Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DÉFINITIONS GÉNÉRALES EN MATHÉMATIQUES 1
Autor: Poincaré, Henri
Kapitel: Calcul différentiel.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7561

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

graphe donnera un exemple concret de transformation homothétique qui pénétrera facilement dans l'esprit des jeunes gens et y restera.

J'ai dit que la plupart des définitions mathématiques étaient de véritables constructions. Dès lors ne convient-il pas de faire la construction d'abord, de l'exécuter devant les élèves, ou mieux de la leur faire exécuter de façon à préparer la définition ?

18. Est-ce maintenant qu'il faut parler des volumes et des surfaces ? C'est trop tôt, puisque pour comprendre la définition logique il faut savoir le calcul intégral ; ce n'est pas trop tôt pourtant puisque nous arrivons au quatrième livre.

Que faire alors ? il faut faire comme on a toujours fait jusqu'ici ; il faut s'abstenir de toute définition du volume et de la surface ; les enfants croient savoir ce que c'est, et ne réclament rien. On se contentera d'énoncer sous forme d'axiomes ces deux propositions qui sont en réalité une véritable définition : que deux aires, composées de parties égales chacune à chacune, ont même surface ; que la surface d'une partie d'une aire est plus petite que la surface de l'aire totale. Et de même pour les volumes.

Calcul différentiel.

19. Il y a deux manières d'aborder l'étude du calcul différentiel, celle de Lagrange, qui au fond est celle de Newton, et celle de Leibniz. Il faut, bien entendu, connaître l'une et l'autre, mais par laquelle faut-il commencer et à quel moment convient-il de parler pour la première fois de l'une ou de l'autre ? Sur ce point on a beaucoup varié ; de mon temps l'enseignement secondaire ne connaissait que les dérivées, et il n'était question de différentielles qu'à l'Ecole Polytechnique. Depuis, suivant les fluctuations des programmes de l'Ecole Polytechnique, la notation différentielle a envahi les classes de spéciales, puis elle en a été bannie, enfin tout récemment elle en a repris possession. Il faut s'attendre sans doute à de nouveaux flux et à de nouveaux reflux. Mais

quelles que soient ces variations, il y a certains principes auxquels nous devons rester fidèles.

On est souvent séduit par la haute portée philosophique de la notation différentielle qui rappelle à chaque instant la définition, le sens profond des symboles que l'on a à manier.

Hélas! elle ne les rappelle que trop, et il vaudrait mieux les rappeler moins que les rappeler imparfaitement, et par là nous exposer à l'erreur. Ces erreurs, on ne les évitera précisément qu'en tâchant d'oublier la signification primitive des symboles. Ainsi quand j'ai une fonction z de x et de y, et que x et y sont eux-mêmes fonctions de u et de v, j'écris :

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv$$

et, dans cette formule, j'ai cinq fois le symbole dz et chaque fois avec une signification différente. Je sais bien qu'on peut employer des ∂ ronds, mais quel palliatif insuffisant ; ce n'est pas deux formes de d qu'il faudrait ; il en faudrait cinq, il en faudrait dix.

Et ce serait bien pis si l'on faisait intervenir les différentielles et les dérivées d'ordre supérieur.

Oui, sans doute, on s'habitue à ces pièges et on arrive à les éviter, mais pourquoi ? C'est à la condition d'oublier l'origine de ces notations, de ne plus se rappeler que $\frac{d^2z}{dx^2}$ est le quotient d'un certain d^2z par un certain dx^2 ; mais de considérer cette fraction comme un *bloc*, comme la dérivée seconde de z par rapport à x, c'est en un mot à la condition de *penser en dérivées*.

Celui qui pense en dérivées peut employer la notation de Leibniz sans danger ; s'il trouve dans deux termes d'une même formule un même symbole d^2z avec deux significations différentes, cela n'a pas plus d'inconvénients que s'il trouve une même lettre a dans deux mots d'une même phrase entre lesquels il n'y a aucun rapport, puisque pour lui d^2z n'est pas un individu, mais une portion d'individu.

Sans doute il faut connaître la notation différentielle; il faut pouvoir manier ce langage qui est celui de tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas le sens commun, parce qu'elle est parlée par 60,000,000 d'hommes dont beaucoup sont des savants.

Mais c'est une science dangereuse qu'il ne faut aborder que quand on a appris à penser en dérivées ; sans cela on ne saura jamais faire sans se tromper le changement de variables le plus simple.

Pour donner cette habitude aux élèves il faut dans les commencements employer exclusivement la notation de Lagrange et ne leur parler de différentielles que quand ils feront imperturbablement les changements de variables. Ce sera donc la dérivée que l'on définira d'abord ; je voudrais que cette définition soit préparée par des exemples concrets. Il y en a deux, celui des tangentes, celui de la vitesse ; et ils ne sont pas à dédaigner puisque le premier a été le point de départ de Fermat et de Roberval, le second celui de Newton.

On ramènera ces deux exemples l'un à l'autre en traçant la courbe des espaces en fonction du temps. Je crois que la définition classique paraîtra plus claire si elle n'arrive qu'après ces exemples.

Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent et où on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on n'envisage que des différentielles de premier ordre, à la condition de n'en faire qu'un emploi judicieux. C'est ainsi que l'on apprendra à raisonner correctement sur les infiniment petits, qu'on se familiarisera avec la théorie des petites erreurs, si importantes en physique, qu'on comprendra comment des petites variations des données peuvent influer sur le résultat : et cela aussi, les physiciens ne s'en plaindront pas.

Ayant donc appris à connaître les dérivées, en partant de l'exemple concret de la vitesse, sachant déjà les calculer et les manier, l'élève abordera les différentielles du premier

ordre et apprendra à s'en servir, mais à une condition expresse.

Le professeur n'écrira jamais :

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy,$$

mais toujours

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

On s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes dans les lycées. J'ai dit absolument; hélas, si elles sont dans le programme, il faudra bien s'y résigner, mais on les reléguera à la fin du cours, quand la formation de l'élève sera achevée, et d'ailleurs on les définira en se servant uniquement du développement de Taylor.

Calcul intégral.

20. Après ce qui précède, il est à peine utile de dire comment on doit définir l'intégrale, il est bien clair qu'il faut la définir comme une surface.

Nos pères inscrivaient dans une aire plane une série de rectangles et obtenaient comme limite de la somme de ces rectangles une intégrale qui représentait cette aire plane. En effet, disaient-ils, la différence entre la surface cherchée et la somme tend vers zéro : car on peut la rendre plus petite que toute quantité donnée. Ils faisaient ce raisonnement sans scrupule, parce qu'ils croyaient savoir ce que c'est qu'une surface. Nous, au contraire, ce raisonnement ne nous satisfait plus, parce que nous savons qu'on ne sait pas ces choses-là en naissant, que l'on ne peut savoir ce que c'est qu'une surface que quand on sait le calcul intégral.

Et alors pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions; nous distinguons les fonctions continues et celles qui sont discontinues, celles qui ont des dérivées et celles qui n'en ont pas. Tout cela est à sa place dans l'enseignement des Facultés; tout cela serait détestable dans les