

Die beiden Bolay

Autor(en): **Dávid, L. v.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **11 (1951)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6685>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die beiden Bolyai

In der reinmathematischen Forschungsarbeit des 19. Jahrhunderts können wir drei, besonders charakteristische und höchst entwickelte Wesensbestandteile hervorheben: die Schöpfung *der *nichteuklidischen Geometrien*, die vollkommen hemmungslose Gleichberechtigung der *komplexen Zahlen und Veränderlichen* mit den reellen, und die weitverzweigte ordnende Wirkung der *Gruppentheorie*. Zu diesem Hervorheben führt eine umsichtige Auslese der wirklich bezeichnenden und bleibend wichtigen Ergebnisse der reinen Mathematik. Diese Auslese kann man wohl für eine unbefangene erklären, wenn wir uns von den folgenden objektiven Auswahlprinzipien leiten lassen: *Stabilisation* während des Jahrhunderts auf einer hohen Stufe der Entwicklung und ganze Systeme enthaltende *Monumentalität*. (Bei einer internen Abschätzung reinmathematischer Werte dürfen wir die naturwissenschaftliche Anwendbarkeit als Auswahlprinzip ausschließen.)

Ein jeder dieser Wesensbestandteile, dieser stabilen und monumentalen Ergebnisse bedeutete weitere Befreiung des Denkens von konventionellen Beschränkungen. Erstens wurde *Euklids* erdrückendes Sonderrecht gebrochen, zweitens hörte eine unbegründete (zuweilen mystische) Angst vor den imaginären Zahlen auf, endlich verschaffte die allgemeine Komponierung von Gruppenelementen weitreichende Wahlfreiheit mathematischer Operationen.

Um das Erreichen dieser drei großartigen Ergebnisse, besonders aber der beiden ersten, ist ein, in seinem Leben kaum bekannter Ungar *Johann von Bolyai** (1802 bis 1860) einer der bedeutendsten Schöpfer. Indirekt hatte er auch an dem dritten Anteil, nachdem seine »neue, andere Welt«, der *Bolyaische Raum*, in den Anwendungen der Gruppentheorie fruchtbare Gedanken anregte. »Ein Genie erster Größe« schrieb *Gauss* im Jahre 1832 über ihn einem deutschen Professor, vor größerer Öffentlichkeit befaßte er sich aber mit *Bolyais* Schöpfung nicht, was für das vom Schicksal so hart getroffene Genie von niederschmetternder Wirkung wurde.

In der folgenden Darlegung befassen wir uns in erster Reihe mit *Johann von Bolyai*. Das Bild aber, welches wir von seinen schöpferischen Arbeiten und seinem traurigen Leben entwerfen, wird uns verständlicher, wenn sein Vater, Meister und zugleich Rivale, *Wolfgang von Bolyai* (1775—1856) im Rahmen desselben auch verewigt wird. Dieser dichterische Geist und zugleich leidenschaftliche Mathematiker stand mit *Gauss* (1777—1855) seit ihrer Jugend in vertrauter, freundschaftlicher Beziehung. Der fast sechsundfünfzig Jahre gepflegte und von beiden Seiten sorgfältig aufbewahrte *Briefwechsel*¹ ist auch heute noch eine psychologisch interessante, historisch wertvolle Lektüre. Als vielseitiger und auch mit dem Geschick seiner Mitmenschen sich viel befassender Mann, war er in der Mathematik, gemessen an seiner Begabung, nicht be-

* Zur Aussprache des altungarischen Familiennamens *Bo-lya-i* bemerken wir folgendes. Die erste Silbe wird wie *Bo* in »Bote« gesprochen. Die zweite Silbe *lya* lautet wie das deutsche Wort »ja« aber mit einem kurzen, dumpfen *a*, ähnlich dem *a* im englischen »awe« aber ganz kurz gesprochen. Die Endsilbe *i* lautet wie das *i* in »Juli«. Der Ton liegt (bei allen ungarischen Wörtern) auf der ersten Silbe, also am Wortanfang.

sonders produktiv. Mit seinen tiefen und originellen Ideen war er vielmehr ein selbständiger Vorläufer der im 19. Jahrhundert begonnenen und gegenüber dem 18. Jahrhundert größere mathematische Strenge fordernden kritischen Bewegung.

*

Die Wiege der im 13. Jahrhundert schon eine Rolle spielenden Familie *Bolyai*² war Siebenbürgen (Transsylvanien), der Osten des Karpatenlandes, ein organischer Bestandteil des historischen Ungarns, von wo aus seit tausend Jahren Lichtstrahlen ungarischen Geistes die Kultur befruchteten. Der Vollname der Familie hieß lateinisch *Bolyai de* (d. h. von) *Bolya*, wobei »Bolya« eine vom namengebenden Ahnherrn — vom Urenkel eines in fürstlichem Range stehenden, Siebenbürgen okkupiert haltenden ungarischen Heerführers — benannte siebenbürgische Siedlung, heute ein kleines Dörfchen, ist. Es war eine vornehme, reiche Familie. Schon in früher Jugend waren die männlichen Mitglieder solcher Familien verfassungsmäßig verpflichtet, gegen den durch die Karpaten nach Ungarn eindringenden Feind in den Kampf zu ziehen. Diese durch Jahrhunderte sich oft erneuernden Kämpfe, die Kriegskosten, die Auslösung der Gefangenen und andere Schicksalsschläge haben die Familie verarmt. Der Vater Wolfgang war nurmehr ein Kleinlandwirt.

In der Schule galt Wolfgang im Kopfrechnen und im Improvisieren von trefflichen Distichen als ein Wunderkind. Seine unkundigen Lehrer hatten ihn überanstrengt, so daß er am hellen Tage an Visionen litt. Auch befiel ihn ein Typhusleiden, das sein Gedächtnis etwas schwächte. Hingegen hören wir später nichts mehr von Kopfrechnen oder Improvisation. Von seinem 16. Lebensjahr an befaßt er sich mit Calvinischer Theologie und mit Mathematik. Nebenbei malt er auch, erweist sich als tüchtiger Zeichner, musiziert gerne und verständnisinnig, spielt auch auf der Bühne. Wie manche andere arme Jünglinge begleitet er einen jungen Aristokraten auf dessen Kosten — als sog. Mentor — auf Auslandstudien, zuerst nach Jena (1796) für ein halbes Jahr, von da nach Göttingen auf längere Zeit. Zwar ließ er sich nur am letzteren Ort immatrikulieren, doch schreibt er in seinen *Selbstbiographien* (1840, 1856), daß seine mathematischen Gedanken größtenteils schon in Jena entstanden, später nur der Verfeinerung oder Ergänzung harren. Diese Gedanken benützte er in seinem Hauptwerke,

A 'sajba hár mefely'kér az m'ndjén hóg
 ma' a' hár kuffebb l'ff... s'uvolja
 a' hár be nan' h'm'k'el

Handschrift von Wolfgang v. Bolyai.

Aus den Aufzeichnungen Wolfgangs über Johanns Kindheit. Es ist eine Stelle, welche die merkwürdige Raumphantasie des kaum vierjährigen Kindes zeigt. In deutscher Übersetzung: »Zu jener Zeit sagt er beim Tünchen, daß die Stube jetzt kleiner wird, . . . und zuletzt (d. h. nach fortgesetztem Tünchen) haben wir keinen Platz in der Stube.«

welches er im Jahre 1829 vollendete, und das 1832—33 in zwei Bänden lateinisch erschien. Das Werk — im gewohnten gekürzten Titel *Tentamen*³ (d. h. *Versuch*) — behandelt, von den Grundlagen angefangen, die Elemente der Arithmetik, Algebra, Analysis und der Geometrie. Seine Gedanken sind Offenbarungen eines kritischen Geistes, der mehrere Schwächen der damaligen Mathematik zwar erkannte, aber nicht vermochte, diese vollkommen zu beheben. *P. Stäckel* (Heidelberg), nachdem er die Gedanken Wolfgangs eingehend erläutert, schreibt (1913) darüber:

»Wer mit Liebe und Geduld in Wolfgang *Bolyais Tentamen* forscht, der wird sicherlich noch manche Vorspiele zu Untersuchungen entdecken, die erst lange nach dem Tode seines Verfassers wirklich durchgeführt worden sind. Dem Werden und Wachsen mathematischer Gedanken zu lauschen, wird freilich immer nur wenigen am Herzen liegen; die Menge verlangt von einem Buche, daß es fertige Erkenntnisse in gebrauchsfähiger Form überliefert, und so wird es dabei bleiben, daß das Werk des tiefen und ursprünglichen Denkers nur von wenigen gelesen und von noch wenigeren gewürdigt wird. . . . Seine Bücher haben in der Heimat keine Anerkennung gefunden und sind im Auslande so gut wie unbekannt geblieben. . . . Wolfgang teilt dies Schicksal mit den meisten der Männer, die man als *Vorläufer* bezeichnen könnte, im Gegensatz zu den an äußeren Erfolgen reicheren Nachläufern, die das, was die großen Entdecker gefunden haben, aufnehmen und der Menge zugänglich machen. Er hat erkannt, daß für die Mathematik eine neue Zeit heraufkomme, aber wie Moses hat er das gelobte Land nur vom hohen Berge aus schauen und nicht betreten dürfen. Er hat die Unzulänglichkeit des Vorhandenen lebhaft gefühlt, aber die Mängel nicht deutlich aufzeigen und noch weniger sie beseitigen können. Er ist manchen wichtigen Fragen, mit denen die späteren Mathematiker sich beschäftigt haben, sehr nahe gekommen, aber er hat es nicht vermocht, diese zu ergreifen, festzuhalten und zu bewältigen.«

Bevor wir die weitere Laufbahn des nach Göttingen gelangten Wolfgangs verfolgen, wollen wir einige charakteristische Gedanken des *Tentamens* erwähnen. Auf Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht der Ort.

