Niels Henrik Abel

Autor(en): **Oystein, Ore**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **8/9/10 (1950)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5640

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel naquit le 5 août 1802 au presbytère de Finnö, petite île près de Stavanger sur la côte sud-ouest de la Norvège. Son père et son grand-père étaient pasteurs. Son grand-père était un homme capable et respecté dans sa paroisse, et lorsqu'il mourut peu après la naissance de Niels Henrik, son père fut nommé à sa succession au district plus rémunérateur de Gjerstad, près de Kragerö sur la côte du sud-est. C'était aussi un homme doué qui continua l'œuvre de bien de son père pour le perfectionnement spirituel et l'amélioration des conditions culturelles et économiques de ses paroissiens; cependant il n'arriva jamais à se rendre populaire parmi eux. Il eut une certaine importance politique et fut élu représentant aux deux premiers parlements de Norvège. Le sens pratique semble avoir été son côté faible et sa situation financière personnelle périclita progressivement. Sa femme contribua aussi à ces difficultés domestiques. Selon ses contemporains la mère de Niels Henrik était très belle, mais «sans caractère».

Il y eut cinq enfants dans la famille d'Abel, quatre garçons et une fille; Niels Henrik était le second. Leur enfance à Gjerstad se situe dans la période la plus critique de l'histoire norvégienne. Quelques remarques seront utiles pour rappeler l'horizon politique durant les annés de sa vie. Comme conséquence de son union avec le Danemark, le pays fut entraîné dans les guerres napoléoniennes aux côtés de la France. Pendant plusieurs années les côtes norvégiennes furent bloquées par la flotte britannique et une série de mauvaises récoltes successives rendit la situation alimentaire désespérée. Durant la guerre un mouvement nationaliste prit rapidement de l'ampleur; une de ses manifestations fut la création de l'université norvégienne de Christiania (maintenant Oslo), fortement soutenue par des souscriptions privées.

Par un traité de paix signé à Kiel en 1814, le Danemark céda la Norvège à la Suède. Ces nouvelles éclatèrent en Norvège comme un coup de feu; une assemblée nationale fut rapidement élue et autorisée à promulguer une constitution et à déclarer l'indépendance du pays. Après une brève escarmouche avec les forces suédoises dirigées par le nouveau prince royal, le général Bernadotte, on tomba d'accord sur une nouvelle formule qui accordait à la Norvège un gouvernement autonome en union avec la Suède. Cette solution fut saluée par tous avec satisfaction et l'avenir du pays semblait plein de promesses. Cependant le relèvement fut plus lent qu'on ne l'avait pensé, particulièrement dans le domaine économique. Les conditions économiques générales du pays étaient mauvaises, le gouvernement avait peu de crédit; les marchandises étrangères ne pouvaient s'obtenir qu'à des prix exorbitants et il était encore nécessaire de soutenir, par des fonds suffisants, la monnaie nouvelle émise après une banqueroute d'état. Ces graves difficultés ont projeté leur ombre sur toutes les institutions publiques et l'université en a ressenti le contre-coup.

Les enfants Abel reçurent leur première instruction de leur père, mais en 1815 Niels Henrik et son frère aîné furent estimés d'âge à être envoyés à Christiania à l'école Cathédrale. C'était une école éminente qui faisait partie du petit nombre d'institutions dotées pouvant attribuer des bourses. Les premières années d'école d'Abel ne furent pas particulièrement remarquables, mais vers la fin de 1817 eut lieu un incident de grande importance pour son avenir. Le professeur de mathématiques ayant infligé

une punition hors de mesure à l'un des élèves, celui-ci tomba malade peu après et mourut. On ne sait si ce fut une conséquence directe du châtiment corporel, mais le tollé fut tel que le professeur fut suspendu.

Le nouveau professeur était un jeune homme, Bernt Michael *Holmboe* (1795—1850), ayant seulement sept ans de plus qu'Abel. C'était un humaniste, féru de musique et de littérature, qui avait une attitude de sympathie envers ses élèves; mathématicien capable, sinon génial. Il avait déjà quelques liens avec l'université comme assistant de Christoffer *Hansteen* (1784—1873), le professeur d'astronomie, bien connu pour ses recherches sur le magnétisme terrestre, et qui était la sommité scientifique de la nouvelle institution.

Holmboe considérait que l'objet de l'instruction était d'amener les élèves à penser par eux-mêmes. Il posait des problèmes divers et ne fut pas long à découvrir le remarquable génie mathémathique d'Abel. Il commença très vite à donner à Niels Henrik des problèmes particuliers et à lui faire étudier des textes en dehors du programme. Une grande amitié se noua entre le professeur et l'élève, amitié qui dura jusqu'à la mort d'Abel et qui ne fut même pas ébranlée lorsqu'ils furent en compétition pour une position universitaire d'importance vitale pour eux deux. Pour Abel, cette protection et cette compréhension eurent une énorme importance. Au dire de chacun, c'était une âme chaleureuse, sensible à la compagnie et à la sympathie humaine. Dans une lettre au professeur Hansteen il écrivit: »Maintenant il me semble que je suis fait de telle façon que je ne puis absolument pas, ou du moins qu'il est extrêmement difficile pour moi d'être seul. Je deviens alors mélancolique et ne suis pas en humeur de travailler«. Il aimait beaucoup les sorties et les réunions, avide de passer une heure en agréable compagnie; il excellait aux cartes. Franc et spontané, il garda toute sa vie une simplicité presque enfantine. En 1820 son père mourut après une longue maladie. Ce fut un coup sérieux pour la famille, laissée pratiquement sans ressources. Abel devint entièrement dépendant de l'aide extérieure pour continuer ses études. Il avait déjà un sens aigu de sa responsabilité envers sa famille; en maintes occasions il puisa dans ses maigres moyens pour l'aider.

Abel avait 16 ans lorsque Holmboe devint son professeur. Ils étudièrent ensemble les œuvres d'Euler, en particulier *Introductio in Analysin infinitorum* et les deux ouvrages *Institutiones calculi differentialis et integralis*, qui étaient alors les textes classiques de l'analyse. Plus tard ils continuèrent avec les œuvres de Newton, d'Alembert, Poisson, Gauss et étudièrent avec une attention particulière celles de Lagrange. On peut juger à quel point Holmboe changea la vie d'Abel par ses emprunts à la bibliothèque de l'école Cathédrale. Avant, il lisait des romans, des récits d'histoire et de voyages, mais après, il n'empruntait plus que des ouvrages de mathémathiques. Il était naturel que le reste de ses études souffrît de cette spécialisation, mais Holmboe le soutint vaillamment et fit dans ses carnets de notes des rapports enthousiastes sur son génie mathématique. Il écrivit quelque part: »Il combine si bien le plus indéniable génie mathématique avec un zèle et un intérêt insatiable pour cette science qu'il deviendra, s'il vit, un grand mathématicien«. Ces trois derniers mots en corrigent d'autres, illisibles, peut-être »le plus grand mathématicien du monde«, que Holmboe dut effacer.

