rho_{n-1} > \rho_n$ nous trouvons l'inégalité

$$\rho_{n-2}k + \rho_{n-2}\rho_{n-1} > \rho_{n-1}k + \rho_{n-2}\rho_{n-1} ,$$

d'où

$$\rho_{n-2}(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-1} + k) > \rho_{n-1}(\rho_{n-2} + k)(\rho_{n-1} + k)$$

et par conséquent

$$\lambda_{n-1} > \lambda_n . \qquad \textit{C. q. f. d.}$$

2. — Soit l'équation :

$$f(x) = a_{2m} - a_{2m-1}\,x + a_{2m-2}\,x^2 - \dots + a_0 x^{2m} = 0$$

où a_0, a_1, a_{2m} sont positifs.

Posons

$$\frac{-a_{2m-1}}{a_{2m}} = \lambda_1 ,$$

$$\frac{a_{2m-2}}{-a_{2m-1}} = \lambda_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

L'équation donnée s'écrit encore ainsi :

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_1\lambda_2 x^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{2m}\, x^{2m} = 0.$$

Soit λ_{2n} le plus petit en valeur absolue des λ_2, λ_4, ... λ_{2m}, $\lambda_{2\rho-1}$ le plus grand en valeur absolue des λ_1, λ_3, λ_5, ... λ_{2m-1}. On peut dire que toutes les racines positives de $f(x)$ sont plus petites que $-\frac{1}{\lambda_{2n}}$ et plus grandes que $-\frac{1}{\lambda_{2\rho-1}}$.

En effet, quand $x > -\frac{1}{\lambda_{2n}}$, nous avons, d'après nos hypothèses

$$x > -\frac{1}{\lambda_2},\ x > -\frac{1}{\lambda_4},\ \dots\ x > -\frac{1}{\lambda_{2m}} \text{ ou } |\lambda_2 x| > 1,\ |\lambda_4 x| > 1,\ \dots\ |\lambda_{2m} x| > 1$$

et, par suite, le troisième terme du polynome $f(x)$ est plus grand que le second pris en valeur absolue, le cinquième est plus grand que le quatrième, etc., parce que le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité.

Et quand $0 < x < \frac{1}{|\lambda_{2\rho-1}|}$, nous avons

$$x < \frac{1}{|\lambda_1|},\ x < \frac{1}{|\lambda_3|},\ \dots,\ x < \frac{1}{|\lambda_{2m-1}|}$$

et par suite les termes négatifs deviennent plus petits que les termes positifs qui les précèdent, et par conséquent $f(x) > 0$.

Corollaire. — Si dans le précédent polynome nous avions $\lambda_{2\rho-1} > \lambda_{2n}$ il n'y aurait aucune racine positive.

P. Zervos (Paris).