Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **64 (2009)**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 64 (2009) 129 – 134
0013-6018/09/030129-6

© Swiss Mathematical Society, 2009

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2010 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

- *bis Dezember 2009*
  Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH–5415 Rieden
- *ab Januar 2010*
  Dr. Hansruedi Widmer, Gartenstrasse 19, CH–5400 Baden

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1269: Die Innenfläche eines zum Teil gefüllten Sektglases habe die Form eines Rotationsparaboloids. Es sei T der tiefste Punkt im Glas (bzw. der Scheitel des Paraboloids). Das Glas wird nun in Schieflage gebracht, und man beobachtet, dass die Oberfläche der Flüssigkeit sowohl den (kreisförmigen) Rand des Glases als auch den Punkt T berührt. Zu wie viel Prozent ist das Glas gefüllt?

Albert Stadler, Herrliberg, CH

Aufgabe 1270: Es seien p eine beliebige Primzahl und m eine beliebige positive ganze Zahl. Wir betrachten die Folge

$$a_n = p^{m+n} - p^m + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Man weise nach, dass die Folge eine (unendliche) Teilfolge mit paarweise teilerfremden Gliedern enthält.

Walther Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 1271 (Die einfache dritte Aufgabe): Für die reellen positiven Parameterwerte u, v, w mit $v \neq u \cdot w$ sind die Geraden

$$g_1 : x = u, \quad g_2 : y = v, \quad g_3 : y = w \cdot x$$

gegeben. Durch die Abbildung

$$\overline{x} = a \cdot x^c,$$
$$\overline{y} = b \cdot y^c$$

sind die Geraden in die Geraden

$$\overline{g}_1 : \overline{x} = \overline{u}, \quad \overline{g}_2 : \overline{y} = \overline{v}, \quad \overline{g}_3 : \overline{y} = \overline{w} \cdot \overline{x}$$

überzuführen. Dabei sind $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ebenfalls gegebene positive Zahlen mit $\overline{v} \neq \overline{u} \cdot \overline{w}$. Wie sind a, b und c zu wählen?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2008

Aufgabe 1257. k Kugeln werden unabhängig und zufällig in n Behälter gelegt. Die Zufallsvariable X zähle die nichtleeren Behälter. Bestimme den Erwartungswert $E(X)$ und die spektrale Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x)$ von X ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$).

Fritz Siegerist, Küsnacht, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungsbeiträge zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Johann Brandstetter (Wien, A), Stefan Grieder (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Problemlösegruppe MND (Giessen–Friedberg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Stefan Grieder*: Es sei eine Verteilung von k Kugeln in n Behälter gegeben, wobei i die Anzahl der nicht leeren Behälter bezeichnet. Jede solche Verteilung gibt Anlass zu einer Partition der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ in i nichtleere Teilmengen. Zu einer gegebenen Partition gibt es $(n)_i = n(n-1)\cdots(n-i+1)$ verschiedene Verteilungen, die zu dieser Partition führen.

Bezeichnen $\sigma(k, i)$ die Stirlingschen Zahlen zweiter Art, so ist $\sigma(k, i)$ die Anzahl der Partitionen einer k-elementigen Menge in i nichtleere Teilmengen. Es gilt daher mit dem vorher Gesagten

$$P(X = i) = \frac{1}{n^k}\sigma(k, i)(n)_i.$$

Weil man k Kugeln auf n^k Arten in n Behälter verteilen kann, notiert man noch

$$n^k = \sum_{i \geq 0} \sigma(k, i)(n)_i.$$

Für $E(X)$ ergibt sich dann

$$E(X) = \frac{1}{n^k}\sum_{i \geq 0} i\sigma(k, i)(n)_i = \frac{1}{n^k}\sum_{i \geq 0} (n - (n - i))\,\sigma(k, i)(n)_i$$

$$= \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i \geq 0} \sigma(k,i)(n)_i - \frac{1}{n^k} \sigma(k,i)(n-i)(n)_i$$

$$\overset{(\star)}{=} n - \frac{1}{n^k} \sum_{i \geq 0} \sigma(k,i) n (n-1)_i = n - \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i \geq 0} \sigma(k,i)(n-1)_i$$

$$= n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

Bei $(\star)$ wurde die leicht zu verifizierende Identität $(n-i)(n)_i = n(n-1)_i$ verwendet.

Mit anderen Worten: Zählt $Y = n - X$ die Anzahl der leeren Behälter, so gilt

$$E(Y) = \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

Bemerkung: Die Problemlösegruppe MND der Fachhochschule Giessen–Friedberg berechnet auch die Varianz. Sie erhält

$$V(X) = n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k + n(n-1)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^k - n^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2k}.$$

Aufgabe 1258. Gegeben seien die drei Summen

$$s_1 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-1-3k}{n-1},$$

$$s_2 = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k},$$

$$s_3 = \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \sum_{k \geq 0} 3^{-k} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k}.$$