a) Bei dem Aufbau der Arithmetik soll die Erklärung der Regeln — schreibt Wolfgang — so geschehen, daß »die Operationen unter dem Segel der Allgemeinheit fortgesetzt werden können und die Allgemeinheit, soweit es möglich ist, nicht verloren gehe.« Später ist *H. Hankel* (1867) der erste, der dieses *Prinzip der Permanenz* so klar und explizit ausgesprochen hat; früher als bei Wolfgang kommt es nur implizite vor. In der Theorie der Irrationalzahlen betrachtet Wolfgang die *Zeit* (wie auch *W. R. Hamilton*, 1833) als *Prototyp des Kontinuums*, als eine Trägerin der stetigen Veränderlichen. Diese Auffassung bedeutet einen Übergang von den geometrischen zu den rein arithmetischen Theorien. Über die komplexen Zahlen berichten wir später, im Zusammenhang mit *Johann von Bolyai*.

b) *Die Grundlage für Grenzprozesse* bildet das Axiom: wenn es feststeht, daß in einem Zeitpunkt die Aussage *A* richtig und später einmal nicht mehr richtig ist, so gibt es einen *letzten* Zeitpunkt unter jenen Zeitpunkten, von denen gilt, daß zwischen ihnen und einem gewissen Anfangspunkt die Aussage immer richtig ist. In jenem letzten Zeitpunkt ist entweder das *letzte A* oder das *erste nicht-A*. Diese Existenz einer *oberen Grenze* liefert die solide Grundlage, für die Grenzprozesse der Analysis. Mit dem weiteren Begriff des *unabtrennbaren* Teils definiert Wolfgang den *Bestandteil*, und mit diesem das *Kontinuum*. *Stäckel* bemerkt hierzu: »was Wolfgang vorgeschwebt hat, läuft hinaus auf die Erklärung des Kontinuums als einer zusammenhängenden, perfekten Menge, die *G. Cantor* (1883) aufgestellt hat. Gewiß ist Wolfgang weit entfernt davon gewesen, die Begriffe abgeschlossen und perfekt scharf aufzufassen, allein seine Darlegungen zeigen, daß ihm die hier vorliegenden Fragestellungen bewußt geworden sind.«

Es ist charakteristisch, daß Wolfgang $n \sim \infty$ schreibt, entsprechend der heutigen $n \rightarrow \infty$ Bezeichnung (*Leathon*, 1905), die die eigentlich inkorrekte $n = \infty$ verdrängte. Wolfgang bemerkte auch mehrere Irrtümer (bei *Montucla*, *Olivier*, *Burg*), die aus der Geschichte der unendlichen Reihen bekannt sind. Mehr als zehn Jahre vor *de Morgan* (1839) stellte er die erste sogenannte *de Morgansche logarithmische Kriteriumskala* auf.

c) *Das System der Geometrie* ist nach Wolfgang »ein in durchsichtiger Ordnung aufgebauter Inbegriff: [1] strenger Definitionen, wobei man mit den einfachsten Begriffen anfängt und zu neuen, zusammengesetzteren fortschreitet, [2] einfachster Axiome, unter denen sich keines aus den übrigen herleiten läßt, und [3] der mit ihrer Hilfe bewiesenen Sätze.« Die Forderung der *Unabhängigkeit der Axiome* war damals ganz neu. Da Wolfgang mit der Existenz starrer, beweglicher Körper beginnt, ist er ein Vorläufer von *Fr. Überweg* (1851) und *H. v. Helmholtz* (1868). Er unterscheidet zur Erklärung der Kugel, des Kreises und der Gerade: die freie Bewegung, die Drehung um einen festen Punkt und um zwei feste Punkte. »Es wäre jedoch unbillig, — schreibt *Stäckel* von diesen Ausführungen, — an einen Mathematiker, der die ersten, tastenden Versuche auf dem schwierigen Gebiete der Axiomatik machte, die Anforderungen zu stellen, die wir heute zu stellen gewöhnt sind. Auch eine zweite Entschuldigung kann man für Wolfgang geltend machen. Der Weg, den er einschlug, von der Kugel aus die Geometrie aufzubauen, ist wiederholt im Laufe des 19. Jahrhunderts beschritten worden, ohne daß diese Bemühungen jedoch zu befriedigenden Ergebnissen geführt hätten.«

d) Wolfgang nennt *endlich-gleich* zwei ebene Flächenstücke, wenn sie in eine endliche Anzahl wechselseitig kongruenter Teile zerlegbar sind. Er hat streng bewiesen, daß zwei geradlinige Vielecke von gleichem Flächeninhalt immer endlich-gleich (bei *D. Hilbert*, 1899: *zerlegungsgleich*) sind. Aber den Satz, daß die nicht gemeinsamen Teile zweier sich nur teilweise deckenden kongruenten Flächenstücke endlich-gleich sind, konnte Wolfgang nicht ganz tadellos beweisen. Sein Gedankengang wurde von dem ungarischen Mathematiker *M. Réthy* (1891—94) ergänzt⁴.

*

Natürlich übersendet Wolfgang das *Tentamen* an *Gauss*, indem er die Mitteilung macht, daß sein, mit eigenen materiellen Mitteln herausgegebenes Werk, abgesehen von einigen begeisterten Schülern und wohlwollenden Aristokraten, von sehr wenigen gekauft wird. In seiner Antwort schreibt *Gauss* unter anderem:

»Ich habe mit Vergnügen das redliche Bestreben bemerkt, überall Gründlichkeit und Selbständigkeit zu behaupten. Leider ist nur im Publicum sehr wenig Sinn für solche Bestrebungen. Den meisten Menschen ist das Oberflächliche das Liebste.«

Wir wollen aber Wolfgangs Werdegang weiter verfolgen. In Göttingen entwickelt sich zwischen ihm und dem dort schon selbständig arbeitenden *Gauss* eine warme Freundschaft. Es steht uns nicht genügend Raum zur Verfügung, diese interessante, während fast sechs Dezennien dauernde Freundschaft in Einzelheiten darzutun, wir erwähnen nur, daß nach *Sartorius von Waltershausen* — dem Verfasser der ältesten *Gauss-Biographie* (1856) — *Gauss* sich über unseren Wolfgang äußerte: er sei »der einzige gewesen, der in seine metaphysischen Ansichten über Mathematik einzugehen verstanden habe.«

Im Herbst 1799 begab sich Wolfgang allein — der mit ihm gewesene junge Aristokrat verreiste schon ein Jahr früher — nach der Heimat. Da er nur wenig Geld besaß, wanderte er zu Fuß oder verdingt als Ruderknecht bis Pest, von dort mit Wagen

weiter nach Siebenbürgen. Auch die wechselvollen Reiseabenteuer können wir nicht schildern, welche uns seine Tapferkeit, seine Gutherzigkeit, sein moralisches Verantwortungsgefühl und seinen Humor offenbaren. Nach zwei Jahren vermählt er sich zu Hause und treibt auf seiner eigenen kleinen Scholle Landwirtschaft, lebt zwar bescheiden, aber unabhängig. Darum empfing er auch mit einer gewissen Reserve im Jahre 1804 die Berufung zur Professur für Mathematik, Physik und Chemie am evangelisch-reformierten Kollegium von Maros-Vásárhely in Siebenbürgen. Endlich entschloß er sich und nahm die Berufung an. Als Professor hatte er wenig Erfolg: seine ebenso tiefen, wie rhapsodischen Vorträge wurden wenig verstanden. Treffend schreibt *Stäckel*: »Von den drei Eigenschaften, die ein vortrefflicher Lehrer in sich vereinigen muß, besaß Wolfgang zwei, und zwar in hohem Grade: den Enthusiasmus für seine Wissenschaft und ein warmes Herz für die Jugend. Was ihm fehlte, war die Gabe, seine Gedanken in leichtverständlicher Form darzustellen. Wohl hat er durch die hinreißende Lebhaftigkeit seines Vortrages Eindruck zu machen verstanden und, wenn er von dichterischer Begeisterung getrieben, Gott als den Urquell der Wahrheit und der Liebe pries, die jungen Seelen mitgerissen. Allein es waren immer nur wenige Auserwählte, die seinen mathematischen Darlegungen folgen konnten, und die Mehrzahl hatte wenig Gewinn.« Dies ist umso merkwürdiger, da er in seinen elementaren mathematischen Lehrbüchern und in einigen an *Gauss* geschriebenen Briefen ganz moderne und sehr richtige didaktische Forderungen verkündet.

Diese können in vier Punkte gefaßt werden:

1. Ständige Bildung und Anwendung der Raumschauung.
2. Führende Rolle des Funktionsbegriffs.
3. Wichtigkeit von tatsächlichen Anwendungen.
4. Stufenweise Einführung von theoretischen Werten.

Diese Forderungen enthalten vieles aus den bekannten neueren Reformbestrebungen, so daß Wolfgang auch als Didaktiker der Mathematik zu den Vorläufern zu zählen ist.

In den ersten fünfzehn Jahren seiner Professur bemühte er sich sehr viel mit dem uralten *Problem der Parallelen*, d. h. mit dem V. Postulat des *Euklids*. Dieses Postulat (in älteren Ausgaben *Euklids* — so zur Zeit der *Bolyais* — das XI. Axiom) ist äquivalent mit der Annahme, daß es zu jeder Geraden durch jeden (nicht auf ihr liegenden) Punkt genau eine Parallele gibt. Die zahlreichen, überaus schwierigen Versuche Wolfgangs (wie auch *Gauss*' ähnliche Bemühungen) blieben erfolglos: die Beweisführung des verrufenen Postulats — heute wissen wir es schon — konnte aus *prinzipiellen* Gründen nicht gelingen. Auf diese Bemühungen Wolfgangs kommen wir noch zurück. Jetzt wollen wir uns mit seinem erstgeborenen Sohne, Johann, befassen.

