

Der Infinitesimalkalkül von Newton

Autor(en): **Fleckenstein, J.O.**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **12 (1956)**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. Der Infinitesimalkalkül von Newton

Nicht das Gravitationsgesetz, sondern die allgemeine binomische Reihe soll NEWTON auf seinen Epitaph in Westminster Abbey haben einmeisseln lassen – wohl um für immer zu dokumentieren, dass er diese als seine bedeutendste Entdeckung ansehe. In der Tat steckt in der binomischen Reihe ein Schlüssel zur numerischen Infinitesimalanalysis, indem sie für alle rationalen ν Reihenentwicklungen in der Form

$$(1+x)^\nu = \sum_m \binom{\nu}{m} x^{m-\nu}$$

erlaubt. NEWTON hat freilich den allgemeinen binomischen Satz in der Gestalt

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q + \frac{m-2n}{3n} C Q + \dots,$$

wo die Koeffizienten $A, B, C, \dots$ jeweils das vorhergehende Glied bedeuten. In einem im Verlaufe des Prioritätsstreites wichtig gewordenen Brief vom 24. Oktober 1676, der an OLDENBURG, den Sekretär der Royal Society, gerichtet, aber zur Vorzeigung an LEIBNIZ bestimmt war, vermerkte NEWTON, dass er die allgemeine Binomialreihe schon 1669 besessen habe und sie «tanquam fundamenta magis genuina» betrachte als die anderen Entwicklungen in seiner *De Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (verfasst 1669, gedruckt 1711). Wie hat NEWTON die allgemeine Binomialreihe gefunden?

WALLIS hatte in der *Arithmetica infinitorum* die Integrale (vgl. S. 10)

$$I_m = \int_0^x (1-x^2)^m dx$$

bestimmt. Man erhält sukzessive

m	I_m
0	x
1	$x - \frac{x^3}{3}$
2	$x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5$
3	$x - \frac{3}{3} x^3 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7$

NEWTON untersuchte nun das Bildungsgesetz dieser Entwicklung. Zunächst erkennt man, dass als erstes Glied immer x und als zweites $-(x^3/3)$ mit einem Koeffizienten versehen wird, der gerade gleich dem Exponenten m ist. Die anderen Glieder sind nicht so leicht zu durchschauen. Die Exponenten der Potenzen von x und die ihnen entsprechenden Nenner wachsen in arithmetischer Progression der ungeraden Zahlen. Die Zähler findet man aus der symbolischen Entwicklung von $(1+1)^1, (1+1)^2, (1+1)^3, \dots, (1+1)^n$. Nun aber bemerkte NEWTON noch, dass, wenn 1 und m die

ersten Zähler sind, sich die folgenden aus ihnen durch fortgesetzte Multiplikation ergeben mit $(m-1)/2$, mit $(m-2)/3$, mit $(m-3)/4$ usw., wobei bei ganzzahligem m die Reihe von selbst abbricht. NEWTON hat hier zum ersten Mal die multiplikative Zusammensetzung der Binomialkoeffizienten entdeckt, welche noch einem WALLIS entgangen war (vgl. S. 11). Nun vollzog NEWTON wie WALLIS den kühnen Schritt, $m=1/2$ zu setzen und das Bildungsgesetz der Koeffizienten in der Reihe für I_m auch für gebrochene Exponenten gültig zu setzen. Damit erhielt er sukzessive die Koeffizienten

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{1/2 - 1}{2} = -\frac{1}{40}, \quad \text{usw.}$$

und damit die Reihenentwicklung

$$\int_0^x (1-x^2)^{1/2} dx = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \dots,$$

so dass sich

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots$$

ergibt, von deren Richtigkeit er sich durch die Multiplikation der beiden Reihen $(1-x^2/2, \dots)$ $(1-x^2/2, \dots)$ überzeugte, deren sukzessive Resultate in der Tat gegen $1-x^2$ konvergieren.