Abel était encore à l'école lorsqu'il commença à étudier l'équation algébrique du cinquième degré. La solution de cette équation avait été le problème le plus important de l'algèbre depuis la publication de l'*Ars Magna* de Cardano en 1545 où était donnée pour la première fois la solution des équations des troisième et quatrième degrés. Depuis ce temps les méthodes de l'algèbre avaient été éprouvées et développées; beaucoup de mathématiciens distingués avaient essayé sans succès leur adresse sur l'équation du cinquième degré. L'analyse la plus serrée des équations algébriques à cette date avait été faite par Lagrange, et d'après Holmboe, Abel était tout à fait familier avec ces recherches.

Après un certain temps, Abel crut effectivement avoir trouvé une méthode de solution. Holmboe n'était pas à même de voir l'erreur dans le raisonnement d'Abel, pas plus que les autres mathématiciens de l'université. On lui conseilla d'envoyer son manuscrit au professeur *Degen* à l'université de Copenhague qui jouissait d'une grande réputation parmi les mathématiciens scandinaves. Dans sa réponse Degen suggéra que si le résultat devait être publié, il aimerait voir une application à un exemple numérique; Abel, suivant ce conseil, ne fut pas long à reconnaître son erreur de raisonnement.

Pendant la même année, en 1821, Abel fut diplômé de l'école Cathédrale et commença ses études à l'université. Il reçut gratuitement une chambre dans un des collèges de l'université et, grâce à une permission spéciale de son compagnon de chambre, il put la partager aussi avec son frère. La position financière d'Abel était extrêmement modeste, mais il eut un grand nombre d'amis influents parmi les professeurs de l'université qui l'aidèrent à surmonter les plus graves difficultés. Le professeur Hansteen et sa femme étaient particulièrement aimables pour le jeune étudiant dont le génie était reconnu partout.

Il n'y avait pas alors d'organisation pour les études mathématiques avancées, de sorte qu'après un examen d'université préliminaire Abel fut conduit à suivre sa propre voie. En 1823 il publia sa première contribution dans le premier volume du nouveau *Magazine for Naturvidenskabene*. Ce périodique n'était pas destiné aux publications mathématiques et dans une note le rédacteur en chef, le professeur Hansteen, s'excusait de cette intrusion auprès des lecteurs. Quelques autres articles suivirent peu après; le premier traitait de la détermination de fonctions satisfaisant à des équations fonctionnelles, et les autres des intégrales et de la sommation des séries. Ils sont pour une grande part d'un caractère formel et sans grandes conséquences, quoique l'on puisse y discerner des rapports avec certaines des idées postérieures d'Abel.

Vers cette époque Abel écrivit un mémoire plus important qui lui gagna l'admiration des professeurs de l'université et les amena à s'occuper davantage de son avenir. Le manuscrit a disparu et nous ne savons presque rien de son contenu. Il portait le titre: «Sur l'intégration des formes différentielles» et était trop volumineux pour être inséré dans le magazine. Dans le rapport au conseil de l'université, Hansteen et Rasmussen, le professeur de mathématiques, décrivent l'œuvre comme suit: »Dans ce mémoire l'auteur développe pour tous les principaux types de formes différentielles la manière dont leur intégration peut s'effectuer; la présentation est différente de celle de toutes les œuvres de calcul intégral connues jusqu'à nous et montre que l'auteur a des facilités

peu communes pour les sciences mathématiques et qu'il est familier avec les méthodes que les savants modernes emploient dans leur présentation des sujets mathématiques abstraits«.

Le professeur Rasmussen pensait qu'il serait utile pour le jeune étudiant de discuter ses problèmes avec d'autres mathématiciens et il lui donna l'argent nécessaire pour un court voyage à Copenhague. Dans quelques lettres à Holmboe qui ont été conservées, Abel exprime son enthousiasme pour les mathématiciens danois, il commente les livres nouveaux qu'il trouve et les résultats nouveaux qu'il apprend. Dans une lettre datée $\sqrt[3]{606431219}$, y compris les décimales (4 août 1823), il parle de la formule de distribution des nombres premiers et du polynome x^2+x+41 qui prend des valeurs premières pour $x=0,1,\ldots,39$. Il donne quelques-uns de ses résultats personnels, parmi lesquels certaines expressions pour les solutions possibles de l'équation de Fermat, connues maintenant sous le nom de formules d'Abel. Une remarque présente de l'intérêt car elle montre qu'il travaillait à ce moment au début de la théorie des fonctions elliptiques: »Je lui ai demandé (à Degen) de lire le petit mémoire qui, comme vous vous le rappelez, traite de l'inversion des fonctions transcendantes elliptiques et où j'ai montré quelque chose d'impossible; mais il n'a pas été capable de découvrir aucune conclusion fausse ni de comprendre où l'erreur intervenait; Dieu sait comment je me tirerai de là«. Nous ne savons pas à quelle difficulté Abel fait allusion; peut-être la périodicité multiple des fonctions elliptiques lui apparaissait-elle à cette époque comme contradictoire?

Abel profita de son voyage à Copenhague; il visita des parents, alla à des réunions et au théâtre qui fut toujours une de ses distractions favorites. On ne doit pas non plus oublier qu'il y fit sa première rencontre avec la jeune Christine Kemp qui devint plus tard sa fiancée. Après son retour à Christiania, Abel continua à étudier les fonctions elliptiques et la solution de l'équation du cinquième degré, problème qui resta son sujet de préoccupation après son premier échec. Au printemps de 1824 il réussit à montrer que la solution en était impossible. Il désirait anxieusement présenter son résultat aussi vite que possible devant un public plus large et il imprima par ses propres moyens un petit opuscule écrit en français et intitulé: *Mémoire sur les équations algébriques*, où l'on démontre l'impossibilité de la solution de l'équation générale du cinquième degré (Chez Gröndahl, Christiania, 1824). On ne sait pas à combien d'exemplaires il fut tiré, mais c'est maintenant une des brochures mathématiques les plus rares. Comme Abel subvenait seul aux frais d'impression, la dimension de cet écrit était réduite au minimum, une seule demi-feuille en tout. Les lignes d'introduction étaient courtes et se réduisaient à ceci: »Les géomètres se sont beaucoup occupés de la solution générale des équations algébriques et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité, mais, si je ne me trompe, on n'y a pas réussi jusqu'à ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques«.

En dépit de cette économie d'espace, le mémoire présente cette clarté caractéristique des mémoires d'Abel qui en rend la lecture aisée et toujours actuelle. Par endroits, il est nécessaire de suppléer par une remarque ou deux à des considérations faites à la légère, mais dans l'ensemble l'idée générale se dégage distinctement. Observons pour

commencer que lorsque Abel parle de l'impossibilité d'une solution algébrique il veut dire qu'il n'existe pas de solution exprimable rationnellement au moyen d'extractions successives de racines à partir des coefficients; à présent nous dirions que cette équation n'est pas soluble par radicaux.

Reproduisons l'essentiel du mémoire d'Abel en termes un peu modernisés. Dans l'équation générale du cinquième degré

$$p(y) = y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \tag{1}$$

les coefficients sont supposés être des variables indépendantes. Si cette équation est soluble par radicaux, on peut obtenir une racine y de (1) par adjonction successive de racines. Pour la dernière de ces adjonctions on trouve:

$$y = p_0 + p_1 R^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = \varphi(R^{\frac{1}{m}}) \tag{2}$$

où $R^{\frac{1}{m}}$ n'est pas exprimable rationnellement au moyen des $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$ et des coefficients de (1). Dans (2) on peut toujours supposer $p_i = 1$ pour l'un des coefficients en remplaçant R par $p_i^m R$. Par un choix convenable des notations, Abel suppose $p_1 = 1$. Si l'on veut, m peut être supposé premier.