*

Johann von Bolyai wurde am 15. Dezember 1802 in Kolozsvár (Klausenburg), geboren; körperlich kerngesund, zeigte er geistige Frühreife. Mit vier Jahren kennt er schon mehrere geometrische Körper, weiß einiges vom Kreise, von der Ellipse, sogar

vom Sinus. Der Vater ließ ihn alles veranschaulichen: geometrische Figuren aus Papier, Körper aus Kartoffeln schneidet der Junge selbst aus. Nach den Aufzeichnungen des Vaters schreit der Kleine, noch kaum fünfjährig, während des Spiels auf: »Hi! Vati, was hab' ich bekommen: den Kartoffelsinus eines Kartoffelarcus.« Das Lesen erlernte Johann spielend, mit sieben Jahren die deutsche Sprache. Mit neun Jahren konnte er gut nach Noten Violine spielen, mit zehn übernahm er in Streichquartetten die erste Geige. Hingegen war er kein guter Rechner wie einst Wolfgang, so daß er noch als Neunjähriger mit Bohnen rechnete. Im Zeichnen blieb er sehr weit hinter dem Vater zurück. Poesie und die dichterische Sprache waren ihm nicht sympathisch, wohingegen der Vater auch hierin (mit sechs originellen Dramen und mit Übersetzungen deutscher und englischer Dichtungen) Tüchtiges leistete. Auch schriftlich betonte Johann öfter: »die poetische Sprache ist ein Unsinn.«

Bis zum neunten Lebensjahre ging allerlei Lernen spielend vor sich hin. Der Vater, seiner eigenen Jugend eingedenk, wollte ihn nicht überanstrengen. Auf körperliche Erziehung war er besonders bedacht — er schätzte *Rousseau's Emile* sehr hoch — auch noch später waren Gartenarbeit, Ballspiel, Klettern auf Bäume, Schwimmen und Fechten die Lieblingsübungen unseres Johanns. So wie im Violinspiel, so fiel auch im Fechten seine ganz außerordentliche Raschheit auf.

Das systematische Lernen begann erst mit dem neunten Lebensjahre, aber gleich mit den *Elementen Euklids* und mit der *Eulerschen Algebra*. Alsdann kam *Vega* für Trigonometrie, höhere Geometrie, Infinitesimalrechnung und Mechanik. Schon anfangs 1816 — als Johann eben dreizehn Jahre alt wurde — schrieb Wolfgang an *Gauss* unter anderem:

»Er weiß von *Vega* (welcher mein Manual ist in Collegio) nicht nur die ersten zwei Bände überall, sondern ist auch im dritten und vierten Bande bewandert, liebt Differential- und Integralrechnung und rechnet darin mit außerordentlicher Fertigkeit ... einmal (22. Februar 1816) hat er auch hievon mit meinen erwachsenen Schülern ein öffentliches Examen gegeben in lateinischer Sprache... ließ ich ihn einige Beweise in der Mechanik mit Integral-Rechnung führen, wie veränderliche Bewegung, Tautochronismus der Cycloide, u. dgl. Nichts mehr war zu wünschen; ... er hat einen schnell und viel fassenden Kopf, und manchmal Blitze von Genie, die mehrere Reihen auf einmal mit einem Blicke findend durchsehen; er liebt reine, tiefe Theorien ... ist schön und ziemlich fest gebaut, und sieht sonst still aus, ausgenommen, daß er sehr gern und feuervoll mit andern Kindern spielt ... ich glaube ihn zum Opfer der Mathematik bestimmt, er hat sich auch dazu gewidmet und verlangt nach zwei Jahren zu Dir, wenn Du auch verlangst einen echten Apostel der Wahrheit in einem fernen Lande zu bilden.«

Diesen auf Johann bezüglichen Plan entwickelt Wolfgang ausführlich in demselben Briefe:

»Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten, und wenn es möglich wäre, in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15jährigen Jüngling nicht dalassen ... Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sich's, schon entschädigen. Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mich

unverhohlen: 1. Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce wäre ... 2. Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne? und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen ... 3. Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, daß es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, daß es nicht an Deinem Herzen fehlen wird.«

Vater und Sohn erwarteten ungeduldig die Antwort, welche aber niemals kam, *Gauss* sagte weder Ja, noch Nein. Wir werden die verschiedenen Deutungen dieses Schweigens bei den Biographen nicht detaillieren — *Gauss'* Abneigung gegen den Unterricht; seine Beschäftigungen mit der Einrichtung der neuen Sternwarte; familiäre Gründe; die übervertraulichen Fragestellungen des Briefes —, wir bemerken nur, daß weder Wolfgang noch Johann dieses Schweigen jemals übelnahmen. Jedenfalls eröffnet schon der Gedanke eine riesige Perspektive hinsichtlich der Möglichkeiten für die Wissenschaft, was diese gewonnen hätte, wenn der größte deutsche Mathematiker persönlich die Leitung des jungen Genies übernommen hätte.

Da es dem Vater Johanns nicht gelang, den Sohn bei *Gauss* unterzubringen, brachte er ihn — mit materieller Unterstützung siebenbürgischer Aristokraten — in der Wiener militärischen Ingenieur-Akademie unter. Die dortige Ausbildung erachtete Wolfgang für seinen Sohn als die zweckmäßigste, weil er sich daselbst unter genügender Aufsicht befand und mehr Mathematik lernen konnte als an der damaligen Pester oder Wiener Universität. Johann absolvierte die Akademie mit ausgezeichnetem Erfolg und wurde am 1. September 1823 zum Unterleutnant befördert. In Wien bot sich für ihn auch Gelegenheit, Meister im Geigenspiel und in der Fechtkunst zu werden. Sein Violinspiel in der Wiener Oper gefiel selbst dem Kaiser. Seine Heftigkeit verwickelte ihn häufig in Ehrenhändel, aber er blieb immer Sieger. Angeblich hatte er sich während seines Militärdienstes an einem und demselben Tage mit mehreren Kavallerieoffizieren siegreich duelliert. Er erbat sich nicht jene rechtmäßigen, bei Massenduellen üblichen Pausen, seine Bedingung war nur, daß er nach jedem zweiten Duell etwas auf seiner Violine spielen dürfe.

Nach vorzüglicher Beendigung seiner akademischen Studien diente er nicht ganz zehn Jahre hindurch in verschiedenen österreichischen und ungarischen Garnisonen. Immer mehr vernachlässigte er jedoch seine Dienstobliegenheiten, seine Reizbarkeit und Verschlossenheit steigerten sich fortwährend. Zum Teil war dies alles mütterliches Erbe, da seine Mutter — eine musikalisch gebildete, nicht alltägliche Frau — als schizophrene Kranke starb; zum Teil verursachten andere, später zu erörternde Umstände bei ihm eine Gemütskrankheit. Seine Vorgesetzten behandelten ihn wohlwollend, aber endlich mußte der kränkelnde Oberleutnant, den man mit höherem Ruhegehalt zum Hauptmann beförderte, doch pensioniert werden. Als solcher kehrte er dann im Jahre 1833 nach seiner siebenbürgischen Heimat zurück.

Wolfgang — als gewissenhafter Professor und systematisierender Mathematiker — machte seinen Sohn auch mit dem Problem der Parallelen bekannt, zugleich aber warnte er ihn — als besorgter Vater — sich in dieses Problem, das ihm selbst das Leben »verdorben« hatte und mit welchem auch *Gauss* vergeblich sich abmühte, zu vertiefen. Ganz erschrocken erhielt er also von Wien aus, anfangs 1820, Johanns Mitteilung über seinen Versuch, das XI. Axiom (V. Postulat) zu beweisen. Wolfgang antwortet gleich, mit ergreifenden Worten:

»Die Parallelen auf jenem Wege sollst Du nicht probieren; ich kenne auch jenen Weg bis zu Ende, auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen: jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden. Ich beschwöre Dich bei Gott! laß die Parallelen in Frieden. Du sollst davor denselben Abscheu haben, wie vor einem liederlichen Umgang, sie kann Dich um all' Deine Muße, um die Gesundheit, um Deine Ruhe und um Dein ganzes Lebensglück bringen. Diese grundlose Finsternis würde vielleicht tausend Newtonsche Riesenthürme verschlingen, es wird nie auf Erde hell werden, und das armselige Menschengeschlecht wird nie etwas vollkommen Reines haben, selbst die Geometrie nicht, es ist in meiner Seele eine tiefe und ewige Wunde; behüt' Dich Gott, daß diese sich (bei Dir) je so tief hineinnagen möchte. Diese raubt einem die Lust zur Geometrie, zum irdischen Leben; ich hatte mir vorgenommen, mich für die Wahrheit aufzuopfern; ich wäre bereit gewesen zum Märtyrer zu werden, damit ich nur die Geometrie von diesem Makel gereinigt dem menschlichen Geschlecht übergeben könnte. Schauderhafte, riesige Arbeiten habe ich vollbracht, habe bei weitem Besseres geleistet als bisher (geleistet wurde), aber keine vollkommene Befriedigung habe ich je gefunden; hier aber gilt es: *si paulum a summo discessit, vergit ad imum*. Ich bin zurückgekehrt, als ich durchschaut habe, daß man den Boden dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichen kann, ohne Trost, mich selbst und das ganze menschliche Geschlecht bedauernd. Lerne an meinem Beispiel: indem ich die Parallelen kennen wollte, blieb ich unwissend, diese haben mir all' die Blumen meines Lebens und meiner Zeit weggenommen. Hier steckt sogar die Wurzel aller meiner späteren Fehler. . . . Glaube mir! und lerne jetzt, schreite vorwärts . . . Es ist unbegreiflich, daß diese unabwendbare Dunkelheit, diese ewige Sonnenfinsternis, dieser Makel in der Geometrie zugelassen wurde, diese ewige Wolke an der jungfräulichen Wahrheit . . . Die Säulen des Hercules stehen in diesen Gegenden, gehe nicht um einen einzigen Schritt weiter, sonst bist Du verloren.«

