Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **55 (2000)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 55 (2000) 173 – 178
0013-6018/00/040173-6 $1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2000

Elemente der Mathematik

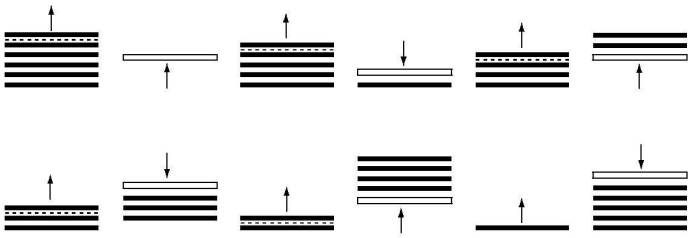
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 2001 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1162: Ein Kartenspiel mit $2m$ Karten ($m \geq 2$) wird auf folgende Art gemischt:



Dieser (in der Skizze für $m = 3$ beschriebene) Mischprozess wird so lange wiederholt, bis die Karte, die am Anfang zuoberst war, wieder an diesem Platz liegt. Beweise, dass dann alle Karten an ihrem ursprünglichen Platz liegen.

F. J. González, Lausanne, CH

Aufgabe 1163: a) Zwei auf einer Kreisscheibe zufällig verteilte Punkte werden mit dem Kreiszentrum verbunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das entstehende Dreieck spitzwinklig?

b) Zwei in einem Quadrat zufällig verteilte Punkte werden mit dem Quadratzentrum verbunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das entstehende Dreieck spitzwinklig?

Jon Florin, Chur, CH

Aufgabe 1164 (Die einfache dritte Aufgabe): Einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis b, Inkreisradius ϱ und Umkreisradius r werden drei weitere Kreise eingelagert: Zwei Kreise mit Radius t berühren je einen Schenkel, die Basis und den Inkreis; ein Kreis mit Radius u berührt die beiden Schenkel und den Inkreis.

Man bestimme das kleinste Dreieck, bei dem ϱ ein ganzzahliges Vielfaches von t ist und bei dem b, ϱ, r, t und u alle ganzzahlig sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 1999

Aufgabe 1150. Sei S_n die Menge aller Permutationen von n Objekten. Bekanntlich lässt sich eine Permutation $p \in S_n$ bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt paarweise disjunkter Zyklen schreiben, die wir kurz "die Zyklen von p" nennen. Ist ferner t ein fester positiver Teiler von n, so werde eine Teilmenge $T_{n,t}$ von S_n betrachtet: $p \in T_{n,t}$ genau dann, wenn die Längen der Zyklen von p Vielfache von t sind. Berechne die folgende Potenzsumme:

$$\sum_{p \in T_{n,t}} t^{z(p)}$$

Dabei bedeutet $z(p)$ die Anzahl der Zyklen der Permutation p.

Karl Wirth, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), eine Lösung war nicht gezeichnet.

Wir folgen der Lösung von *Roland Wyss*: Nach [1] Bd. 1 Seite 90 und Bd. 2 Seite 66 gibt die A.L. Cauchy zugeschriebene Formel

$$h(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{n} r^{j_r} \cdot j_r!} \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad \sum_{r=1}^{n} r \cdot j_r = n$$

die Anzahl der Permutationen auf $\mathbb{N}_n$ mit j_ℓ Zyklen der Länge ℓ an ($\ell = 1, 2, \ldots, n$). Für einen festen Teiler t von n hat man in $T_{n,t}$ (nach Definition von $T_{n,t}$) Zyklen der Längen $t, 2t, 3t, \ldots, \frac{n}{t}t$, wobei die Werte $j_t, j_{2t}, \ldots, j_{\frac{n}{t}t}$ der diophantischen Nebenbedingung

$$t \cdot j_t + 2t \cdot j_{2t} + \cdots + \frac{n}{t} t \cdot j_{\frac{n}{t}t} = n \tag{1}$$

genügen, welche nach Division durch t in

$$1 \cdot j_t + 2 \cdot j_{2t} + \cdots + k \cdot j_{kt} = k \quad \text{mit} \quad k = \frac{n}{t} \tag{2}$$

übergeht. Die Anzahl der Zyklen (für eine feste Lösung von (1)) beträgt $z(p) = j_t + j_{2t} + \cdots + j_{\frac{n}{t}t}$.