Si l'expression (2) est portée dans (1) on trouve

$$f\left(\varphi(R^{\frac{1}{m}})\right) = 0$$

et ceci signifie que les deux équations

$$f\left(\varphi(x)\right) = 0, \qquad x^m - R = 0 \tag{3}$$

ont la racine commune $x = R^{\frac{1}{m}}$. Puisqu'avec les conditions données la dernière équation (3) est irréductible dans le corps défini par les coefficients de (1) et (2), il s'ensuit que toutes ses racines doivent être racines de la première équation (3). D'où nous concluons que toutes les expressions

$$y_i = \varphi\left(\alpha^i R^{\frac{1}{m}}\right) = p_0 + \alpha^i R^{\frac{1}{m}} + \ldots + p_{m-1}\, \alpha^{i(m-1)} R^{\frac{m-1}{m}} \tag{4}$$

sont racines de l'équation originale (1) où α est une m-ième racine de l'unité.

Les équations (4) peuvent être regardées comme un ensemble d'équations linéaires en $p_0, R^{\frac{1}{m}}, p_2 R^{\frac{2}{m}}, \ldots p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ avec déterminant différent de zéro. Donc ces quantités, et par conséquent aussi

$$p_0, p_2, \ldots, p_m, R^{\frac{1}{m}}, R ,$$

peuvent être représentées rationnellement au moyen des racines y_i et des m-ièmes racines de l'unité. Les expressions effectives sont faciles à obtenir, par exemple:

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(y_1 + \alpha^{m-1} y_2 + \ldots + \alpha y_m) . \tag{5}$$

Après cette première étape on observe que les p_i et R peuvent aussi être construits au moyen d'expression avec des radicaux et peuvent être traités de la même façon. On obtient ainsi le résultat fondamental: *Si l'équation (1) a une solution (2) exprimable par des radicaux, on peut affirmer que tous les radicaux qui interviennent sont exprimables rationnellement au moyen des racines y_i et des racines de l'unité.*

Ce résultat atteint, Abel examine les moyens possibles par lesquels les expressions des racines (2) peuvent être obtenues en partant des coefficients de l'équation. Il remarque que, puisque les coefficients dans (1) sont arbitraires, les racines y_i peuvent être supposées des variables indépendantes. Soit $r = R^{\frac{1}{m}}$ le premier radical introduit, où R est une fonction rationnelle des coefficients, donc une fonction symétrique des racines y_i. D'après la première partie de la démonstration, r est une fonction rationnelle des y_i. Si les racines y_i sont permutées de toutes les $5! = 120$ façons possibles, les valeurs correspondantes de r satisfont toutes à $r^m = R$. On en conclut que r est une fonction des y_i qui prend m valeurs par toutes les permutations des variables et ces valeurs sont

$$r, \alpha r, \ldots, \alpha^{m-1} r, \alpha^m = 1 .$$

Ici m est premier et puisqu'il doit être un diviseur de 120, on a les trois possibilités: $m = 2$, $m = 3$, $m = 5$. Pour éliminer le cas $m = 3$, Abel se sert d'un résultat dû à Cauchy: Une fonction non symétrique de cinq variables prenant plus de deux valeurs en prend au moins cinq. Pour qui connaît la théorie des groupes, ceci est une conséquence directe du fait que dans le groupe symétrique de cinq éléments, tous les sous-groupes ont un indice au moins égal à cinq, exception faite du groupe alterné d'indice deux.

On peut d'autre part montrer qu'une fonction qui prend $m = 5$ valeurs est fonction d'une seule des variables y_i avec coefficients symétriques, de sorte que l'on aurait

$$\sqrt[5]{R} = p_0 + p_1 y_1 + \cdots + p_4 y_1^4 = p(y_1) .$$

Si on change y_1 en y_2, on obtient un résultat de la forme

$$\alpha \sqrt[5]{R} = p_0 + p_1 y_2 + \cdots + p_4 y_2^4 = \alpha p(y_1) .$$

Mais ceci donnerait une relation entre y_1 et y_2, contrairement au fait que ce sont des variables indépendantes.

Reste le cas $m = 2$. On connaît une fonction qui prend deux valeurs, c'est le produit des différences:

$$r = \Pi(y_i - y_j)\ ,\ i < j$$

dont le carré $r^2 = D$ est le discriminant de l'équation. La fonction la plus générale qui prend deux valeurs a la forme $p_0 + p_1 r$ où p_0 et p_1 sont des fonctions symétriques. Le premier radical qui doit être extrait est donc $r = \sqrt{D}$.

A l'étape suivante, on doit considérer les radicaux de la forme

$$s = \left(p_0 + p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Si on écrit

$$s_1 = \left(p_0 - p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{m}}$$

on a

$$s \cdot s_1 = (p_0^2 - p_1^2 D)^{\frac{1}{m}} = v \quad .$$

Ce produit v est une fonction symétrique des racines y_i. Pour prouver cela, nous notons d'abord que d'après le raisonnement précédent on doit avoir $m = 2$. Mais alors s satisfait à une équation irréductible du quatrième degré et s est une fonction qui prend quatre valeurs contrairement au résultat de Cauchy.

Examinons maintenant la quantité:

$$z = s + s_1 = s + \frac{v}{s} = \left(p_0 + p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p_0 + p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{-1}{m}} \quad . \tag{6}$$

On voit que c'est une expression qui prend m valeurs. Parce que m est un nombre premier, on en tire que $m = 5$, les possibilités $m = 2$ et $m = 3$ étant exclues par le résultat de Cauchy. Nous avons observé aussi qu'une fonction à 5 valeurs peut être représentée par une seule racine y de (1)

$$z = q_0 + q_1 y + \ldots + q_4 y^4 = \left(p_0 + p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{5}} + v\left(p_0 + p_1 \sqrt{D}\right)^{\frac{-1}{5}}$$

avec coefficients symétriques. Au moyen de cette expression et de l'équation originale (1) on arrive par élimination à l'expression

$$y = s_0 + s_1 z + \ldots + s_4 z^4$$

qui a donc des coefficients symétriques. Ici nous substituons l'expression (6) pour z et nous arrivons à

$$y = P_0 + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}} \tag{7}$$

où $R = p_0 + p_1 \sqrt{D}$ et où les coefficients ont des formes semblables $P_i = A_i + B_i \sqrt{D}$. La formule (7) pour une racine de l'équation (1) est une expression au moyen de radicaux analogue à la forme (2). Par le même raisonnement qu'auparavant on trouve, correspondant à (5)

$$R^5 = \frac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) \ . \tag{8}$$

Ici nous nous trouvons en face d'une contradiction. La quantité $R^{\frac{1}{5}}$ d'après sa forme devrait être racine d'une équation du dixième degré, de sorte que c'est une fonction des y_i prenant dix valeurs. D'autre part tous les coefficients dans l'expression linéaire en y_i, au deuxième membre de (8), sont différents de sorte que par toutes les permutations des racines elle prendrait 120 valeurs.