NEWTON war ein Meister in der Behandlung unendlicher Reihen. In der gleichen Schrift erfindet er auch das Verfahren der Reihenumkehr. Aus

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

findet er eine Potenzreihe in z für x , indem er zunächst $x=z+p$ setzt und in der entstehenden Reihe für z die Glieder höherer Ordnung in p und z wegstreicht, so dass ihm für p der Wert $z^2/2$ folgt; mit der zweiten Näherung $p=(z^2+q)/2$ eingehend, findet er

$$q = \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5}{1 - z + \frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5.$$

Damit folgt nun schliesslich

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$$

Beachtet man nun, dass $z = \log(1+x)$ ist, also $x = e^z - 1$ wird, so bemerkt man, dass NEWTON mit der Reihe

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

en passant die Exponentialreihe vor EULER entdeckt hat! Die rechnerische Instinktsicherheit NEWTONS bei den Vernachlässigungen und Korrekturen ist erstaunlich.

Mittels des allgemeinen Binomialsatzes kann nun NEWTON die Methoden von FERMAT und BARROW der Inkremente und Dekremente benutzen. Er behandelt in

seiner *Analysis* beispielsweise den Flächeninhalt z von der Grösse

$$\left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{(m+n)/n}.$$

Den unendlichkleinen Zuwachs oder das schmale Rechteck $o y$ nennt er das Moment der Fläche, welches zum Zuwachs $x + o$ der Abszisse gehört. Den Ausdruck

$$z + o y = \left(\frac{n}{m+n}\right) a (x + o)^{(m+n)/n}$$

kann man nach dem Binomialtheorem entwickeln,

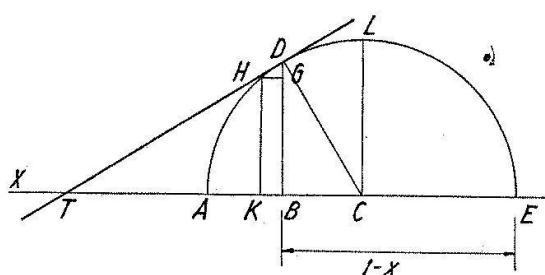
$$z + o y = \left(\frac{n}{m+n}\right) \left\{ a x^{(m+n)/n} + o \frac{m+n}{n} x^{(m+n)/n-1} + o^2 \left(\frac{m+n}{2}\right) x^{(m+n)/n-2} + \dots \right\},$$

und dann durch o kürzen, sowie weiter die mit o multiplizierten restlichen Glieder streichen. Damit folgt $y = a x^{m/n}$ für die Kurve, welche den Flächeninhalt

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{(m+n)/n}$$

hat; oder die Fluxion y der Fluente z hat im vorliegenden Fall den Wert $y = a x^{m/n}$.

NEWTON gewinnt hier das Integral $\int y dx$ nicht durch die infinitesimalen Streifen der archimedischen Tradition oder gar noch vermittelt zusätzlicher algebraischer Kunstgriffe wie FERMAT, sondern vermittelt des Begriffs der Änderung, genauer gesagt der Augenblicksveränderung (momentum) im Sinne der Tradition GALILEIS. Der Barrowsche Umkehrsatz ist dabei implizit vorausgesetzt. Während bisher der Prozess der Summation (Indivisibilenprinzip!) bei den infinitesimalen Untersuchungen der Mathematiker seit ARCHIMEDES dominierte, ist NEWTON der erste, der umgekehrt



Figur 4

den Begriff der Derivation an die Spitze stellt. Bei der Integration stellt die Ordinate y gewissermassen die Geschwindigkeit und die Abszisse x die Zeit dar. Damit wird das Inkrement o in moderner Schreibweise das Zeitmoment dt (vgl. S. 9). Die Produkte $y dx$ geben nun in der Tat in der Summe den Flächeninhalt aller Elementar- oder Momentanflächen; während aber die Mathematiker bisher diese Summe irgendwie additiv zusam-

mensetzten, gewinnt NEWTON das Integral aus der Grösse der Änderung der Fläche in einem Punkt. Obwohl NEWTON nicht bis zur letzten Klarheit über den Begriff der Änderung vorzustossen vermag, so kann er sich auf den seit GALILEI bei den Physikern vertrauten Begriff der Geschwindigkeit berufen. Wie wichtig für die praktische Ausführung der Fluxions- bzw. der Fluentenrechnung aber das Binomialtheorem ist, lehrt NEWTON am Beispiel der Rektifikation eines Kreisbogens (*Analysis*, Cap. VI). DT sei die Tangente in D , $AE = 2AC$ sei als Einheit genommen. Im infinitesimalen Dreieck DHG ist $HG = BK$ die Augenblicksveränderung der Basis x ,