Nach der oben erwähnten Abzählformel von Cauchy erhält man für die fragliche Summe

$$\sum_{p \in T_{n,t}} t^{z(p)} = \sum_{(1)} t^{j_t + j_{2t} + \cdots + j_{\frac{n}{t}t}} \left[\frac{n!}{\prod_{\ell=1}^{n/t} ((\ell t)^{j_{\ell t}} \cdot j_{\ell t}!)} \right] \tag{3}$$

$$= n! \cdot \sum_{(1)} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n/t} (\ell^{j_{\ell t}} \cdot j_{\ell t}!)} \tag{4}$$

Mit

$$\sum_{p\in T_{n,t}} t^{z(p)} = \frac{n!}{k!}\sum_{(2)} \frac{k!}{\prod_{\ell=1}^{n/t} (\ell^{j_\ell} \cdot j_\ell!)}$$

zählt aber die letzte Summe unter Beachtung der Nebenbedingung (2), wieder nach der Formel von Cauchy, alle möglichen Zyklenstrukturen auf der Menge $\mathbb{N}_k$, also ihre $k!$ Permutationen ab. Daher wird

$$\sum_{p\in T_{n,t}} t^{z(p)} = \frac{n!}{k!}\cdot k! = n!$$

Bemerkung: In der ungezeichneten Einsendung wird die allgemeinere Formel

$$\sum_{p\in T_{n,t}} q^{z(p)} = \frac{n!}{(\frac{n}{t})!}\cdot \prod_{\ell=0}^{\frac{n}{t}-1} \left(\frac{q}{t}+\ell\right)$$

bewiesen, welche für $q = t$ die gestellte Aufgabe löst.

Literatur

[1] Jeger M., Einführung in die Kombinatorik, Bd. 1,2, Klett, Stuttgart, 1973

Aufgabe 1151. Man bestimme alle Paare (c,d) natürlicher Zahlen mit

$$c|(3d^2-1) \quad \text{und} \quad d|(3c^2-1).$$

Diese Aufgabe geht aus der Aufgabe 1139 hervor, indem man $a = 3c$ und $b = 3d$ setzt und damit die Voraussetzung der Teilerfremdheit von a und b entfallen lässt.

Helmut Müller, Hamburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Teillösungen eingetroffen: Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH).

Wir folgen der Lösung des Autors: Wegen der Symmetrie des Problems reicht es aus, die Paare (c,d) mit $c \le d$ zu bestimmen. Lässt man den Computer rechnen, so findet man bis $c \le 10^6$ die in Tabelle 1 dargestellten Paare.

Um diese auf den ersten Blick ziemlich unübersichtliche Menge von Zahlenpaaren (c,d) etwas zu ordnen, überlegt man sich, dass die beiden Teilbarkeitsbedingungen in der Aufgabenstellung genau dann erfüllt sind, wenn es eine natürlich Zahl q gibt, so dass

$$3c^2+3d^2-1 = qcd \tag{1}$$

gilt. Die Äquivalenz der beiden Fragestellungen ist wesentlich durch die Teilerfremdheit der Zahlen c und d bedingt. Untersucht man die Zahlen q aus (1) etwas genauer – sie sind in Tabelle 1 angegeben –, so sieht man schnell, dass q weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. Weitere Informationen liefert die leichte Umformung von (1) zu

$$3(c+d)^2-1 = (q+6)cd. \tag{2}$$

c	d	q	$q+6$
1	1	5	$11 = 11$
1	2	7	$13 = 13$
2	11	17	$23 = 23$
13	23	7	$13 = 13$
142	251	7	$13 = 13$
166	6359	115	$121 = 11 \cdot 11$
263	9022	103	$109 = 109$
673	52261	233	$239 = 239$
803	20579	77	$83 = 83$
1549	2738	7	$13 = 13$
3733	20473	17	$23 = 23$
9493	591578	187	$193 = 193$
16897	29867	7	$13 = 13$
26497	466609	53	$59 = 59$
130331	5948927	137	$143 = 11 \cdot 13$
184318	325799	7	$13 = 13$