Auch einige, mit dem V. Postulat äquivalente Grundsätze läßt er Johann wissen, fügt aber hinzu:

»Es gibt unter meinen Axiomen auch solche, die Dir im ersten Augenblick als richtig vorkommen würden, die es aber nicht sind, sie bilden keine durchaus einfache und hinreichend klare Grundlage für eine Wissenschaft wie die Geometrie.«

Der Sohn aber — o seliger Ungehorsam! — hörte nicht auf den Vater, das Genie ging seine eigenen Wege. Anfangs, ungefähr bis zum zwanzigsten Lebensjahre, versuchte er einen Beweis des berüchtigten Postulates zu erbringen. Nachher bemühte er sich, die Folgerungen, die sich aus der Annahme ergeben, daß das V. Postulat nicht erfüllt sei, zu entwickeln, hoffend, in dieser nichteuklidischen Geometrie einen Widerspruch zu finden. Endlich beginnt er an der Möglichkeit eines solchen Widerspruchs

früher Sonderabdrücke dieses Werkchens herstellen, und ein Exemplar wurde am 20. Juni 1831 an *Gauss* gesandt, der aber nur das Begleitschreiben erhielt. Wolfgang schickte ihm dann ein zweites Exemplar, das anfangs 1832 in Göttingen anlangte. Dieses Exemplar, mit einem zweiten Brief, wurde durch einen jungen, ungarischen Aristokraten zugestellt. Der Übergeber schrieb gleich seinen Eltern:

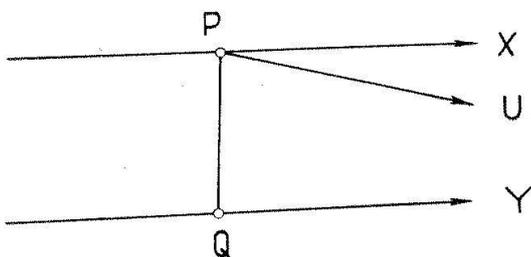
»Ich ersuche Sie, dem Wolfgang *Bolyai* zu sagen, daß, als ich im Leseverein von *Gauss* Abschied nahm und ihn fragte, ob er nicht etwas sagen ließe, er mir erwidert hat, daß er ihm vor nicht langer Zeit auf seinen Brief eine Antwort geschickt. Darauf haben wir uns verabschiedet. Er hat aber nachher plötzlich seine Zeitung beiseite gelegt, mich wieder aufgesucht und mich gefragt, ob ich seinen (d. h. des Wolfgang *Bolyai*) Sohn persönlich kenne. Als ich mit »Ja« antwortete, sagte er: *Der ist ein sehr ausgezeichnete Kopf, ja sehr ausgezeichnet*; dann übergab er mir auch eine von seinen Arbeiten, welche ich dem *Bolyai* nach meiner Heimkehr übergeben werde. Ich weiß nicht, ob ich schon geschrieben habe, daß er, als ich ihm die Arbeit von Johann zuerst übergab und er den Titel las, lächelnd ein leises *Hm, hm!* hören ließ, als ob er sagen wollte: *magna petis, Phaëton*. Aber, wie ich aus seiner jetzigen Ausdrucksweise ersehe, hat er sie doch richtig gefunden.«

Der Titel lautet in Johanns deutscher Fassung: *Absolut wahre Raumlehre: unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des XI. Euklid'schen Axioms, mit geometrischer Quadratur des Kreises im Falle der Falschheit.*

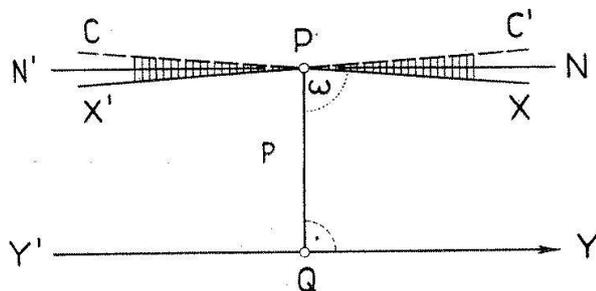
Über dieses, kaum sechsundzwanzig Seiten umfassende Wunderwerkchen wollen wir jetzt in großen Zügen berichten.

*

Johann beginnt gleich mit der folgenden Erklärung des *Parallelismus*: wenn sich die (in einer Ebene liegenden) gerichteten Geraden PX und QY (Fig. 1) nicht schneiden, aber jede Halbgerade PU im $\sphericalangle XPQ$ die QY schneidet, so werde dies durch $PX \parallel QY$ bezeichnet. Diese *reziproke* und *transitive* Beziehung hat noch die Eigenschaft der *Erhaltung des Parallelismus*: die PX ist in jedem ihrer Punkte parallel zu QY , d. h. die Lage von P auf der Geraden kann beliebig sein.



Figur 1.



Figur 2.

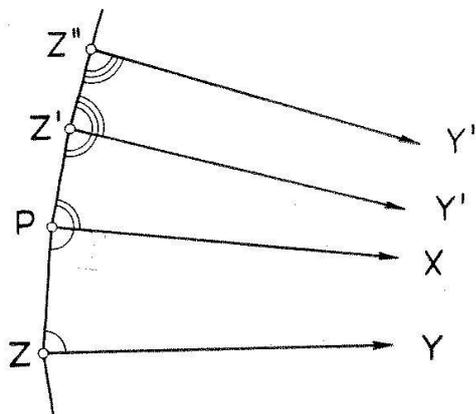
Es sei jetzt $PQ \perp QY$ und $PX \parallel QY$ (Fig. 2). Wir setzen $\omega = f(p)$, d. h. den *Parallelwinkel* $\omega = \sphericalangle XPQ$ als Funktion des *Parallelabstandes* $p = PQ$. Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Funktion, d. h. Existenz und Unizität der *Grenzhalfgeraden* PX , wird

postuliert. Liegen nun PX' und PX symmetrisch zum Lote PQ , so ist $PX' \parallel QY'$. Es gibt also entweder zwei oder nur eine parallele Gerade durch P , je nachdem $\omega < R$ oder $\omega = R$ ist. Im ersten Falle nimmt der Parallelwinkel mit wachsendem Parallelabstand ab, und es strebt $\omega \rightarrow 0$ für $p \rightarrow \infty$.

J. Bolyai unterscheidet nun zwei Geometrien: das System Σ mit *unveränderlichem* und das System S mit *veränderlichem* Parallelwinkel: die euklidische und eine nicht-euklidische Geometrie. Die gemeinsamen Sätze der beiden Systeme bilden nach Johann die *absolute* Geometrie. In S ist die Winkelsumme des Dreiecks veränderlich, beträgt weniger als $2R$; es gibt hier keine Ähnlichkeit ohne Kongruenz; der Flächeninhalt des Dreiecks ist proportional seinem Defekt, d. h. der Differenz $2R - (\alpha + \beta + \gamma)$. (Vgl. die Analogie mit dem sphärischen Dreieck.)

Wenn in S die Halbgeraden PC und PX , PC' und PX' sich zu Geraden ergänzen (Fig. 2), so sind die unendlichvielen Geraden durch P in den Scheitelwinkeln — wie z. B. NN' — *nicht-schneidende* (oder *überparallele*) zu $Y'Y$. (In Σ schrumpfen jene zwei Scheitelwinkel der Nichtschneidenden in eine einzige euklidische Parallele zusammen.) In S sind zwei Parallelen immer *asymptotisch*, d. h. unbeschränkt konvergierend in der Richtung des Parallelismus, hingegen haben zwei Nichtschneidende genau ein *gemeinsames* Lot, und von dieser »Achse« divergieren die Nichtschneidenden nach beiden Seiten unbeschränkt. In demselben System sind alle »Streifen«, d. h. alle Konfigurationen je zweier Parallelen kongruent; hingegen gibt es in Σ unendlichviele inkongruente Streifen.

Es sei (Fig. 3) z. B. $ZY \parallel PX$ und $\sphericalangle YZP = \sphericalangle XPZ$. Man sagt mit *Gauss*, daß P und Z *korrespondierende* Punkte sind. Nun definiert Johann als eine *F-Fläche* (heutzutage *Grenzkugel* oder *Parasphäre* genannt) die Punktmenge des P und aller Z (wie z. B. Z', Z'', \dots). Diese Fläche ist eine Ebene in Σ , eine krumme Fläche und zwar eine



Figur 3.

Kugel mit »unendlichgroßem« Radius in S . Die bei der Definition ausgewählte Gerade PX spielt keine besondere Rolle: alle $ZY, Z'Y', Z''Y'', \dots$ und PX sind *Rotationsachsen* der F , da die Korrespondenz eine symmetrische und transitive Beziehung ist. Jede Ebene, die eine Rotationsachse enthält, schneidet aus der F eine *L-Linie* (heutz-

tage *Grenzkreis* oder *Paracykel* genannt) aus. Diese Linie ist eine Gerade in Σ , eine krumme Linie und zwar ein Kreis mit »unendlichgroßem« Radius in S . Alle F -Flächen (L -Linien) sind kongruent. Die F (die L) ist senkrecht auf allen ihren Achsen. Durch je zwei Punkte ist in F genau eine L bestimmt.