Cette contradiction prouve le théorème d'Abel. Comme nous le disions, la présentation est extrêmement condensée et pour les contemporains d'Abel cet article parut quelque peu inintelligible. Un ou deux ans plus tard, lorsqu'Abel fit la connaissance de Crelle une des premières demandes que fit ce dernier au jeune mathématicien fut d'écrire un nouveau mémoire plus détaillé sur l'impossibilité de la solution de l'équation du cinquième degré au moyen de radicaux. Ce papier parut dans le premier volume du Journal de Crelle sous le titre: »Démonstration de l'impossibilité de la solution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré« (1826). La définition très soigneuse d'Abel et son introduction du domaine de rationalité sont remarquables; tous les résultats auxiliaires sur les permutations et sur les fonctions prenant un certain nombre de valeurs sont exposés en détail et la présentation est fort améliorée, mais les principales étapes se suivent comme dans le premier mémoire, de la manière que nous avons esquissée.

En 1824, un peu avant la publication de son mémoire sur l'équation du cinquième degré, la faculté réussit à obtenir un don public pour Abel. Elle avait d'abord proposé une bourse de voyage de deux ans pour commencer, mais le département des affaires ecclésiastiques qui administrait l'université déclara qu'il serait plus sage pour Abel de rester encore deux ans dans son pays avec un don spécial »afin qu'il puisse ici à l'université se perfectionner davantage en ces langues et sciences auxiliaires qu'à cause de

son très jeune âge il ne possédait certainement pas assez bien pour profiter pleinement de l'étude de sa science favorite dans des universités étrangères.«

Abel fut sans doute impatienté de ce délai, mais pour le progrès de ses œuvres mathématiques, ce lui fut sans aucun doute profitable de jouir d'une période tranquille et créatrice, non troublée par des devoirs ou des préoccupations économiques. Il semble probable qu'une grande partie des bases de la théorie des fonctions elliptiques fut élaborée dans l'année qui suivit. A cette date on doit mentionner un événement personnel. Mlle Kemp, dont il avait fait la connaissance à Copenhague, trouva une place de gouvernante dans une famille norvégienne qui habitait une petite ville près de Christiania et leurs fiançailles furent annoncées à Noël 1824.

Durant l'été de 1825 Abel sentit qu'il avait attendu assez longtemps et fit une demande pour sa bourse de voyage. Sa demande fut accordée après qu'il eut exposé les grandes lignes de ses plans de travail qui consistaient principalement en des visites aux universités de Göttingen et de Paris. Il mit en ordre autant qu'il put les affaires de sa famille; pour aider son frère, il laissa une petite somme d'argent à Madame Hansteen qui montra aussi son amabilité en invitant Elisabeth, la jeune sœur d'Abel, à rester avec elle. Dans les premiers jours de septembre, Abel quitta Oslo pour Copenhague sur un petit voilier qui mit cinq jours à cause de la tempête. Sa demande de passeport indique qu'il était de taille et de poids moyens, brun aux yeux bleus, et qu'il était capable d'écrire. Abel fut heureux d'avoir comme compagnons de voyage deux autres jeunes savants qui devinrent de très proches amis; l'un était Möller, minéralogiste, l'autre Bœck, docteur en médecine et physiologiste.

Après un bref séjour au Danemark, Abel alla à Hambourg où lui et ses compagnons furent bien reçus par l'astronome Schumacher, l'éditeur du nouveau périodique *Astronomische Nachrichten.* La visite fut probablement suggérée par Hansteen qui était en correspondance suivie avec Schumacher. Hansteen se servit aussi de leur voyage pour étendre ses recherches sur le magnétisme terrestre et les munit d'instruments pour des observations magnétiques, tâche qu'ils remplirent avec soin.

A Berlin Abel se présenta au conseiller Auguste Léopold *Crelle* (1780—1855) pour qui il avait une lettre d'introduction. Abel parle de leur première rencontre dans une lettre à Hansteen:

»Il fallut du temps avant que je puisse lui faire clairement comprendre quel était le propos de ma visite et ceci allait finir malheureusement s'il ne m'avait encouragé en me demandant ce que j'avais lu en mathématique. Comme je mentionnais les œuvres des mathématiciens les plus éminents, il devint très aimable et, du moins m'apparut-il, réellement heureux. Il parla avec moi d'un certain nombre de problèmes difficiles qui étaient jusqu'à présent non résolus et comme nous en arrivions à la questions de l'équation du cinquième degré, je lui dis que j'avais montré que la solution en était impossible; il ne voulait pas le croire et dit qu'il voulait en discuter. Je lui donnais mon mémoire, mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions. D'autres avaient dit la même chose et je l'ai donc récrit. Il me parla beaucoup du bas niveau des mathématiques en Allemagne et dit que les connaissances de beau-

coup de mathématiciens étaient limitées à un peu de géométrie et à quelque chose qu'ils nommaient Analyse, mais qui n'était rien d'autre que la théorie combinatoire. Cependant il lui semblait qu'à partir de maintenant les mathématiques allemandes allaient entrer dans une période meilleure. Comme je lui exprimais ma surprise de voir qu'il n'y avait pas ici, comme en France, une revue mathématique, il me déclara qu'il avait longtemps espéré fonder un tel journal et qu'il allait rapidement exécuter son plan. Ceci me fit grand plaisir puisqu'il me donne un endroit où je puis faire imprimer quelques-uns de mes petits produits.«

Cette rencontre eut une profonde influence sur la carrière mathématique d'Abel. Crelle était un ingénieur influent au service du gouvernement pour la construction des routes et des voies ferrées. Quoiqu'il ne puisse compter parmi les grands mathématiciens, il publia un nombre considérable d'ouvrages mathématiques, s'intéressa et se dévoua sincèrement à cette science. Cet enthousiasme commun effaça leur différence d'âge et lia Abel et Crelle d'une grande amitié. «Je rends visite à Crelle chaque lundi après-midi», écrit Abel, «et chaque vendredi nous nous promenons pendant deux heures. Alors, tu peux croire, nous attaquons les problèmes mathématiques aussi rapidement que ma langue non habituée à l'allemand veut bien le permettre.» A ces promenades se mêlait souvent *Jacob Steiner* (1796—1863), jeune géomètre suisse qui avait récemment trouvé une place modeste comme professeur dans une école de Berlin. En les voyant passer, un bel esprit remarqua: »Voici Adam qui se promène avec Caïn et Abel«.

Avec ces deux jeunes génies à ces côtés, tous deux bourrés d'idées, ce ne fut pas difficile pour Crelle de trouver ample matière pour un journal mathématique. En février 1826 parut le premier numéro du Journal de Crelle ou, suivant son titre officiel, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, qui fut pendant longtemps une des principales publications mondiales en mathématiques.