Tabelle 1

Ihr entnimmt man, dass 3 für jeden Primteiler p von $q+6$ ein quadratischer Rest ist, denn es folgt

$$(3(c+d))^2 \equiv 3 \pmod{p}.$$

Nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz folgt, dass $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$ ist (siehe Tabelle).

Damit stossen wir auf folgende Probleme:

1. Welche Zahlen q in (1) treten wirklich auf?
2. Welche Zahlenpaare (c,d) gehören zu festem q?

Wir zeigen nun, dass die obigen Bedingungen an q nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind und dass zu jedem zulässigen q unendlich viele Zahlenpaare (c,d) existieren, die sich mittels der Pellschen Gleichung bestimmen lassen.

1. Man wähle endlich viele beliebige Primzahlen p_i mit $p_i \equiv \pm 1 \pmod{12}$ und bilde

$$q := \left(\prod_i p_i\right) - 6.$$

Die Folge der q's beginnt dann mit 5, 7, 17, 31, 41, 53, 55, ... Die Gleichung (1) ist gleichbedeutend damit, dass die binäre primitive quadratische Form $[3, -q, 3]$ die 1 darstellt:

$$3x^2 - qxy + 3y^2 = 1 \tag{3}$$

Die zugehörige Diskriminante D berechnet sich zu $D = q^2 - 36$. Der Fall $q = 5$ spielt insofern eine Sonderrolle, als er auf eine definite Form mit negativer Diskriminante -11 führt. Bekanntlich lässt sich (3) äquivalent umformen zu

$$12 = (6x - qy)^2 - Dy^2 \tag{4}$$

Daraus sieht man, dass der Fall $q = 5$, also $D = -11$ notwendig auf $c = x = d = y = 1$ führt. Übrig bleiben daher die indefiniten Formen $[3, -q, 3]$ mit positiven Diskriminanten $q^2 - 36$.

Wir sind damit zunächst auf das Problem gestossen, ob die Gleichung

$$12 = X^2 - DY^2 \tag{5}$$

mit ganzen Zahlen X, Y lösbar ist. (5) ist aber eine Normgleichung im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Also geht es darum, ob es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein ganzes Element π der Form

$$\pi = \frac{X + Y\sqrt{D}}{2} \quad (D \equiv 1 \pmod 4)$$

gibt mit $N(\pi) = 3$. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn die Primzahl 3 in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ zerfällt oder – dazu äquivalent – das Legendresymbol $(\frac{3}{D}) = 1$ ist. Wegen $D \equiv 1 \pmod{12}$ ist dies aber der Fall.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass bei gefundenen Zahlen X, Y und festem q die durch

$$X = 6x - qy \quad \text{und} \quad Y = y$$

festgelegten Zahlen x und y ebenfalls ganz sind. Nun ist

$$12 = X^2 - DY^2 = X^2 - (q^2 - 36)Y^2$$

oder

$$12(1 - 3Y^2) = X^2 - q^2Y^2 = (X - qY)(X + qY), \tag{6}$$

also

$$12 \mid (X - qY)(X + qY).$$

Da X und Y entweder beide gerade oder beide ungerade sind, gilt

$$2 \mid (X \pm qY).$$

Einer der vier Ausdrücke $\pm(X \pm qY)$ ist positiv und wegen (6) durch 3 teilbar, insgesamt also durch 6, so dass – wie gewünscht – x und y natürliche Zahlen sind.