folgt. CD^2 jedoch lässt sich direkt zu

$$CD^2 = CG^2 + GD^2 = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x} \dot{z}} \right)^2 (1 + z^2)$$

bestimmen. Nimmt man nun $dx = \dot{x} o$ als infinitesimale Einheit $dx = 1$, so folgt $z = \dot{y}/1$. Damit wird

$$CD^2 = \left(\frac{1 + z^2}{\dot{z}} \right)^2 (1 + z^2)$$

nach NEWTON. Nimmt man die moderne Schreibweise

$$z = y' = \frac{dy}{dx}; \quad \dot{z} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

so folgt der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius

$$CD = \rho = \frac{(1 + z^2)^{3/2}}{\dot{z}} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Das zitierte Werk *Artis analyticae specimina vel geometria analytica*, in welchem die Bestimmung des Krümmungsradius durchgeführt wird, wurde erstmals 1736 von J. COLSON (London) als englische Übersetzung des *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* veröffentlicht; in NEWTONS *Opera* (Edition Horsley 1779–85) wurde es unter dem obigen Titel aufgenommen. Es stellt eine Umarbeitung der *Analysis per aequationes infinitas* von 1669 dar und war schon 1671 zum Druck bestimmt; es hat dabei den Inhalt mehr als vervierfacht und ist damit für die Genesis der Newtonschen Fluxionsrechnung von grösster Wichtigkeit. CANTOR vermutet, dass eine erweiterte spätere Umarbeitung durch HUYGENS *Horologium oscillatorium* (1673) inspiriert worden sei; die infinitesimalen Probleme (Evolutentheorie!) werden dort völlig synthetisch behandelt. In der Tat beherrschen die geometrischen Einzelprobleme den Inhalt der entsprechend umbenannten *Geometria analytica*; immerhin wird dabei doch ein Ausblick auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen gewährt, und zwar im Anschluss an die Bildung der Fluxionen von irrationalen und impliziten Funktionen, wobei die Methode der unbestimmten Koeffizienten angewendet wird, welche dann sofort zur approximativen Lösung der Differentialgleichungen führt (Cap. IV).

So wird zunächst im Problema primum die Fluxion der impliziten Funktion

$$x^3 - a x^2 + a x y - y^3 = 0$$

in der Form

$$3 x^2 \dot{x} - 2 a x \dot{x} + a y \dot{x} + a x \dot{y} + 3 y^2 \dot{y} = 0$$

gelehrt. Daraus folgt sogleich

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{2 a x - 3 x^2 - a y}{a x + 3 y^2}.$$

Für die Irrationalitäten nimmt NEWTON das Beispiel

$$x^3 - a y^2 + \frac{b y^3}{a + y} - x^2 \sqrt{a y + x^2} = 0,$$

wo man zuerst

$$\frac{b y^3}{a + y} = z; \quad x^2 \sqrt{a y + x^2} = u$$

substituieren muss. Die ursprüngliche Gleichung lautet dann

$$x^3 - a y^2 + z - u = 0,$$

während man daneben noch die beiden anderen hat

$$a z + y z - b y^3 = 0; \quad a x^4 y + x^6 - u^2 = 0.$$

Die Fluxionen der drei Gleichungen lauten

$$a \dot{z} + y \dot{z} + z \dot{y} - 3 b \dot{y} y^2 = 0,$$

$$4 a x^3 y \dot{y} + a x^4 \dot{x} + 6 x^5 \dot{x} - 2 u \dot{u} = 0,$$

$$3 x^2 \dot{x} - 2 a y \dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Aus diesen eliminiert man z und u ; dann entsteht

$$3 x^2 \dot{x} - 2 a \dot{y} y + \frac{3 b y^2 \dot{y} - z \dot{y}}{a + y} - \frac{4 a x^3 y \dot{x} + a x^4 \dot{y} + 6 x^5 \dot{x}}{2 u} = 0,$$

in welche Gleichung man nur noch die Werte für z und u rückwärts einzusetzen braucht, um die Fluxion der irrationalen Funktion zu erhalten.