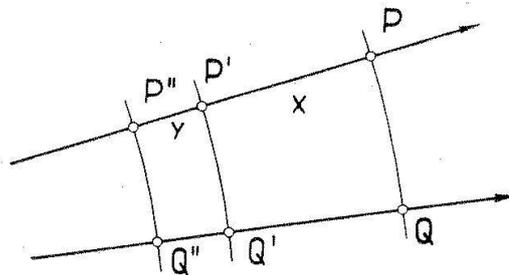
Einfache Überlegungen zeigen nun: *auf der F gilt die ebene euklidische Geometrie, wenn die L -Linien die Rolle der Geraden übernehmen.* Z. B. die Winkelsumme des Dreiecks auf der F (mit L -Bogen als Seiten) beträgt π , es gilt die euklidische Trigonometrie bei solchen Dreiecken; Umfang und Inhalt eines Kreises auf der F (mit L -Bogen als Radius) betragen $2\pi r$, bzw. πr^2 .

Das Ergebnis, daß die F eine »Trägerin« der ebenen euklidischen Geometrie ist, liefert den *absoluten Sinussatz*:

$$\circ a : \circ b : \circ c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

wobei a, b, c die Seiten, α, β, γ die Winkel eines ebenen Dreiecks, und $\circ x$ den Kreisumfang mit Radius x bezeichnen. »Ein absoluter Satz von *Bolyai*, der von wunderbarer Einfachheit und Eleganz ist«, schreibt *R. Bonola*^b (1908).

Es ist unschwer, die Erklärung des Parallelismus zweier L -Linien zu geben: *parallele L -Linien sind gleichzeitig Abstandslinien*, d. h. sie haben gleiche Abstände von einander. (Vgl. die Analogie mit den euklidischen parallelen Geraden.) Das Verhältnis »entspre-



Figur 4.

chender« Bögen von parallelen L -Linien (Fig. 4) hängt — wie bei konzentrischen Kreisen in Σ — nur von der »Ringbreite« x ab. Also kann man schreiben:

$$\widehat{PQ} : \widehat{P'Q'} = F(x); \quad \widehat{P'Q'} : \widehat{P''Q''} = F(y); \quad \widehat{PQ} : \widehat{P''Q''} = F(x+y) = F(x) \cdot F(y).$$

Man erhält

$$\widehat{PQ} : \widehat{P'Q'} = e^{\frac{x}{k}},$$

wo der *Parameter* $k > 0$ jene »Ringbreite« bedeutet, für welche das Verhältnis entsprechender Bögen $e = 2,718\dots$ ist. Das ist nur in S möglich, da die Parallelen asymptot-

tisch sind; in Σ hat man $\widehat{PQ} : \widehat{P'Q'} = 1$, d. h. $k \rightarrow \infty$.

Die $F(x)$ wird — der geometrischen Anschauung zuliebe — als stetig vorausgesetzt. Die einzige stetige Lösung der Funktionalgleichung $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ kann man in der Form $e^{\frac{x}{k}}$ schreiben.

In \mathbf{S} existiert also eine absolute (d. h. rein logisch definierte) Längeneinheit, nämlich der Parameter k . In Σ haben wir bekanntlich nur den rechten Winkel als absolute Einheit.

Das Verhältnis $\widehat{PQ} : \widehat{P'Q'}$ hängt auch vom Parallelwinkel des Abstandes x ab, so daß endlich die Beziehung

$$\text{ctg } \frac{\mu}{2} = e^{\frac{x}{k}}$$

besteht, wo μ den zum Lote x gehörigen Parallelwinkel bezeichnet. (Vgl. Fig. 2: $p = x$, $\omega = \mu$.) Dieser höchstwichtige Satz liefert die ganze Metrik und Trigonometrie der Bolyaischen Geometrie, d. h. das System \mathbf{S} , inbegriffen (bei $k \rightarrow \infty$) die euklidische Geometrie. Johann erhält z. B. für den Umfang und Inhalt des Kreises mit dem Radius r :

$$\circ r = 2\pi k \text{ sh } \frac{r}{k}, \quad \odot r = 4\pi k^2 \text{ sh}^2 \frac{r}{2k},$$

die bei $k \rightarrow \infty$ gegen $2\pi r$, bzw. πr^2 streben. Die Trigonometrie in \mathbf{S} ist formal identisch mit der euklidischen sphärischen Trigonometrie vom Radius $-ik$, ($i = \sqrt{-1}$).

(Natürlich schreibt man $\cos(ix) = \text{ch } x$, $\sin(ix) = i \text{ sh } x$.)

Im Appendix gibt Johann erstmalig auch schöne geometrische Konstruktionen für den Parallelwinkel bei gegebenem Parallelabstand, oder umgekehrt, usw.

Geometrische Konstruktion bedeutet hier die ausschließliche Anwendung endlichvieler Geraden, Kreise, Grenzkreise und Abstandslinien. Die Abstandslinie (auch Überkreis oder Hypercykel genannt) ist die Menge aller Punkte (in einer Ebene) die von einer Geraden gleiche Entfernungen haben. Johann zeigt: die Abstandslinie ist formal ein Kreis mit imaginärem Radius. Es gibt also in \mathbf{S} drei Arten von Kreisen: gewöhnliche Kreise, Grenzkreise und Überkreise. Alle sind senkrechte Trajektorien von Geradenbüscheln: die eigentliche Büschel, Parallelenbüschel oder Büschel der Lote einer Gerade sind.

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ beweist, daß die euklidische Geometrie — als ein spezieller Fall der Bolyaischen — auch ohne das V. Postulat entwickelbar ist. Dieser Grundsatz ist also überflüssig, und aus den übrigen euklidischen Postulaten unabweisbar⁶.

So endete also das zweitausendjährige Ringen mit dem berüchtigten Postulat.

Bald nachdem *Gauss* — wie schon erwähnt — in den Besitz des *Appendix* gelangte, schrieb er (14. Februar 1832) einem Marburger Professor:

»Noch bemerke ich, daß ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit großer Eleganz entwickelt... Der Verfasser ist... Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer *v. Bolyai* für ein Genie erster Größe.«

Bezüglich den Inhalt dieses Briefes bemerken wir: 1. daß der Satz »worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde« jene Tatsache nicht ausschließt, daß die Aufzeichnungen von *Gauss* nicht alle Ideen und Resultate des *Appendix* enthalten; 2. daß die mit Wolfgang im Jahre 1798 geführten Gespräche nur dem »Beweise« des V. Postulates dienten.

Nach diesem Brief schrieb *Gauss* (6. März 1832) an Wolfgang unter anderem:

»Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfangen, daß ich solche nicht loben darf, so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehend mit meinen, zum Teile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt... Dagegen war es meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, daß es wenigstens mit mir dereinst nicht untergehe. Sehr bin ich also überrascht, daß mir diese Bemühung nun erspart werden kann... jedenfalls bitte ich Dich, ihn [Deinen Sohn] herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern...«

Der Brief hat Johann aus zwei Gründen sehr aufgeregt und niedergeschlagen: 1. darum, weil *Gauss* ihm die Priorität absprechen will, 2. darum, weil *Gauss* mit seinem großen Ansehen ihn aus der Namenlosigkeit nicht hervorheben will, er hält nämlich die Mehrheit der Mathematiker nicht genügend verständig für das Thema des *Appendix*.

Der erste Grund war umso schmerzhafter für Johann, weil allein auf den Brief von *Gauss* sich stützend, ihn jenes Bewußtsein nicht trösten konnte, daß sein Standpunkt wesentlich höher stehend und die Ausführung eine viel vollständigere sei, als jene des *Gauss* oder irgend eines Anderen seiner Zeit. Der zweite Grund wirkte auf die Ruhmgerichtigkeit seiner Seele (die durch die militärische Erziehung nur weitere Entwicklung erfuhr) besonders nachhaltig. Obzwar die Ansicht *Gauss*'s, daß die wissenschaftliche Welt für den *Appendix* noch nicht genug reif sei, eigentlich die höchste Anerkennung bedeutet, so wollte Johann doch in seinem hochstrebenden Jugendeifer noch zu Leb-

zeiten allgemein gewürdigt und geschätzt werden in einer Sache, um welche sich lange Jahrhunderte hindurch so viele hervorragende Geister vergeblich bemühten. Es ist verständlich, daß er sich nach Ruhm und Erfolg sehnte: er war ein krankes, sich verzehrendes Genie und nicht ein gesunder, auf hoher Warte stehender alter Weise, der die Dinge nach *Goethe'scher* Betrachtung sieht, wonach »die Tat ist alles, nicht der Ruhm«. (Es steht nicht im Widerspruch zu *Gauss's* zurückhaltendem Wesen, daß er in den *Göttinger Gelehrten Anzeigen* sehr oft auch über mittelmäßige wissenschaftliche Ereignisse berichtete, wie z. B. über das Erscheinen einer Logarithmentafel.)

Wenn er die Gesellschaft seiner Offizierskollegen im Interesse seiner schwierigen wissenschaftlichen Forschungen auch vorher schon mied, wenn als schweres, mütterliches Erbe ihn schon seit Kindheit eine außerordentliche Reizbarkeit befiel: nach dem Lesen des *Gauss'schen* Briefes steigerten sich diese krankhaften Züge. Aus dem lieben Jungen, der die persönliche Tapferkeit und das Wahrheitsgefühl so harmonisch zu vereinigen verstand, wurde immer mehr ein schwermütiger, mißtrauischer, unfreundlich wichtigtuender, früh alternder Mann. So trat er den Weg — wie gesagt, im Jahre 1833 — nach der siebenbürgischen Heimat an. Dann, zu Hause, in dem ziemlich unbeschränkten bürgerlichen Leben gestaltete sich sein Benehmen nur noch schiefer.

*

Beide, Vater und Sohn, versuchten noch einmal, sich aus der Namenlosigkeit emporzurichten: im Jahre 1837 beteiligten sich beide am Preisausschreiben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig für eine Verbesserung der Theorie von der geometrischen Konstruktion der imaginären Größen. Wolfgang — den ein Professor in Maros-Vásárhely auf die Preisbewerbung aufmerksam machte — schrieb sogleich an Johann und erklärte, daß er sich um den Preis bewerben werde, und forderte ihn auf, das Gleiche zu tun. Die Lehre von den komplexen Größen war damals ein dunkles Gebiet der Arithmetik und verursachte zahlreiche Dispute zwischen unseren leidenschaftlichen Mathematikern. Durch dieses Preisausschreiben war nun eine Möglichkeit gegeben, daß unbefangene Richter in dieser Streitfrage entscheiden.

