Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **53 (1998)**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 53 (1998) 40 – 43
0013-6018/98/010040-4 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

Elemente der Mathematik

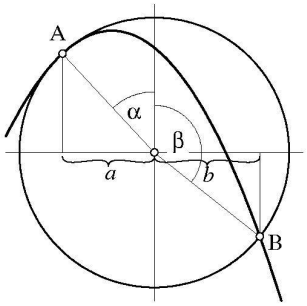
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1998 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1129: Ein an einen Faden gebundener Stein rotiert in einer senkrechten Ebene (siehe Zeichnung). Bei ungenügender Geschwindigkeit verlässt er in einem Punkt A den Kreis und geht in eine Wurfparabel über (an dieser Stelle mit gleicher Krümmung). In einem Punkt B fällt der Stein dann wieder in den Kreis zurück. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β?



Gerhard Wanner, Genève, CH

Aufgabe 1130: Die Menge $M_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ wird auf der Zahlengeraden um x Einheiten ($x \in \mathbb{N}$) nach rechts verschoben und auf die Menge $M_2 = \{1+x,\ 3+x,\ 5+x, \ldots, 2n-1+x\}$ abgebildet. Ist es möglich, $x = x(n)$ so zu wählen, dass das Produkt aller Elemente von $M_1 \cup M_2$ eine Quadratzahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Aufgabe 1131 (Die einfache dritte Aufgabe): Für welche natürlichen Zahlen n ist die Zahl

$$\underbrace{10101\ldots10101}_{2n+1 \text{ Ziffern}}$$

eine Primzahl?

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien-Herzegowina

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 1997

Aufgabe 1117. Es bezeichnen die Punkte $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ und $C = (0, b)$ im kartesischen Koordinatensystem die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit festem $a > 0$ und variablem $b > 0$. Wir bezeichnen mit y_U, y_H, y_S und y_I die Ordinaten des Umkreismittelpunktes, des Höhenschnittpunktes, des Schwerpunktes und des Inkreismittelpunktes des Dreiecks ABC. Man berechne

$$\lim_{b \to a\sqrt{3}} \frac{y_I - y_H}{y_I - y_S} : \frac{y_U - y_H}{y_U - y_S}$$

Juan-Bosco Romero Márquez, Valladolid, E

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften mit 19 korrekten Lösungen eingetroffen: G. Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Dirnböck (Moosburg, A), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Bernhard Ruh (Solothurn, CH), J. Schaer (Calgary, Canada), Volkard Schindler (Berlin, D), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Es ist fast überall derselbe Lösungsweg beschritten worden: Zunächst ist $y_S = \frac{b}{3}$, und nach dem Satz über die Eulersche Gerade folgt $\frac{y_U - y_H}{y_U - y_S} = 3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a = 1$ gesetzt werden. Dann wird $y_H = \frac{1}{b}$, und aus $\frac{y_I}{b - y_I} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ folgt $y_I = \frac{\sqrt{1+b^2}-1}{b}$. Das zu untersuchende Verhältnis k ist dann:

$$k(b) = \frac{\sqrt{1+b^2} - 2}{3\sqrt{1+b^2} - 3 - b^2} \ . \tag{1}$$

Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hospital ergibt sich schliesslich:

$$\lim_{b \to \sqrt{3}} k(b) = \lim_{b \to \sqrt{3}} \frac{b}{3b - 2b\sqrt{1+b^2}} = -1 \ .$$

Die Anwendung der Regel von Bernoulli - de l'Hospital kann auch umgangen werden: Erweitern von (1) mit $\sqrt{1+b^2} + 2$ und anschliessendes Kürzen mit $b^2 - 3$ liefert

$$k(b) = \frac{1}{1 - \sqrt{1+b^2}} \ ,$$

was direkt auf

$$\lim_{b \to \sqrt{3}} k(b) = -1$$

schliessen lässt.

Die vier Punkte H, S, I und U liegen also im Grenzfall des gleichseitigen Dreieckes "infinitesimal harmonisch".

Aufgabe 1118. Let $S(n)$ be defined as the smallest integer such that $(S(n))!$ is divisible by n (Smarandache Function). Find

$$\max_n \left(\frac{S(n)}{n}\right)$$

over all composite integers $n \neq 4$.