Beweise, dass $s_1 = s_2 = s_3$ $(n \geq 1)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Lösungen eingegangen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Die folgende Lösung stammt von *Stefan Grieder*: Zuerst wird $s_2 = s_3$ nachgewiesen. Dazu entwickelt man die vom Parameter $\lambda \neq 0$ abhängige Funktion

$$f_\lambda(x) = \Big(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\Big)^n$$

nach Potenzen von x. Gemäss der Multinomialentwicklung ergibt sich

$$f_\lambda(x) = \Big(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\Big)^n = \sum_{k+i+j=n} \frac{n!}{k!\,i!\,j!} x^{k-i} \lambda^{i-k}.$$

Von dieser Entwicklung bestimmt man das konstante Glied, man setzt also $i = k$ und $j = n - 2k$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{x} + 1\right)^n &= \cdots + \sum_{k\geq 0} \frac{n!}{k!\,k!\,(n-2k)!} x^0 + \cdots \\ &= \cdots + \sum_{k\geq 0} \frac{n!\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!\,k!\,(n-2k)!} x^0 + \cdots \\ &= \cdots + \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} x^0 + \cdots = \cdots + s_2 x^0 + \cdots\end{aligned}$$

Man erkennt, dass das konstante Glied vom Parameter λ unabhängig ist. Wir entwickeln nun den Term $f_2(x)$ nach Potenzen von x, formen aber zuvor etwas um:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1\right)^n = \left(\frac{(x+1)^2 + 3}{2x}\right)^n \\ &= 2^{-n} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} 3^{n-k} x^{-n} (x+1)^{2k} \\ &= 2^{-n} \sum_{k\geq 0} 3^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i\geq 0} \binom{2k}{i} x^{i-n} \\ &= \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k\geq 0} 3^{-k} \binom{n}{k}\binom{2k}{n} x^0 + \cdots \\ &= \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k\geq 0} 3^{-k} \frac{n!\,(2k)!}{k!\,(n-k)!\,n!\,(2k-n)!} x^0 + \cdots \\ &= \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k\geq 0} 3^{-k} \frac{(2k)!\,k!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(2k-n)!} x^0 + \cdots \\ &= \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{k\geq 0} 3^{-k} \binom{2k}{k}\binom{k}{n-k} x^0 + \cdots = \cdots + s_3 x^0 + \cdots\end{aligned}$$

Für den verbleibenden Nachweis verwenden wir einerseits die bekannte (formale) Potenzreihe

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^\ell = 1 + \binom{n}{n-1} x + \binom{n+1}{n-1} x^2 + \binom{n+2}{n-1} x^3 + \cdots,$$

andererseits schreiben wir $f_1(x)$ als

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^n = \frac{(x^2+x+1)^n}{x^n} = \frac{(x^3-1)^n}{x^n} \frac{1}{(x-1)^n} \\ &= \frac{(x^3-1)^n}{x^n} (-1)^n \left(1 + \binom{n}{n-1} x + \binom{n+1}{n-1} x^2 + \binom{n+2}{n-1} x^3 + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{3\ell-n} (-1)^{n-\ell}\right) (-1)^n \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^\ell\right)$$
$$= \left(\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} x^{3\ell-n}\right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n-1+\ell}{n-1} x^\ell\right).$$

Durch Ausmultiplizieren lässt sich das konstante Glied leicht ermitteln, und man stellt fest, dass es mit s_1 übereinstimmt:

$$s_1 = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-1-3k}{n-1}.$$

Bemerkungen:

1. In den obigen Formeln sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ im Sinne des Pascalschen Dreiecks zu verstehen, sie sind also 0, falls $n < 0$.
2. Die am Schluss zur Bestimmung des Koeffizienten des konstanten Gliedes x^0 verwendete Methode des Koeffizientenvergleiches liefert interessante Formeln, wenn man sie auf andere Exponenten anwendet. Beispielsweise erhält man
$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+s-3k-1}{n-1} = 0 \qquad \text{für } s > 2n.$$
3. Der Aufgabensteller stiess auf die drei Summen s_1, s_2 und s_3, als er mit verschiedenen Methoden die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$ berechnete.
4. *Peter Bundschuh* findet zwei weitere mit s_1 übereinstimmende Ausdrücke:
$$s_4 = 4^{-n} \sum_{k\geq 0} (-1)^{n-k} 3^k \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k},$$
$$s_5 = (-1)^n \left(\sum_{\substack{k\geq 0 \\ 3|(n+k)}} \binom{n}{k}^2 - \sum_{\substack{k\geq 0 \\ 3|(n+k-1)}} \binom{n}{k}^2 \right).$$

Aufgabe 1259 (Die einfache dritte Aufgabe). Bestimme alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Gleichung
$$x^3 - y^3 = xy + 503.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von 18 Lösern eingetroffen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D),

Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Hans Egli*: Wir setzen $x = y + d$ ($d \in \mathbb{N}$) in die gegebene Gleichung ein und erhalten nach kurzer Umformung

$$y^2 + dy + \frac{d^3 - 503}{3d - 1} = 0$$

und daraus die Lösungen

$$y_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^3 - 503}{3d - 1}}.$$

Damit einer der beiden y-Werte positiv wird, muss $d^3 - 503$ negativ sein, was nur für $d = 1, 2, 3, \ldots, 7$ der Fall ist. Nur für $d = 2$ und $d = 7$ wird y ganzzahlig. Dies führt zu den beiden Lösungen $(x, y) = (11, 9)$ und $(x, y) = (8, 1)$.