Es wurden nur drei Arbeiten eingereicht, und die Autoren waren alle Ungarn: die beiden *Bolyai* und ein Professor (*Franz Kerekes*) am Kollegium zu Debrecen. Diesem letzteren wurde die Hälfte des ausgeschriebenen Preises zuerkannt, »wofern — sagt das Urteil der Preisrichter — er [der Verfasser] es nicht vorzieht, seine Abhandlung mit Berücksichtigung der im Programm der Gesellschaft angedeuteten Lücken und Mängel überarbeitet und vermehrt der Gesellschaft wieder vorzulegen...« Prof. *Kerekes* antwortete, daß er bereit sei, seine Arbeit auszubessern. Hierauf ist aber keine Antwort aus Leipzig gekommen.

»Die erste Arbeit — schreiben die Preisrichter über Wolfgang's Abhandlung — leidet ziemlich stark an Dunkelheit der Sprache, an undeutlicher Erklärung der Begriffe, an unnützigem Aufhäufung ungebräuchlicher Zeichen und an Mangel einzuernender Früchte.«

»Nicht viel lobenswerter erschien die andere Arbeit mit dem Motto . . .« schreiben die Preisrichter über Johanns Abhandlung. »Diese ist jener ersten in jeder Beziehung, namentlich auch insofern nicht unähnlich, als sie, wenn auch nicht so arg, doch beinahe in dieselben Fehler verfällt, die wir bei der Beurteilung getadelt haben.«

Die Arbeiten der Bolyais haben sich im Nachlasse gefunden.

»Was Wolfgang vorbringt — schreibt *Stäckel* — stimmt im Wesentlichen mit den betreffenden Abschnitten des *Tentamens* überein; eine Ausnahme bilden nur die Ausführungen über den Logarithmus, die eine unverkennbare Ähnlichkeit mit der Auffassung haben, die Johann in § 8 der *Responsio* (d. h. der *Antwort*, wie man kurz Johanns Abhandlung nennt) entwickelt. *Ohne Zweifel bedeutete Wolfgangs Abhandlung einen Fortschritt, und er befand sich auf dem Wege zu der neueren Lehre von den imaginären Größen.* Jedoch hatte er seine Gedanken in schwer verständlicher Form dargestellt . . . Dazu kam, daß Wolfgang auf das eigentliche Thema, die geometrische Konstruktion der imaginären Größen, nur ganz obenhin eingegangen war. In Johanns Abhandlung bezieht sich nur der § 10 und ein Teil des § 11 auf die geometrische Konstruktion; die im § 8 gegebene, *der Zeit vorauseilende Theorie des Logarithmus und der Potenz* kann nicht als Ersatz dafür gelten, und *die Ausführungen über die nichteuklidische Geometrie* mußten, *so wertvoll sie an und für sich sind*, dem uneingeweihten Leser der damaligen Zeit völlig unverständlich sein. Gewiß, *Johanns Theorie war ein großer Schatz* (wie er selbst in seinen Aufzeichnungen schreibt), der allerdings erst ausgemünzt werden mußte, ehe er verwertet werden konnte, *sie war ein bedeutsamer Schritt von dem Standpunkt, den Gauss eingenommen hatte, nach der Richtung der neueren Lehre von den komplexen Größen . . .* Er hat in genialer Intuition die Lösung geahnt, allein er ist nicht imstande gewesen, eine durchgebildete, allgemein verständliche Darstellung zu geben . . . Wenn Johann auch nicht die Kraft besaß, seine Gedanken abzuklären . . . *so sind seine Leistungen für die Lehre von den imaginären Größen doch des Verfassers des Appendix würdig und sichern ihm für immer einen Platz in der Geschichte dieser Theorie.*

Nun wollen wir diese Theorie in aller Kürze charakterisieren. Im Jahre der Leipziger Konkurrenz erschien die grundlegende Abhandlung von *W. R. Hamilton*, in der die moderne Auffassung der komplexen Größen als *geordnete Paare reeller Zahlen* definiert und durchgeführt wurde. Wir wissen, daß diese Theorie (die seinerzeit wenig Beachtung fand) in weiteren Kreisen erst nach sechzehn Jahren, durch die Vorrede eines anderen Werkes von *Hamilton*, bekannt geworden ist. *Es ist merkwürdig, daß die Auffassung Johanns in seiner Responsio im wesentlichen mit der Auffassung Hamiltons identisch ist*, dagegen ist die Darstellung *Hamiltons* einfacher und klarer. Für Johann war die Theorie der negativen Zahlen im *Tentamen* vorbildlich: Wolfgang hatte außer den Operationszeichen \pm auch für die Qualitäten, also für die positiven und negativen Einheiten besondere Zeichen eingeführt. Diese sichtbare Unterscheidung des Plus vom Positiven, des Minus vom Negativen bedeutet einen prinzipiellen Fortschritt (so z. B. später bei *Hankel*, 1867), aber sie macht den Formalismus zu schwerfällig, es ist also zweckmäßig, baldmöglichst festzustellen, daß schon die Zeichen \pm Genüge leisten. Ähnlich definiert Johann für die Theorie der komplexen Zahlen gleich vier Einheiten, und zeigt nachher, daß seine vierteiligen Zahlen die reduzierte Form $a + b\sqrt{-1}$ haben.

Das Resultat der Leipziger Konkurrenz hat auf beide, Vater und Sohn, sehr niederschlagend gewirkt. Johanns leidenschaftliche Ausbrüche steigerten sich und die darauf folgenden seelischen Depressionen wurden schwerwiegender; bei Wolfgang hingegen stärkte sich nur die Melancholie, sein Humor (dieses »Lächeln durch Tränen«) aber wurde tiefer. Der Vater gab sich mit dem Verbleib der äußerlichen Erfolge zufrieden: »die Uhr auch in einem kleinen Gehäuse«, pflegte er zu sagen, »zeigt dieselbe Zeit wie die Turmuhr, wenn sie auch nicht der ganzen Stadt sie verkündet«; manchmal übertrieb er seine eigene Unbedeutenheit: er schreibt über sich wie von einem Wurm, der wie seine Wurmkollegen entweder an grünen Blättern nagt oder aber seine Puppenhülle spinnt. Leicht ging diese Ergebung in das Schicksal bei dem, der seine Werke (selbst das *Tentamen*) anonym herausgab. Dies erklärt er folgendermaßen: »entweder hat die Arbeit etwas Wert oder nicht, wenn dieselbe Wert besitzt, so erhält sie diesen nicht durch den Namen, wenn sie keinen Wert hat, wozu der Name? Die Tat verleiht dem Namen das Leben, nicht umgekehrt; die Tat lebt auch namenlos. Warum zu wissen von welchem Tal der eine oder andere Tropfen in den Ozean gelangte?« Der Sohn hingegen ersetzt mit krankhaftem Eigendünkel den schmachterwarteten Ruhm: »Mir war von der göttlichen Vorsehung die Vervollkommnung der Mathematik und die Beglückung der Menschheit vorbehalten« schreibt er auf seine noch zu besprechende *Allheillehre* hinweisend. Beide befaßten sich viel mit der Perfektion der menschlichen Gesellschaft, Johann aber verschließt sich immer mehr und mehr vor der Gesellschaft der Kleinstadt, durch sein Benehmen verscheucht er die Bekannten, Freunde hat er vielleicht überhaupt nie gehabt; Wolfgang hingegen wird von Jahr zu Jahr mit größerer Verehrung umworben, in vielen Dingen wird er als Sonderling betrachtet, im allgemeinen findet man ihn aber äußerst liebenswürdig. Und wer einmal mit ihm gesprochen hat, der wendet sich dann vertrauensvoll an ihn. Daher wurde Wolfgang täglich in den verschiedensten Angelegenheiten von vielen aufgesucht, sei dies in technischen Fragen (er hatte z. B. selbstkonstruierte, ausgezeichnete Öfen), Ratschläge über Gartenbau, Weinkultur, Rechtssachen, Literatur oder gar Krankheit. Mit jedermann konnte er passend reden: mit dem einfachen Bauern ebenso wie mit dem weltmännischen Aristokraten. Er war ein blendender Causeur, nach dessen Gesellschaft sich Damen und Herren jeden Alters und Ranges aufrichtig sehnten. Nach damaligen Aufzeichnungen (dazwischen auch diejenigen Johanns), in seinen eigenen Buchdramen, sogar in den Vorreden seiner Lehrbücher waren seine Äußerungen stets geistreich und lehrreich, manchmal sarkastisch, manchmal voll mit pathetischen Aussprüchen, Zitaten aus der Weltliteratur, Vergleichen, Paradoxien. Seine Liebenswürdigkeit und sein großes Wissen zogen viele Besuche zu ihm heran und nahmen viel Zeit in Anspruch. Manchmal ärgert er sich auch deswegen über die »Zeitdiebe«, daß man nur den Gelddiebstahl bestraft und nicht denjenigen der Zeit, verschließt sich aber vor niemandem, und gegen Ende seines Lebens sagt er einem Bekannten in resigniertem Tone: »ich bekenne es aufrichtig, mein Freund, daß ich durchs Leben plaudernd schritt«. Auch Johann übte Selbstkritik, aber viel derbere und ganz anderer Natur: er anerkennt, daß er übertrieben empfind-