Le premier volume contenait six articles d'Abel et cinq de Steiner. L'une des contributions d'Abel fut une démonstration développée de l'impossibilité de l'intégration de certaines intégrales elliptiques au moyen d'expressions logarithmiques. Un article remarquable traitait de la série du binôme. A ce moment Abel, peut-être sous l'influence de l'œuvre de Cauchy, en était arrivé à penser que les fondements d'une grande partie de l'analyse n'étaient pas satisfaisants et qu'un grand nombre de conclusions étaient sans solidité. Cela était vrai en particulier pour les séries infinies. Dans une longue lettre à Holmboe écrite en janvier 1826 il exprime ses opinions à ce sujet: «Les séries divergentes sont diaboliques et c'est une honte d'oser bâtir sur elles une démonstration. En les utilisant on peut obtenir ce que l'on veut; elles ont fait beaucoup de mal et causé beaucoup de paradoxes. Peut-on imaginer chose plus ridicule que de dire

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots$$

où n est un entier positif. Risum teneatis amici. Mes yeux se sont ouverts sur cette chose surprenante: Il n'existe dans l'ensemble des mathématiques, sauf pour des cas très simples comme par exemple les séries géométriques, pratiquement aucune série infinie dont

la somme ait été déterminée avec précision; en d'autres mots les parties les plus importantes des mathématiques sont sans fondements. La plus grande partie en est correcte, cela est vrai et très surprenant. Je m'exerce à en trouver la raison; c'est un problème très intéressant. Je ne crois pas que vous puissiez mentionner beaucoup de théorèmes dans lesquels apparaissent les séries infinies et dont je ne puisse faire à la démonstration des objections bien fondées. Essayez et je vous répondrai. Même la série du binôme n'a pas été dérivée rigoureusement.« Ici Abel est interrompu par un ami qui arrive avec des lettres de Norvège et la nouvelle que Holmboe a été proposé pour remplacer le professeur Rasmussen qui s'est démis de son poste universitaire. «Recevez mes sincères félicitations et soyez assuré qu'aucun de vos amis n'en est plus heureux que moi. J'ai souvent désiré, croyez-moi, que vous ayez une autre position, car être professeur à l'école doit être une chose terrible pour quelqu'un qui, comme vous, est si intéressé par la science. Sincèrement, maintenant vous devez aussi trouver une amie...

Revenons à mon exemple. Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \text{etc.}$$

une série infinie. Vous savez qu'une méthode usuelle pour trouver sa somme consiste à déterminer la somme de la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

et ensuite de poser $x = 1$ dans le résultat. Ceci peut être correct, mais il me semble que je ne peux l'accepter sans preuve puisque, si l'on prouve que

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs de x qui sont moindres que 1, il ne doit pas nécessairement s'ensuivre que la même chose est vraie pour $x = 1$. Peut-être la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ tend vers une valeur autre que $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ quand x se rapproche de plus en plus de 1. Ceci est évident dans le cas général où la série $a_0 + a_1 + \ldots$ est divergente puisqu'elle n'a pas de somme. J'ai pu prouver que c'est correct si la série converge. L'exemple suivant montre comment on peut être déçu. On peut montrer rigoureusement que pour toute valeur de x moindre que π

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \text{etc.}$$

Apparemment cette formule serait valable pour $x = \pi$. Mais on aurait alors

$$\frac{\pi}{2} = \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi + \frac{1}{3} \sin 3\pi - \ldots \text{ (absurde).»}$$

MM les libraires Messel, Keyser & Cie à Christiania

L'exemplaire doit être remis à MM Schubart et Heideloff, Quai malaquais N° 1 à Paris

Je m'empresserai de vous donner les éclaircissements que vous m'avez l'honneur de me demander. Lorsque je dis que le nombre de transformations différentes correspondantes à un nombre premier n est $6(n+1)$ j'entends par cela qu'on peut trouver $6(n+1)$ valeurs différentes pour le module c' en supposant l'équation différentielle $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} = \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ en mettant pour y une fonction rationnelle de la forme

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n}$$

C'est cela qui a en effet lieu mais parmi les valeurs de c' il y en aura un nombre de $n+1$ qui répondent à la forme suivante de y : $y' = \frac{A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \dots + A_n x^n}{1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \dots + B_{n-1} x^{n-1}}$

Ce sont ces $n+1$ modules dont parle M. Jacobi. Ils sont en effet racines d'une même équation du degré $n+1$. Les $n+1$ valeurs étant supposées connues il est facil d'avoir les $5(n+1)$ autres. En effet en effet en désignant par c' un quelconque des modules on aura encore ceux-ci :

$$\frac{1}{c'} = \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2, \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2$$

auxquelles répondent les valeurs suivantes si

$$y \quad \frac{y'}{c'} ; \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}} \cdot \frac{1 \pm y'\sqrt{c'}}{1 \mp y'\sqrt{c'}} ; \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}} \cdot \frac{1 \pm y'\sqrt{c'}}{1 \mp y'\sqrt{c'}} ; \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1 \pm y'\sqrt{-c'}}{1 \mp y'\sqrt{-c'}} ; \frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1 \pm y'\sqrt{-c'}}{1 \mp y'\sqrt{-c'}}$$

ce qui est facil de vérifier en faisant la substitution dans l'équation différentielle. — Toutes les $6(n+1)$ valeurs du module c' seront différentes entre elles excepté pour quelques valeurs particulières de c. — Dans ce qui précède n est supposé impair et plus grand que l'unité. Si n est égal à deux c' aura encore $6(n+1) = 18$ valeurs différentes. De ces 18 valeurs il y aura six qui répondent à une valeur de y de la forme $y = \frac{a + bx^2}{a' + b'x^2}$ ce sont

$$c' = \frac{1 \pm c}{1 \mp c} ; \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{1 \mp \sqrt{1-c^2}} , \frac{c \pm \sqrt{c^2-1}}{c \mp \sqrt{c^2-1}}$$

. Il y en aura quatre qui répondent à une valeur de y de la

Extrait d'une lettre d'Abel à Legendre (datée du 25 novembre 1828).

Nous avons mentionné ces idées en détail parce qu'elle sont la base des nouvelles exigences de rigueur qu'instaure Abel dans son mémoire sur la série du binôme. Au moyen de résultats généraux, il résout le problème de «trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de x et de m pour lesquelles la série est convergente».

Dans une lettre à Hansteen, il s'exprime ainsi: «J'éprouve une joie infinie à l'idée de rentrer au pays et de pouvoir être en mesure de travailler tranquillement. J'espère que tout ira bien, je ne manquerai pas de sujets d'ici plusieurs années et il m'en viendra encore pendant le voyage, car justement il me passe en ce moment beaucoup d'idées par la tête. La mathématique pure dans son sens le plus strict doit être à l'avenir mon étude exclusive. Je veux m'appliquer de toutes mes forces à apporter un peu plus de clarté dans la prodigieuse obscurité que l'on trouve incontestablement aujourd'hui dans l'analyse. Elle manque à tel point de plan et d'ensemble qu'il est vraiment tout à fait merveilleux qu'elle puisse être étudiée par tant de gens, et le pis est qu'elle n'est pas du tout traitée avec rigueur. Il n'y a que très peu de propositions, dans l'analyse supérieure, qui soient démontrées avec une rigueur décisive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général, et il est très singulier qu'avec une pareille méthode, il ne se trouve malgré tout que peu de ce qu'on appelle paradoxes. Il est vraiment très intéressant d'en rechercher la raison. — A mon avis cela provient de ce que les fonctions dont l'analyse s'est occupée jusqu'ici peuvent, la plupart, être exprimées au moyen de puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découle une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent. — J'en ai examiné plusieurs, et j'ai été assez heureux pour les tirer au clair (la plupart). Pourvu qu'on emploie une méthode générale, ça va encore; mais j'ai dû être extrêmement circonspect, car les propositions une fois admises sans démonstration rigoureuse (c'est-à-dire sans démonstration) se sont si fortement enracinées en moi que je suis à chaque instant exposé à m'en servir sans y regarder de plus près. Ces menus travaux figureront dans le Journal publié par Crelle. — J'ai vraiment fait en cet homme une connaissance tout à fait excellente, et je ne puis assez louer mon heureuse étoile qui m'a conduit à Berlin. En vérité, je suis au fond un homme chanceux. Il y a peu de gens, il est vrai, qui s'intéressent à moi, mais ceux-là me sont infiniment précieux parce qu'ils m'ont témoigné une extrême bonté. Pourvu que je réponde en quelque mesure aux espérances qu'ils ont en moi; car ce doit être dur de voir perdue la peine qu'on se donne en faveur de quelqu'un. — Il faut que je vous raconte une offre que m'a faite Crelle avant mon départ de Berlin. Il voulait absolument me persuader de rester à Berlin pour toujours et me décrivait les avantages que j'en pourrais avoir. Si je voulais, il m'offrait la direction du Journal qui réussit bien, même pécuniairement. Il semblait vraiment que cela lui tînt à cœur, mais naturellement