Die Bildung der Fluents aus den Fluxionsgleichungen – oder anders und moderner gesprochen: die Integration der Differentialgleichungen – nimmt NEWTON nur bei solchen Fluxionsgleichungen vor, in welchen die Fluents nur in Quotientenform vorkommen. Hierbei unterscheidet er drei Gattungen, welche wir heute in der Gestalt der 3. Kolonne der Tabelle schreiben:

1. Gattung	2 Fluxionen + 1 Fluente	$y' = F(x)$ oder $y' = F(y)$
2. Gattung	2 Fluxionen + 2 Fluents	$y' = F(x, y)$
3. Gattung	n Fluxionen	partielle Differentialgleichungen

Betrachten wir etwa den zweiten Fall $y' = F(x, y)$. NEWTON nimmt dafür das Beispiel

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y.$$

Dann macht er den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für y

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

Daraus folgt aber für

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \dots$$

Setzt man nun den Wert für y in die erste Gleichung ein, so folgt für

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= 2 + 3x + x^2 + (x^2 - 2)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots) \\ &= (2 - 2A_0) + (3 - 2A_1)x + (1 + A_0 - 2A_2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \dots$$

Also folgt durch Koeffizientenvergleich

$$A_1 = 2 - 2A_2; \quad 2A_2 = 3 - 2A_1; \quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2; \quad \dots$$

Damit können also alle Koeffizienten durch A_0 dargestellt und die Differentialgleichung

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y$$

durch eine Potenzreihe integriert werden.

Die Methode der Reihenentwicklung kann er formal ganz allgemein bei der Aufgabe anwenden: Aus einer zwischen den Fluxionen von Grössen bestehenden Gleichung $M\dot{x} + N\dot{y} = 0$, wo $M(x)$ und $N(y)$ ganze rationale Funktionen in x und y sind, ist die Relation zwischen den Fluents derselben zu bestimmen. NEWTON erhält zwar immer nur partikuläre Lösungen, da er keine Konstanten hinzufügt. Er erkennt aber, dass bei Fluxionsgleichungen zwischen mehreren Variablen willkürliche Funktionen eingeführt werden können. NEWTON hat, um die Integrationen zu erleichtern, seinem Werk einige Tafeln beigelegt, welche die Quadraturen einer Reihe von irrationalen Funktionen angeben. Eine komplette derartige Tafelsammlung gab er später in seinem Werk *De Quadratura curvarum*, welches als Anhang zu seiner *Optic (Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light [London 1704])* erschienen ist.

NEWTON scheint sich schon sehr früh, auf alle Fälle vor 1676, mit der Frage beschäftigt zu haben, wann die Integrale algebraischer Ausdrücke selber wieder algebraisch sind oder wann sie auf einfache (elementare) reduziert werden können. Für die binomischen Integrale $F(z) = \int z^\vartheta (e + fz^\eta)^\lambda dz$, wo ϑ und λ gebrochene Zahlen sein können, fand er das Kriterium für die Algebraizität von $F(z)$: $(\vartheta + 1)/\eta$ oder $(\vartheta + 1)/\eta + \lambda$ müssen ganze positive Zahlen sein. Bei den trinomischen Integralen mit der Irrationalität $Z = \sqrt[e + fz^\eta + gz^{2\eta}]{} in den beiden Formen$

$$\int z^{n\eta-1} Z dz \quad \text{und} \quad \int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{Z} dz$$

hilft er sich bei der Quadratur dadurch, dass er sie durch solche Flächenstücke ausdrückt, welche durch Abszisse, zwei Ordinaten und einen dazwischenliegenden Kegelschnittbogen begrenzt werden. Damit kann er den transzendenten Teil dieser Integrale, nämlich den Logarithmus und die zyklometrische Funktion, durch Flächenstücke beschreiben, deren analytische Bestimmung er vorher durch Reihenentwicklung schon geleistet hatte. Um aber bei den binomischen bzw. trinomischen Integralen überhaupt bis zu diesen Endformen zu gelangen, muss er sich die nötigen Reduktionen durch Rationalisierung und Ableitung von Rekursionsformeln mittels Differentiation verschaffen. Der Ausgangspunkt der Theorie der binomischen und trinomischen Integrale ist dabei die ganz allgemeine Form $\int z^\vartheta R^\lambda dz$ mit dem Polynom

$$R = (e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \dots) \quad (n = \text{ganzzahlig}).$$