2. Hat man nun für festes q, also für $D = q^2 - 36 > 0$ eine Lösung wie in (5) gefunden, so gibt es unendlich viele weitere, die sich bekanntlich alle durch Multiplikation von

$$\frac{X + Y\sqrt{D}}{2}$$

mit Potenzen einer Grundeinheit ϵ mit $N(\epsilon) = 1$ ergeben.

Beispiele: Es sei $q = 7$, also $D = 13$. Die Gleichung $12 = X^2 - 13Y^2$ wird z.B. gelöst durch $X = 5$ und $Y = 1$. Hier ist $X + qY = 5 + 7 \cdot 1 = 12$ durch 6 teilbar, so dass wir $x = 2$ und $y = 1$ oder $(c, d) = (1, 2)$ erhalten. Hätten wir als Ausgangslösung $X^2 = 64$ und $Y^2 = 4$ gewählt, so müssten wir $X = -8$ und $Y = 2$ setzen, um $x = \frac{-8+7\cdot 2}{6} = 1$ und $y = Y = 2$ zu erhalten, also wieder $(c, d) = (1, 2)$.

Eine Grundeinheit mit positiver Norm in $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ ist

$$\epsilon = \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2},$$

so dass sich als weitere Lösungen $(c, d) = (13, 23)$, $(c, d) = (142, 251)$ ergeben, in Übereinstimmung mit der obigen Tabelle.

Es sei nun $q = 17$, also $D = 253$. Die Gleichung $12 = X^2 - 253Y^2$ wird gelöst durch $X = 32$, $Y = 2$. Hier ist $X + qY = 32 + 17 \cdot 2 = 66$ durch 6 teilbar, so dass wir $x = 11$ und $y = 2$ oder $(c, d) = (2, 11)$ erhalten. Eine Grundeinheit mit positiver Norm in $\mathbb{Q}(\sqrt{253})$ ist

$$\epsilon = \frac{1861 + 117\sqrt{253}}{2},$$

so dass sich als nächste Lösung $(c, d) = (3733, 20473)$ ergibt, wieder in Übereinstimmung mit der Tabelle.

Aufgabe 1152 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Zentren O_1, O_2 und O_3 der drei zentrischen Streckungen $S_1(O_1; k_1 = 11/3)$, $S_2(O_2; k_2 = 1/2)$ und $S_3(O_3; k_3 = 5)$ bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $s = 7$. Wie gross sind die drei Abstände von O_ℓ zum Zentrum O des Streckungsproduktes $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ $(\ell = 1, 2, 3)$?

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Zuschriften eingegangen, von welchen eine einen kleinen Fehler enthielt: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender arbeiten mit Methoden der analytischen Geometrie, einige unterlegen die komplexe Ebene; 2 Löser setzen zudem ein CAS-System ein.

Wir folgen *Jany C. Binz*: Die Streckzentren seien die drei komplexen Zahlen $p_1 = 0$, $p_2 = 7$ und $p_3 = 7e^{i\pi/3}$. Die drei Streckungen lassen sich als $S_\ell : z \mapsto k_\ell z + (1 - k_\ell)p_\ell$ schreiben, und für ihre Zusammensetzung erhält man $S_3 \circ S_2 \circ S_1 : z \mapsto \frac{55}{6}z + \frac{35}{2} - 28e^{i\pi/3}$. Das Streckungszentrum p ist der Fixpunkt $p = \frac{3}{7}(8e^{i\pi/3} - 5)$ dieser Abbildung. Die Beträge der drei Zahlen $p - p_1 = \frac{3}{7}(8e^{i\pi/3} - 5)$, $p - p_2 = \frac{8}{7}(3e^{i\pi/3} - 8)$ und $p - p_3 = -\frac{5}{7}(5e^{i\pi/3} + 3)$ berechnen sich zu 3, 8 und 5, und dies sind die gesuchten Abstände.