je refusai. Cependant je dus exprimer mon refus sous une forme voilée, disant que je le ferais si je ne trouvais pas de quoi vivre dans mon pays (ce que je ferais en effet). Comme conclusion, il dit qu'il renouvellerait son offre n'importe quand je voudrais. Je ne peux nier que cela m'a beaucoup flatté, mais n'était-ce pas aussi bien joli? Je dus au moins lui promettre une chose très formellement, à savoir de revenir à Berlin avant la fin de mon voyage à l'étranger, et je peux en retirer du reste le plus grand profit. Il m'a donné en effet promesse tout à fait sûre de me procurer un éditeur pour mes mémoires plus étendus, et même, croiriez-vous? avec des honoraires importants. Nous avons d'abord examiné entre nous si nous publierions ensemble de temps en temps une suite de travaux étendus, et cela devait commencer tout de suite; mais après consultation avec un libraire à qui l'édition fut offerte, on préféra attendre jusqu'à ce que le Journal fût tout à fait lancé. Quand je reviendrai à Berlin, j'espère que notre plan pourra se réaliser. N'est-ce pas magnifique? Et n'ai-je pas raison de me féliciter d'être venu à Berlin? Il est vrai que je n'ai rien appris des autres pendant mon séjour, mais je n'ai pas non plus considéré cela comme le but véritable de mon voyage. Les relations doivent être l'affaire principale en vue de l'avenir. N'est-ce pas votre avis? »

Abel fut très heureux à Berlin au milieu d'amis et de mathématiciens qui appréciaient sa capacité. Son seul désappointement fut de ne pas être nommé comme successeur de Rasmussen au poste universitaire qu'Holmboe venait d'obtenir; cela le laissa sans espoir de trouver pendant longtemps une situation scientifique dans son pays. Cependant Crelle lui suggéra de rester à Berlin.

Abel avait d'abord pensé aller à Göttingen, mais avec le temps il se sentit de moins en moins décidé à rendre visite à Gauss. Il semblait sentir que Gauss se montrait réservé et appréciait peu son œuvre. Abel était aussi hésitant à quitter ses amis norvégiens, de sorte que lorsqu'ils préparèrent un voyage vers le sud, il alla à Paris par une route détournée. Leur itinéraire passait par Dresde, Prague, Vienne, le Tyrol, Trieste, Venise et, par la Suisse, il arriva ainsi à Paris en juillet 1826. Ce fut une mémorable expérience et Abel raconte éloquement et avec vivacité dans ses lettres tout ce qu'il vit et entendit. Cependant le voyage était coûteux; les ennuis financiers qu'il eut à supporter durant le reste de son temps de boursier furent, du moins en partie, dus à cette extravagance.

A Paris Abel se trouva très seul et souffrit du mal du pays. L'une de ses rares relations fut le peintre norvégien Görbitz, qui fut plein d'attentions pour lui et fit son portrait, le seul qui fut peint de son vivant. Après les charmantes journées passées à Berlin, il fut désappointé par son incapacité à entrer en contact avec les mathématiciens français. Il se plaint à Holmboe: «Les Français sont extrêmement réservés envers les étrangers. Il est très difficile d'entrer en relations suivies avec eux, et je n'ose même pas compter là-dessus. Chacun travaille pour lui-même sans s'occuper des autres. Chacun désire instruire et aucun ne désire apprendre... J'ai préparé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour être présenté à l'Institut. Je dois le faire lundi. Je l'ai montré à Cauchy qui a à peine jeté un regard dessus. Cependant

je puis dire sans me vanter qu'il est bon et je suis curieux de savoir quel sera le jugement de l'Institut.»

Le titre de ce travail était: «Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.» Abel avait réservé, pour être publié par l'Institut, un article qu'avec confiance il jugeait remarquable. Il contenait les fondements de la théorie des intégrales abéliennes, et jusqu'à Riemann et même plus tard, on peut dire que les idées contenues dans son théorème d'Abel constituent «la découverte mathématique la plus importante faite dans le siècle où nous vivons» (Jacobi).

Le théorème d'Abel concerne les intégrales des fonctions algébriques

$$\varphi(x) = \int R(x, y)\, dx \tag{9}$$

où R est une fonction rationnelle de x et de y telle que y satisfasse à l'équation algébrique

$$\Psi(y) = p_0(x) + p_1(x)y + \ldots + p_n(x)y^n = 0$$

où les coefficients sont des fonctions rationnelles. En bref et dans une forme un peu particulière, le théorème d'Abel établit que si

$$x_1, x_2, \ldots x_n \tag{10}$$

est une suite arbitraire de variables, alors la somme correspondante des valeurs des fonctions $\varphi(x_i)$ peut être représentée sous la forme

$$\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n) = v - \varphi(z_1) - \ldots - \varphi(z_p) \tag{11}$$

où v est une expression obtenue par logarithmes à partir des fonctions algébriques des variables (10), les z_i des fonctions algébriques des mêmes variables (10) et p un nombre fixe. Ceci est la première apparition de l'invariant fondamental qu'est le *genre* d'une courbe algébrique.

Appliquons le théorème à deux cas simples. Dans le premier, l'intégrale (9) sera

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

et on obtient, correspondant à (11):

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin z$$

où

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\ .$$

Si on introduit les fonctions inverses de $\varphi(x)$

$$x = \sin u, \quad y = \sin v \quad ,$$

ceci devient

$$u + v = \arcsin(\sin u \cos v + \sin v \cos u)$$

ou *les formules d'addition*

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

pour les fonctions trigonométriques.

Dans un deuxième exemple prenons pour (9) l'intégrale elliptique

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad .$$

On trouve alors le résultat dû à Euler

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(z) + C$$

où C est une constante et

$$z = \frac{x\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} + y\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}{1 - k^2 x^2 y^2} \quad .$$

Si on retourne ensuite aux fonctions inverses, on trouve le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques.