lich ist, daß er in seiner Jugend unnötig kühn und immer sehr sinnlich war, daß er viele Jahre fruchtlos verlebte, aber er versucht für seine Fehler — auf das Interesse der Nachwelt rechnend — Entschuldigungen zu finden; dann schreibt er ergreifend in seinen Bekenntnissen: »es ist dem Menschen schwer sich nach dem vierzigsten Lebensjahre aus dem zum Erbteil gewordenen Sumpf herauszuarbeiten«. Wahrlich hinterließ ihm seine Mutter — indem sie nach vielen Jahren geisteskrank verschied, und auch einer exaltierten Familie entstammte — ein drückendes Erbteil, dessen Last ins Gleichgewicht zu bringen die sonderbare Seelenwelt des Vaters nicht geeignet war. Sowohl in der volkstümlichen als auch in der wissenschaftlichen internationalen Literatur haben sich mehrere Psychiater mit der Seelenwelt der beiden *Bolyais* befaßt. Bezüglich Wolfgang ist die Feststellung fast einstimmig, daß er von geisteskranken Zügen frei sei; Johann hingegen wird von einzelnen schizophran, von anderen nur mehr oder weniger psychopathisch geschildert. Wenn wir nun aber nur Tatsachen erwägen (und zwar die seit 1939 bekannten auch in Betracht ziehen), wenn wir uns von der Färbung der Möglichkeiten enthalten, wenn wir uns nicht beeinflussen lassen von zweifelhaftem Gerede, dann können wir nur behaupten, daß man keinen bestimmten Beweis für die Schizophrenie (Spaltungsirrsinn) besitzt, gewiß ist hingegen der sich bald verschlechternde, bald bessernde psychopathische Zustand nach dem verhängnisvollen Brief von *Gauss*. Es war seitdem »etwas in ihm zerbrochen« schreibt *Stäckel*.

*

In beiden wirkte ein lebhaftes Mitgefühl für die Ungerechtigkeiten der menschlichen Gesellschaft. Wolfgang war immer sehr empfindsam gegenüber menschliches Elend und Leiden: eines seiner Buchdramen (1817) bildet das erste sozial-utopistische Trauerspiel in der ungarischen Literatur. In diesem ist der Hauptheld Pausanias, König von Sparta, der auf jene kommenden Zeiten weist, in welchen die Vaterlandsliebe sich zu allgemeiner Menschenliebe entwickelt, das von Bruderblut verrostete Schwert zur musealen Seltenheit wird, die Menschen nicht mehr die Worte »Armut« und »Reichtum« verstehen, und wenn niemand Nichts hat und alle Alles haben werden.

Johann, unter Einwirkung solcher und ähnlicher väterlicher Antezedenzen, fühlte sich schon in der Jugend berufen, der Menschheit die Wege zur allgemeinen Glückseligkeit zu weisen. Dieser Weg wäre eine *Allheillehre* gewesen. Er dachte nämlich sein Ziel zu erreichen, indem er sämtliche Wissenschaften in ein vollkommenes System zusammenfaßt, weil »wir zur Beglückung der Menschen nur dadurch beisteuern können, daß wir den Geist mit gründlichen Erkenntnissen aufklären«. Er wollte also die Gesamtheit der Wissenschaften in ein organisches Ganzes fassen. In diesem System nahm er als Ausgangspunkt die logischen Grundlagen der Mathematik, zur Vollendung aber die Lehre von Gott. Mit der Ausarbeitung dieser Grundlage hatte er auch schon begonnen, hat sie aber nicht vollendet; von den übrigen Wissenschaften sind nur einige Bruchteile zu finden. Auch spricht er offen aus, daß er eine Arbeit unternahm, welche seine Kräfte überstieg, eben darum begnügt er sich mit einer »vor-

läufigen« Lehre und diese wird dann abgelöst von der, durch mehr Menschenarbeit entstehenden und auch mit der Entwicklung der Wissenschaften rechnenden »ewigen« *Allheillehre*.

In der Lehre von Gott will er drei Probleme bewältigen: die Bestimmung der Qualität des göttlichen Geistes, den Beweis des Daseins Gottes, und endlich den Beweis, daß wir unser eigenes Wohl durch Leiden erkennend, mit Hilfe der — geistigen und materiellen — göttlichen Macht immer gottähnlicher werden. Nur die Aufzeichnungen bezüglich des zweiten Problems kamen aus der mächtigen, sehr schwer überschaubaren Menge von allerlei Manuskripten Johanns ans Tageslicht. Nach diesen Aufzeichnungen zeigt sich Johann als Pantheist, im Sinne der Identität des Universums und Gottes: jedes geistige und materielle Ding (Etwas) gehört also zu den Attributen Gottes. In der Auswahl zwischen den auf mancherlei Art möglichen Bewegungen, die sich innerhalb gewisser Grenzen in und um uns vor sich gehen (z. B. allgemeine Gravitation, organisches Wachsen, Losziehung), muß sich ein eigenmächtiger *Wille an sich* offenbaren, woraus nach Johann sich auf das Dasein und die ständige Wirksamkeit Gottes schließen läßt.

Es ist bemerkenswert, daß in der Zeit der streng mechanistischen (d. h. alles Geschehen mit dem vorigen Zustand *absolut* determinierenden und so den jeweiligen göttlichen Eingriff eigentlich ausschließenden) Auffassung, Johann sich mit seinen Gedanken schon jener Anschauung nähert, wonach die »wahrscheinlicheren« Zustände aufeinander folgen, aber mit der Möglichkeit eines göttlichen Eingriffes. Vielleicht verhalf ihn zu diesem neueren Standpunkt, daß er durch seine Geometrie zu der Einsicht gelang, wonach z. B. verschiedene Gravitationsgesetze möglich sind.

Ein grundlegender Gedanke der *Allheillehre* ist, daß keine individuelle Glückseligkeit ohne eine allgemeine bestehen kann. Das kann man, wie Johann meint, streng beweisen. Wenn dieser Beweis von jedem Menschen eingesehen sein wird, dann wird das schon seit Jahrtausenden vergeblich gesuchte Reich Gottes entstehen, wo jedermann selbtsbewußt und ohne Opfergefühl will und tut, was dem Wohle der Gemeinschaft und des Einzelnen dient. Dieser Wille und diese Tat sind die höchsten Dienstleistungen: die Verehrung des Göttlichen nach Johanns Vernunftreligion.

Die universale menschliche Glückseligkeit baut Johann auf die Möglichkeit der allgemeinen menschlichen Einsicht. Manche Gefühle unserer *ersten* Natur, wie z. B. Neigung und Mitleid, spornen uns, nach Johann, zum gemeinsamen Glück an. Wir müssen aber durch Lehren eine *zweite* Natur entwickeln, daß nämlich die nötige Einsicht selbstverständlich erscheine und gleichsam zu Blut werde. Die erste Natur schafft fast immer Unheil, Elend, darum soll an Stelle von Neigung und Mitleid der nüchterne Verstand treten. Wir dürfen den einen Menschen nicht mehr lieben als den anderen, dies wäre ungerecht und sowohl für die Gemeinschaft als für den Einzelnen schädlich. Statt Gefühlen ist Wissen nötig: *Wissen macht uns tatsächlich tugendhaft* — siehe, der ewige *Sokratische* Gedanke. »Der Kopf muß das Herz bilden«, führt Johann nach *Schiller* an.

Zwar ist die *Allheillehre* eher eine Vernunftreligion, als ein soziales System, doch hat Johann in derselben auch Vorschläge in soziologischer Richtung. Er plant auf Ar-

beitsteilung ruhende Gemeinden mit gelenkter Wirtschaft, mit Feststellung minimaler Arbeitsstunden, gesichertem Ruhegehalt. Die Zügellosigkeit der Künste würde er einschränken, nur die ernste Musik wäre geduldet, vom Gesichtspunkte der allgemeinen Glückseligkeit sieht er nicht den Zweck der Dichtkunst, Bildhauerei und Malerei, die den Verstand nicht ausbilden und falsche Vorstellungen von der Wirklichkeit erwecken. Die gefallsüchtige Kleidung der Frauen würde Johann maßregeln. Mit dem Sitz in London fordert er eine internationale wissenschaftliche Akademie.

Wir wollen aber dies nicht fortsetzen, nur zur näheren Charakterisierung Johanns Persönlichkeit haben wir das Vorstehende angeführt. Die Grundvoraussetzungen der *Allheillehre* sind naiv optimistisch. Auch hat das unglückliche Genie — zu seinem Glücke — nicht immer die erwähnten rationalistischen Prinzipien befolgt: selbst in seinem Alter schrieb er noch begeistert über die Ballett-Vorstellungen der Wiener Oper, und die letztthin (1939) entdeckten, dem Andenken seiner Mutter gewidmeten besonders schönen Zeilen beweisen auch, daß es doch jemanden gegeben hat, den er mehr liebte als andere Menschen.

*

Von Zeit zu Zeit kehrten beide *Bolyais* zur Mathematik zurück. Wolfgang schrieb und veröffentlichte (1851) ein Büchlein »*Kurzer Grundriß eines Versuchs . . .*«. In diesem wiederholt er einige wichtigere Gedanken des *Tentamens*. Johann fing an, in einer Raumlehre (1855) die ganze absolute Geometrie (inbegriffen auch die Topologie) axiomatisch aufzubauen. Seine Grundlegung ist außerordentlich bemerkenswert, manchmal erreicht er auch das Niveau der heutigen Axiomatik. Mit der Stetigkeit aber, mit der endlichen Gleichheit von volumengleichen Pyramiden kann Johann nicht ganz den Kampf führen und so blieb diese *Raumlehre* unvollendet.

Es ist bekannt, daß *Gauss* die erwähnte Aufgabe der Pyramiden ebenfalls nicht bezwingen konnte. Erst die Untersuchungen von *Bricard*, *Sforza* und *Dehn* (1896—1901) zeigen, daß *volumengleiche Pyramiden nicht endlich-gleich zu sein brauchen*.