NEWTON hat also mit seinem Fluxionskalkül den wesentlichen Inhalt der speziellen Infinitesimalrechnung abgeleitet. Dass hin und wieder Versehen unterliefen, welche

später beim Prioritätsstreit eine Rolle spielen sollten, ist bei der Arbeitsweise NEWTONS, die nicht auf elegante kanonische Lehrbuchdarstellung, sondern auf die Bewältigung der Fülle der Einzelprobleme abzielte, nicht zu verwundern.

3. Newton im Prioritätsstreit mit Leibniz

Gerade diese mehr skizzenhaften Entwürfe, welche erst nach Jahrzehnten geradezu in eiliger Hast publiziert wurden, um dem wachsenden Einfluss der Leibnizschen Differentialrechnung zuvorzukommen, welche dank der eleganten Geschmeidigkeit ihrer Symbolik sich – insbesondere bei den Mathematikern des Kontinents – immer mehr durchsetzte, sollten NEWTON in einen der unerquicklichsten Prioritätsstreite verwickeln, welche die Geschichte der Wissenschaft kennt. Dieser Streit wäre überflüssig geblieben, wenn die Zeitgenossen hätten erfassen können, dass die Entdeckung des Infinitesimalkalküls bei NEWTON und bei LEIBNIZ auf verschiedenen ideengeschichtlichen Voraussetzungen beruht, so dass die genaue chronologische Fixierung der einzelnen Entdeckungen gar nicht an das Wesen derselben heranreicht. Da aber gerade jene tiefe Einsicht, welche der rückblickende Historiker gewinnen kann, den Zeitgenossen verwehrt ist, so entarteten die divergierenden Tendenzen des Physikers NEWTON und des Philosophen LEIBNIZ bei der Entdeckung eines neuen mathematischen Kalküls in einen leidigen Streit um die Oberflächensymptome einer datierten Priorität.

Es ist kein Zweifel, dass NEWTON fast 10 Jahre vor LEIBNIZ seinen Infinitesimalkalkül entdeckt hat. Aber bis zur zweiten Auflage der *Principia* (1713) hat NEWTON in einer Anmerkung (Liber II, Sect. II, Prop. VII) anerkannt, dass LEIBNIZ unabhängig von ihm zu einem ähnlichen – er hätte sagen müssen: anderen – Kalkül gekommen sei. Er schreibt: «In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.W. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lassen sich dieselben ebensogut auf irrationale wie auf rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluents gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt), welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen.»

NEWTONS erste Entdeckungen zur Fluxionsrechnung gehen nachweislich bis 1665 zurück. NEWTON selbst schreibt in einem an Abbé CONTI gerichteten, aber für LEIBNIZ bestimmten Brief vom 29. Mai 1716 (*Recueil des Maiseaux* II, S. 98/99), dass zum Beispiel ein Manuskript vom 16. Mai 1666 «contient en sept Propositions une Méthode générale de résoudre les Problèmes qui regardent le mouvement».

NEWTON hat demnach die grundlegenden Ideen zur Fluxionenrechnung gleichzeitig mit seinen entscheidenden Gedanken zur Physik (Optik und Gravitation) in der Zeit von 1664–1666 entwickelt; diese Jahre nach der Pubertät haben offenbar NEWTONS Genius entfaltet. Es lässt sich heute nicht mehr im einzelnen feststellen, wieviel von BARROWS *Lectiones geometricae* auf das Konto seines Schülers NEWTON zu setzen ist; jedenfalls hat der Lehrer NEWTONS Erstlingswerk, die *Analysis per*