L'Institut transmit le mémoire à un comité composé de Legendre et Cauchy, avec Cauchy comme rapporteur. Abel attendit anxieusement son sort aussi longtemps qu'il put rester à Paris et il continua à attendre jusqu'à la fin de sa vie. Cauchy était entièrement absorbé par ses propres recherches et ne voulait pas prendre le temps de s'intéresser aux travaux des autres. C'est seulement après la nouvelle de la mort d'Abel qu'il soumit un rapport hâtif et plutôt réservé dans lequel il recommandait la publication. Plusieurs années après, les découvertes de Galois subirent un sort analogue, disparaissant éternellement dans les fouillis des papiers de Cauchy.

Même après avoir été accepté, le mémoire d'Abel ne fut pas publié avant 1841; alors, sur l'insistance de Jacobi et d'autres mathématiciens, il parut parmi des «Mémoires présentés par divers savants». Les aventures du manuscrit lui-même ne se terminèrent pas là. L'académie chargea *Libri* de réviser les épreuves imprimées et avant qu'elles n'aient été lues, le manuscrit disparut.

Les difficultés financières d'Abel ne lui permirent pas de rester à Paris aussi longtemps qu'il en avait eu l'intention et en janvier 1827 il retourna à Berlin, pratiquement sans un sou. Un prêt d'Holmboe l'aida à surmonter les quelques mois qui suivirent. Dans son pays aucune situation ne l'attendait et Crelle le pressa de rester à Berlin. Abel écrit dans une lettre à un ami: »Je suis inquiet pour l'avenir. J'aimerais presque rester ici en Allemagne comme je peux le faire facilement. Crelle m'assaille terriblement pour me faire rester. Il est un peu aigre envers moi du fait que je refuse. Il ne comprend pas que je puisse désirer retourner en Norvège qui lui apparaît comme une autre Sibérie.»

En dépit de ses ennuis économiques, Abel continuait ses recherches aussi intensivement qu'auparavant. Dans ses lettres à Holmboe et à Crelle il revient souvent à ses résultats sur la théorie des équations; il dit quelque part à Holmboe: »Dans la théorie des équations, j'ai posé et résolu le problème suivant qui contient en lui tous les autres: trouver toutes les équations possibles d'un degré donné qui peuvent être résolues algébriquement. En rapport avec cela j'ai trouvé beaucoup de merveilleux théorèmes... Mais le plus merveilleux, je l'ai trouvé dans la théorie des fonctions transcendantes en général et elliptiques en particulier. Mais ici je dois attendre jusqu'à ce que je revienne pour vous en parler. Par ailleurs j'ai fait un nombre étonnant de découvertes. Si seulement je les avais mises en ordre et écrites: beaucoup d'entre elles sont simplement dans ma tête.» Abel nourrit longtemps l'idée d'écrire un livre sur ses recherches sur l'intégration, mais il lui fut impossible de trouver un éditeur. Alors il commença la rédaction de quelques-uns de ses plus importants résultats sur les fonctions elliptiques, les inverses des intégrales elliptiques, domaine où il avait déjà acquis nombre de résultats avant son départ de Norvège. Il ne donne pas de détails dans ses lettres, sauf pour un résultat qui lui causa visiblement grand plaisir puisqu'il rattache ses recherches sur les intégrales à celles sur la théorie des équations. »J'ai déjà préparé un mémoire considérable dans lequel sont beaucoup de résultats particuliers (Fonctions elliptiques). J'ai trouvé par exemple qu'avec la règle et le compas on peut diviser la longueur de la lemniscate

$$\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$$

en autant de parties égales que Gauss a divisé celle du cercle, par exemple en dix-sept parties. La diviser en m parts exige une équation de degré extrêmement élevé, à savoir $m^2 - 1$ (si $m = 17$ par exemple, c'est le degré $17^2 - 1 = 288$). Si m est premier de la forme $2^n + 1$, j'ai montré que cette équation de degré $2^{n+1}(2^{n-1} + 1)$ peut être résolue simplement au moyen de racines carrées. C'est un cas très particulier d'un tas de problèmes beaucoup plus généraux.» Il ajoute à Crelle: «Dans le même ordre d'idées, j'ai éclairci le mystère qui subsistait dans la théorie de Gauss sur la division du cercle. Je vois aussi clair que le jour comment il l'a obtenu.»

Abel revint à Christiania en mai 1827. Il signala son retour au conseil de l'Université et espéra qu'on prolongerait sa bourse pour continuer son œuvre scientifique. Les autorités universitaires étaient favorables comme d'habitude, mais les temps étaient

difficiles et le département des finances rejeta la demande. Deux mois plus tard Abel renouvela sa demande et l'Université lui accorda sur ses propres fonds sa vieille bourse d'étudiant, acte d'indépendance qui fut plus tard critiqué par le département. C'était comme on voit un des innombrables conflits universitaires entre les exigences financières et le jugement scientifique, où très souvent après un recul suffisant les économies monétaires immédiates apparaissent pitoyables en comparaison de la science perdue et du dommage humain causé.

Heureusement l'espérance d'une situation universitaire considérablement améliorée apparut vers la fin de l'année 1827. Hansteen préparait depuis deux ans un voyage en Sibérie pour faire des mesures magnétiques et particulièrement pour étudier la théorie qui avait été proposée suivant laquelle la terre pouvait avoir deux axes magnétiques. Il suggéra qu'Abel fût chargé durant son absence de l'enseignement de l'astronomie. Peu de temps après, Abel continua le cours d'Hansteen à l'académie militaire et au début du printemps 1828 il fut aussi nommé docent de l'université.

Entre temps Abel vécut de leçons et d'un prêt de la banque de Norvège garanti pour lui par Hansteen, Holmboe et le frère de Holmboe. L'aggravation de sa situation après son retour contraste violemment avec sa renommée mathématique grandissante. Ses amis en Norvège étaient comme toujours conscients de sa valeur et Crelle cherchait à obtenir pour lui une position permanente à Berlin; ses articles dans le Journal de Crelle avaient placé son nom au premier plan des mathématiciens internationaux. En septembre 1827, dans le second volume du Journal, parut la première partie de son grand mémoire: »Recherche sur les fonctions elliptiques«; la seconde partie parut au printemps 1828. On trouve ici l'idée fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques considérées comme généralisations des fonctions trigonométriques. Abel introduit sa fonction elliptique fondamentale $x = \varphi(\alpha)$ comme la fonction inverse de l'intégrale:

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} .$$

Abel en déduit la double périodicité et le développement en série, les fractions partielles et les produits infinis. Le théorème d'addition, comme nous l'avons vu, est un cas particulier de son grand théorème soumis à l'Institut de France. De là découle le théorème de multiplication exprimant $\varphi(nx)$ par $\varphi(x)$ comme $\sin nx$ est exprimé au moyen de $\sin x$ et $\cos x$. Abel s'attaque alors au problème de la division et montre que $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ peut être obtenu à partir de $\varphi(x)$ par des radicaux. Dans la deuxième partie on trouve l'application à la division de la longueur de la lemniscate, ainsi que la théorie de la transformation et des recherches sur la multiplication complexe.