T. Yau, Tucson, USA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Lösungen eingetroffen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruch, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Hanfried Lenz (Berlin, D), Chr. A. Meyer (Bern, CH), Bernhard Ruh (Solothurn, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D) und François Sigrist (Neuchâtel, CH).

Heinz-Jürgen Seiffert weist darauf hin, dass seine Lösung dieser Aufgabe, die der Aufgabensteller in *School Science and Mathematics 95, 278, 1995* bereits publizieren liess, in *School Science and Mathematics 96, 284, 1996* steht. Viele Einsender haben sich über allgemeine Eigenschaften der Smarandache-Funktion Gedanken gemacht und verschiedene Hilfssätze aufgestellt. Wir folgen hier der eleganten und knappen Lösung von *Dieter Koller*.

Es sei $n \neq 4$ eine zusammengesetzte natürliche Zahl.

1. Fall: Es gibt natürliche Faktoren r und s mit $1 < r < s < n = rs$. Da $s!$ durch n teilbar ist, gilt $S(n) \leq s$ und damit

$$\frac{S(n)}{n} \leq \frac{s}{rs} = \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}\,.$$

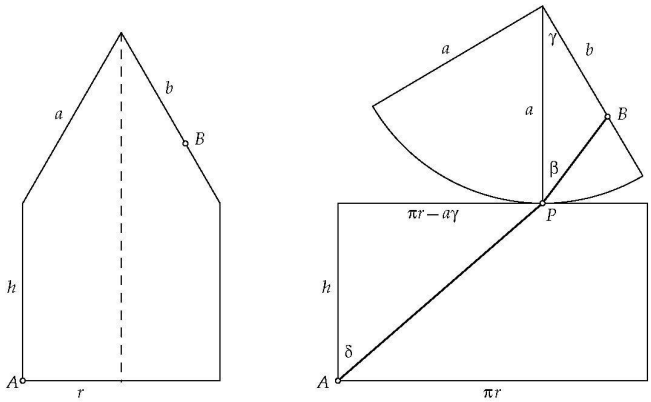
2. Fall: Wenn der erste Fall nicht eintritt, ist $n = p^2$ für eine Primzahl $p > 2$. Die Zahl $k!$ ist genau dann durch p^2 teilbar, wenn mindestens zwei der Faktoren $1, 2, \ldots, k$ durch p teilbar sind. Die kleinste Zahl k mit dieser Eigenschaft ist $k = 2p$. Es ist also $S(n) = 2p$ und

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} \leq \frac{2}{3}\,,$$

wobei das Maximum für $p = 3$, also für $n = p^2 = 9$ angenommen wird.

Aufgabe 1119 (Die (nicht ganz) einfache dritte Aufgabe). Die Figur unten stellt den Achsenschnitt eines Rotationskörpers dar, der sich aus einem Zylinder und einem Kegel zusammensetzt. Gesucht ist eine Methode zur Bestimmung des kürzesten Weges von

A nach B auf der Körpermantelfläche. Welche Länge hat dieser Weg im Spezialfall $a = 2b = 2r$ und $h = \pi r/\sqrt{3}$?



Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Lösungen eingetroffen: G. Bercea (München, D), Hans Egli (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Dieter Koller (Zürich, CH), J. Schaer (Calgary, Canada), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *François Sigrist*: Die Figur rechts zeigt die Abwicklung der einen Hälfte der Mantelfläche des Rotationskörpers. Das Minimum wird erreicht, wenn die drei Punkte A, B und P kollinear sind, also $\beta = \delta$. Aus $\tan\delta = \frac{\pi r - a\gamma}{h}$ und $\tan\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$ ergibt sich für den gesuchten Winkel γ die transzendente Gleichung:

$$\gamma = \frac{\pi r}{a} - \frac{hb\sin\gamma}{a^2 - ab\cos\gamma}$$

Falls h nicht allzu gross ist, kann γ numerisch durch Iteration der Funktion $\gamma \to f(\gamma)$ bestimmt werden; andernfalls ist mit dem Verfahren von Newton zu arbeiten. Im Spezialfall der Aufgabenstellung hat die Gleichung die exakte Lösung $\gamma = \frac{\pi}{3}$ und der kürzeste Weg die Länge $r\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 3.83r$. Mehrere Einsender weisen darauf hin, dass bei anderer Wahl der Ausgangsdaten a, b, r und h die Aufgabe mehrere relative Minima für die Weglängen haben kann.