In seiner Einsamkeit fehlten die Selbsterkenntnis kontrollierendes, die Selbsttätigkeit stets in entsprechender Richtung zwingendes wissenschaftliches Milieu und Literatur. Aus diesem Grunde befaßte Johann sich auch mit solchen mathematischen Problemen, deren Unlösbarkeit schon früher bekannt war, oder aber sich später herausstellte, daß ihre Lösung eine Unmöglichkeit ist. Z. B. wollte er beweisen, daß sich die allgemeine algebraische Gleichung algebraisch lösen lasse, daß jede elementare Funktion durch elementare Funktionen integriert werden könne, daß der Wert jeder konvergenten Reihe geschlossene Form hat, daß alle Primzahlen mit einer Formel darstellbar sind und dergleichen mehr. Es war ein sehr trauriger Kampf, wober *Stäckel* treffend schreibt:

»Wohl denen, die einem Achilles oder Siegfried gleich unsterblichen Ruhm erwerben und in der Blüte der Jugend dahinsinken; wehe aber denen, die ein grausames Schicksal dazu verurteilt, nach Vollendung der großen Tat, ruhmlos und unfruchtbar dahinzuleben, während sie andere, glücklichere von Sieg zu Sieg schreiten sehen.«

*

»Der Tag ist aus«, schreibt Wolfgang an *Gauss* am 20. Januar 1848, »Du hast Deinen würdigen Tage-Lohn erhalten; der meinige ist nur innere Ruhe, ohne irgend eine Belohnung unter der Fahne der Wahrheit selbst, mit dem Schicksal kämpfend, treu geblieben zu sein; wenn ich nur nicht wegen einer Reihe der besten Jahre erröten müßte, wo mich das Nicht-Ergründen der Parallelen samt dazu kommenden tausend Widerwärtigkeiten beinahe verzagt und mutlos machten. Ach wäre doch nur nach einem so stürmischen Tage der Abend nicht so trüb! oder käme bald die Nacht! und nach dem Ausruhen ein schönerer Tag mit der reinen Quelle, um des Wissens ungestillten Durst zu löschen. Uns beiden ist der letzte Akt des irdischen Spieles, aber Dir klatscht die Ewigkeit, wenn der Vorhang fällt; ich bin zufrieden wenn, nachdem die treue Begleiterin unserer Schicksale, die Glocke am Rande der Erde verhallt, selbst kein Stein mehr von mir spricht.«

Gauss beantwortete (20. April 1848) in ergreifendem Ton diesen Brief, der »wie eine Geisterstimme aus längst verklungener Zeit« zu ihm gelangte. »Es ist wahr, mein Leben ist mit vielem geschmückt gewesen, was die Welt für beneidenswert hält. Aber glaube mir, lieber *Bolyai*, die herben Seiten des Lebens, wenigstens des meinigen, . . . werden nicht zum hundertsten Teile aufgewogen von dem Erfreulichen.« Aber gerade in der *Nichtigkeit* des Lebens erblickt er die Gewißheit dessen, daß nachher eine schöne Metamorphose folgt. Er ist besorgt, daß die damaligen politischen Erdbeben früher oder später auch Siebenbürgen erreichen werden. Und tatsächlich, diesen letzten Brief von *Gauss* beantwortend, schreibt (6. Februar 1853) Wolfgang:

»Mord und Verwüstung war die Losung. Der Adel ist vorzüglich zu Grunde gerichtet . . . Nachdem Joseph II. (1780—1790) . . . (die) Leibeigenschaft aufgehoben, der Grundbesitz aber dem Besitzer blieb, jetzt, da der Adel auch den Besitz dem Bauern schenkte, anstatt des Dankens haben sie die Edelleute, wo es möglich war, grausam ermordet, ausgeplündert und alles zerstört. Auch mein kleines Landgut, welches ich auf meine letzten Tage schön eingerichtet hatte, hat man so zerstört, daß ich es nie mehr ansehen mag.«

Zu jener Zeit war Wolfgang schon emeritierter Professor. Er fühlte sich immerzu schwächer, darum schrieb er seinen *Abschied von der Erde*. Der sollte zugleich seine Todesanzeige sein. Kennzeichnend ist schon der erste Satz:

»Die für das nächste Leben reife Leibesfrucht im neunten Monat (auf ein Monat zehn Jahre rechnend) zur Welt gekommen: der Professor, der während seiner acht großen X viele kleine x geschrieben hat, schreitet mit Freuden als Schüler zu jener höheren Tafel, an welcher die an der früheren Tafel unbekannt verbliebenen x gelöst werden.«

Nachher nimmt er Abschied von Freund und Feind bald mit pathetischer, bald mit melancholischer Stimme. Der Jugend gibt er noch weise Ratschläge und schreibt noch hinzu:

»Geld hab' ich nie gehabt, aber ich kann etwas hinterlassen, was ich nicht mehr besitze und was wertvoller ist als Geld: wenn das bißchen Staub (zwar spät, aber durch Leiden mit Zinsen vermehrt) der Erde zurückgegeben wird, hinterlasse ich einem jeden, der dazu zu erscheinen beabsichtigt, *zwei Stunden* mit der herzlichen Bitte, während dieser seinen häuslichen Beschäftigungen nachzugehen; ich selbst werde ja sowieso dabei nicht zugegen

sein . . . Weder ein Pfarrer, noch irgend eine andere Feierlichkeit ist notwendig, nicht einmal eine Glocke. Nur die Schulglocke könnte läuten dem im neuen Schuljahr zum Schüler gewordenen Professor.«

Grabmal ist auch nicht nötig, schreibt er weiter, ein Apfelbaum kann höchstens vor der »Behausung« stehen, der an die berühmten Äpfel von *Eva*, *Paris* und *Newton* erinnern soll.

Nach drei Schlaganfällen starb Wolfgang am 20. November 1856. Seine Anordnungen wurden vom Kollegium befolgt, mit Ausnahme der testierten zwei Stunden: die ganze Stadt und Umgebung waren beim Begräbnis zugegen.

Zusammenfassend können wir mit *Stäckel* sagen: »Wolfgang war ein reich begabter Mensch, ja es war vielleicht sein Verhängnis, daß er zu reich begabt war; anstatt auf einem Gebiete das Höchste zu leisten, hat er seine Tätigkeit zerstreut und zersplittert. Wenn man aber fragt, welche Fähigkeit bei ihm die erste Stelle einnimmt, so wird ohne Zweifel die Phantasie zu nennen sein. Alles, was er schrieb, gestaltete sich unwillkürlich zum Gedicht; fast jeder Brief, fast jede Seite seiner Bücher geben hiervon Zeugnis.«

Mit dem Tode Wolfgangs hat Johann besonders viel verloren: sein Vater war der einzige Mann in Ungarn, der den Autor des *Appendix* und der *Responsio* entsprechend würdigen, und der Vater war der einzige — Gatte der einst geistesverwirrt verstorbenen Mutter —, der in seinem Sohne den verzerrten Menschen bedauern konnte. Sie haben miteinander oft, auch über kleinliche Dinge, debattiert, oft fühlten sie sich mit der Empfindsamkeit enttäuschter Menschen beleidigt, in der grenzenlosen und uneigennütigen Liebe zur Mathematik aber waren sie kongeniale Naturen.

Nach dem Tode des Vaters lebte Johann noch drei Jahre lang in immer größerer Vereinsamung. Am 27. Januar 1860 starb er — vielleicht infolge einer übertriebenen Wasserkur — an Lungen- und Gehirnhautentzündung. In der Stadt war sein Tod kein so großes Ereignis wie derjenige Wolfgangs. Außer der gebührenden militärischen Begleitung folgten ihm nur drei bis vier Zivilpersonen bis zum Grab. Das Grab blieb namenlos, es versank sogar. Ein Zufall wollte es nur, indem seine alte Haushälterin am Leben blieb, daß man im Jahre 1893 das Grab auffinden und es mit einem Stein bezeichnen konnte.

Während Wolfgang mehrere Bildnisse hinterließ, blieb von Johann nicht ein einziges übrig. Das Bild, welches er hatte, vernichtete er mit seinem Säbel: warum ein Bild für diese gleichgültige Welt? Sein sterbliches Antlitz bleibt ein ewiges Geheimnis, wer aber seine unsterblichen Züge kennen will, der findet diese im *Appendix* und in der *Responsio*. Und nun ist selbst diese Welt nicht mehr gleichgültig ihm gegenüber: der *Appendix* ist in französischer, italienischer, englischer, ungarischer, deutscher und serbischer Sprache erschienen.

LITERATUR

¹ *C. Fr. Gauss* und *W. Bolyai*: Briefwechsel. (Teubner, 1899).

² Darstellung des Lebens und Werks der beiden *Bolyai*:

L. Schlesinger: Festrede. (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Verein. 12, 1903);
— Neue Beiträge. (Bibliotheca Math. 12, 1903).

— *P. Stäckel*: Wolfgang und Johann Bolyai, I.—II. (Teubner, 1913).

L. v. Dávid: Leben und Werk der beiden Bolyai. (Ungarisch. Budapest, 1923. S. X. + 202.
Zweite, vermehrte Auflage noch in Manuskript).

K. Schaffer: Über den Geisteszustand der beiden Bolyai Vater und Sohn. (Psychiatrisch-Neurologische Wochenschrift 1936, Nr. 39).

³ *W. Bolyai de Bolya*: Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos... introducendi; cum Appendice triplici. Editio secunda I.—II. (Budapest, 1897—1904).

⁴ Math. Annalen 38, (1891); 42 (1893); 45 (1894).

— ⁵ *R. Bonola*: Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung in ihrer Entwicklung. (Teubner, 1908).

⁶ *L. v. Dávid*: Bolyai'sche Geometrie auf Grund des Appendix. (Ungarisch. Kolozsvár, 1944. S. VIII + 192).