C'étaient des problèmes qu'Abel avait étudiés depuis plusieurs années et il avait atteint beaucoup de ces résultats avant son départ de Norvège; c'étaient probablement des parties de son livre projeté sur les intégrales. Il en était venu à considérer cette théorie comme étant son domaine privé. Rien d'étonnant alors qu'il se troubla

lorsque Hansteen en janvier 1828 lui montra le dernier fascicule des *Astronomische Nachrichten*, où *Carl-Gustav Jacob Jacobi* (1804—51) présentait sans preuve deux théorèmes qu'Abel reconnut être des conséquences de sa propre théorie de la transformation. Abel devint blême, raconte Hansteen, et dut prendre du schnaps pour surmonter son excitation. Il ajouta rapidement une note à la deuxième partie des *Recherches* montrant comment les résultats de Jacobi découlaient de sa théorie. Durant les années qui suivirent, il publia ses résultats sur les fonctions elliptiques dans le Journal de Crelle et les *Astronomische Nachrichten*, culminant en un grand *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*. La rivalité entre Abel et Jacobi fut courte et enfiévrée, mais fit beaucoup pour le rapide développement de la théorie des fonctions elliptiques.

Abel était très encouragé par l'admiration que lui exprimait le vieux maître Legendre dans leur correspondance: «En rendant justice, comme je le dois, au mérite de vos découvertes, je ne puis me défendre du sentiment d'orgueil qui m'associe en quelque sorte à vos triomphes et à ceux de votre digne émule, M. *Jacobi*, puisque c'est en grande partie par l'étude de mes ouvrages que vous avez eu l'occasion l'un et l'autre de développer les grands talents que la nature vous a départis. Dans une de ses dernières lettres, M. *Jacobi* s'exprime en ces termes sur votre mémoire imprimé dans le n° 138 du journal de M. *Schumacher:*

«Ce n° contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. *Elle est au-dessus de mes éloges, comme elle est au-dessus de mes travaux.*»

Un pareil aveu, exprimé avec tant de candeur, est aussi honorable pour M. *Jacobi* que pour vous. Vous serez sans doute dignes l'un de l'autre par la noblesse de vos sentiments et par la justice que vous vous rendrez réciproquement.»

Abel répond en traitant des équations algébriques et aussi de ses théories de l'intégration, déjà composées pendant ses études à l'université de Christiania:

«Outre les fonctions elliptiques, il y a deux autres branches de l'analyse dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. A l'aide d'une méthode particulière, je suis parvenu à beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une très grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégration:

Etant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y\,dx$, $\int y_1\,dx$, $\int y_2\,dx, \ldots$ etc. où $y, y_1, y_2, \ldots$ sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver entre elles toutes les relations possibles, qui pourront s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques.

J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante:

$$A\int y\,dx + A_1\int y_1\,dx + A_2\int y_2\,dx + \ldots = u + B_1 \log v_1 + B_2 \log v_2 + \ldots$$

où $A, A_1, A_2, \ldots$; B_1 etc. sont des constantes et $u, v_1, v_2, \ldots$ des fonctions *algébriques* de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problème, mais le plus important est le suivant:

«Si une intégrale $\int y dx$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut s'exprimer d'une manière quelconque *explicitement ou implicitement* à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer:

$$\int y dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_m \log v_m$$

où $A_1, A_2, \ldots$ sont des constantes et $u, v_1, v_2, \ldots v_m$ des *fonctions rationnelles* de x et y.» —

Par ex.: si $y = \frac{r}{\sqrt{R}}$, où r et R sont des fonctions rationnelles, on doit avoir dans tous les cas où $\frac{r dx}{\sqrt{R}}$ est intégrable:

$$\int \frac{r dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A_1 \log\left(\frac{p_1 + q_1\sqrt{R}}{p_1 - q_1\sqrt{R}}\right) + A_2 \log\left(\frac{p_2 + q_2\sqrt{R}}{p_2 - q_2\sqrt{R}}\right) + \ldots$$

où $p, p_1, p_2, \ldots q_1, q_2, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de x.»

Malgré sa préoccupation des fonctions elliptiques, Abel termina également au printemps de 1828 un grand article sur les équations algébriques. Il traitait des équations appelées maintenant équations abéliennes, ou équations dont le groupe est commutatif ou abélien. Elles sont caractérisées par la propriété que toutes les racines sont fonctions rationnelles de l'une d'entre elles $\rho_i = \rho_i(\rho)$ et que ces expressions sont telles que

$$\rho_i\big(\rho_j(\rho)\big) = \rho_j\big(\rho_i(\rho)\big) \ .$$

D'après les notes d'Abel, on peut voir qu'il publia seulement une partie des résultats qu'il avait d'abord l'intention d'inclure dans ce mémoire. La masse de manuscrits qu'il termina à cette époque semble presque indiquer qu'Abel lui-même avait le sentiment d'une course contre le temps. Durant l'année 1828 sa santé fut souvent mauvaise. Sa fiancée avait trouvé une situation dans une famille à l'aise dans le domaine de Froland au sud-est de la Norvège. Abel lui rendit visite plusieurs fois et il fut même invité à Froland pour les vacances de Noël. Peu après son arrivée il eut une violente hémorragie et on reconnut bientôt qu'il avait la tuberculose. D'abord il put travailler un peu au lit et écrivit un article très bref, le dernier, contenant le résultat dont le sort l'intéressait le plus, le théorème fondamental de son mémoire parisien disparu.

Abel était entouré par ses hôtes amicaux et sa fiancée le soigna avec amour; mais tout cela ne pouvait rien contre le mal. Abel mourut le 6 avril 1829; il avait 26 ans et 8 mois. A la même époque, Crelle lui écrivit qu'il avait été nommé professeur à Berlin. Un peu plus tard il exprima ses sentiments dans la nécrologie du Journal:

«Tous les travaux de M. Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une force de tête extraordinaires et souvent vraiment étonnantes, même sans considérer la jeunesse de l'auteur. Il pénétrait, pour ainsi dire, souvent jusqu'au fond des choses, avec une force qui semblait irrésistible, les saisissait avec une énergie si extraordinaire, les prenait de si haut et s'élevait tellement au-dessus de leur état actuel que les difficultés semblaient s'évanouir devant la puissance victorieuse de son génie... Mais ce ne sont pas les grands talents seuls de M. Abel qui le rendaient si respectable et qui feront toujours regretter sa perte. Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère et par une rare modestie qui le rendait aussi aimable que son génie était extraordinaire.»

OYSTEIN ORE, New Haven (Connecticut).

BIBLIOGRAPHIE

Œuvres complètes, de Niels Henrik Abel, mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du roi, par B. Holmboe, Christiania, 1839.

Œuvres complètes, de Niels Henrik Abel, nouvelle édition publiée au frais de l'état norvégien par M. M. L. Sylow et S. Lie, Christiania, 1881.

Niels Henrik Abel, mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance, Kristiania, 1902.

C. A. Bjerknes: Niels Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Traduction française revue et considérablement augmentée par l'auteur. Paris, 1885.

A. L. Crelle: Nécrologie. Journal für die reine und angewandte Mathematik. t. 4. 1829.

L. Königsberger: Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826 bis 1829. Leipzig, 1889.

N. H. Abel: Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)\, x^2}{1 \cdot 2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\, x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Herausgegeben von A. Wangerin, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 7. Leipzig, 1895.

N. H. Abel: Abhandlungen über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Ostwalds Klassiker Nr. 111. Leipzig, 1900.

Le portrait de la première page est l'œuvre du peintre norvégien J. GÖRBITZ (1782—1853). Il le créa pendant le séjour d'Abel à Paris.