Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **55 (2000)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 55 (2000) 128 – 131
0013-6018/00/030128-4 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2000

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 2001 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1159: Eine Folge (a_ℓ) reeller Zahlen heisse quotientenkonstant, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}$$

gilt. Man zeige: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es ein Polynom f_n vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass die Folge $(a_\ell) := (f_n(\ell))$ quotientenkonstant ist. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches Polynom f_n.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Aufgabe 1160: $S_n = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sei ein n–Tupel natürlicher Zahlen, welche der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j \leq k \cdot \ell + r \quad (k \geq 2,\ r \geq 0;\ \ell = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Bestimme die Anzahl $a(n, k, r)$ solcher n–Tupel.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1161 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Elemente von

$$\mathbb{P}_n = \{x | x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \text{ mit } \mathrm{ggT}(x, n) = 1\}$$

bilden bekanntlich bezüglich der Multiplikation modulo n eine kommutative Gruppe, die sogenannte prime Restklassengruppe modulo n. Sind $\mathbb{P}_{15}$ und $\mathbb{P}_{16}$ isomorph? Wie steht es mit $\mathbb{P}_{20}$ und $\mathbb{P}_{24}$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1999

Aufgabe 1147. Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^n \leq 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n! \cdot \exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \tag{1}$$

$$f_1^{f_1} \cdot f_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot f_n^{f_n} \leq f_1! \cdot f_2! \cdot \ldots \cdot f_n! \cdot \exp(f_{n+2} - n - 1) \tag{2}$$

Dabei steht f_n für die Fibonaccizahlen: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Zdravko F. Starc, Vršac (YU)

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 19 Zuschriften eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien-Herzegowina), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Fast alle Löser beweisen die beiden Ungleichungen mit vollständiger Induktion und benützen dazu entweder die Stirlingsche Formel oder Monotonieeigenschaften der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Wir folgen der Lösung von *François Sigrist*: Weil

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (\ell - 1) = \frac{\ell(\ell-1)}{2}$$
$$(f_1 - 1) + (f_2 - 1) + \cdots + (f_\ell - 1) = f_{\ell+2} - \ell - 1,$$

genügt es zu zeigen, dass für alle ℓ die Ungleichung $\ell^\ell \leq \ell! \cdot e^{\ell-1}$ gilt; die beiden Behauptungen folgen dann durch Multiplikation dieser Ungleichungen für $\ell = 1, 2, 3, \ldots, n$ resp. für $\ell = f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$.

Für $\ell = 1$ besteht Gleichheit, und für $\ell \geq 2$ folgt wegen $\sqrt{2\pi\ell} \geq e$ mit der Stirlingschen Formel

$$\ell^\ell \leq \ell! \cdot e^\ell \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell}} \leq \ell! \cdot e^{\ell-1}.$$

Aufgabe 1148. Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser AB. Gesucht sind alle Kreissehnen, welche durch die von A und B auf sie gefällten Lote gedrittelt werden.

Georg Unger, Dornach (CH)

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 21 Lösungen oder Teillösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes M. Ebersold (Winterthur,

CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A) 2 Lösungen, Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Manfred Mielchen (Langenfeld, D), Ignace Morand (Lausanne, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Die folgende Lösung ist eine Kombination der Überlegungen von *Johannes M. Ebersold* und *François Sigrist*: In der mit Polarkoordinaten $(\varrho|\varphi)$ versehenen Ebene seien $A(1|\pi)$ und $B(1|0)$ die Endpunkte des festen Durchmessers des Kreises um den Ursprung O. Ist $M(\varrho|\varphi)$ der Mittelpunkt einer gesuchten Sehne, wobei es aus Symmetriegründen genügt, den Fall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ zu studieren, und bezeichnet Q den Fusspunkt des von A auf diese Sehne gefällten Lotes, so erhält man für die Länge von MQ als Normalprojektion von AO den Wert $\overline{MQ} = \sin(\varphi)$. Gemäss Aufgabenstellung muss $\overline{MQ}$ ein Sechstel der Sehnenlänge $2\sqrt{1-\varrho^2}$ betragen:

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{3}\sqrt{1-\varrho^2}$$

oder gleichwertig

$$\varrho = \sqrt{1 - 9 \cdot \sin^2(\varphi)} \qquad (0 \leq \varphi \leq \arcsin(1/3))\,.$$

Die zum Parameter φ gehörige Sehne besitzt die Gleichung $\cos(\varphi) \cdot x + \sin(\varphi) \cdot y = \sqrt{1 - 9\sin^2(\varphi)}$, und für die Enveloppe dieser Geradenschar erhält man nach einiger Rechnung den im vierten Quadranten liegenden Teil der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2/8 = 1$. Lässt man die anfängliche Einschränkung über den Winkel φ fallen, so ergibt sich, dass alle Tangenten dieser Hyperbel die gewünschte Eigenschaft haben.

Aufgabe 1149 (Die einfache dritte Aufgabe).

a) Für welche zwei natürlichen Zahlen ist deren Summe gleich dem Quadrat ihrer Differenz?

b) Für welche zwei natürlichen Zahlen weichen arithmetisches und harmonisches Mittel um genau $1/2$ voneinander ab?

c) Für welche Belegungen einer Urne mit nur roten und grünen Kugeln sind beim Ziehen eines Kugelpaares Verschieden- und Gleichfarbigkeit gleich wahrscheinlich?

Fritz Siegerist, Meilen (CH)

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien-Herzegowina), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Peter Hohler (Aarburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Hansjürg Lädrach (Aarwangen, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Ignace Morand (Lausanne, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen

Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D), Philipp Zumstein (Lungern, CH).

Wir folgen den Gedankengängen von *Peter Bundschuh:* Jeweils mögen die involvierten natürlichen Zahlen x, y heissen, und o.B.d.A. werde stets $x \geq y$ angenommen.

a) Verlangt ist hier $(x+y) = (x-y)^2$. Mit $x-y = d$ folgt $2y = d^2 - d$, d.h. höchstens die Paare $(x|y) = (d(d+1)/2 \mid d(d-1)/2)$ mit $d = 2, 3, \ldots$ leisten das Gewünschte (und diese tun es auch tatsächlich!).

b) Das arithmetische Mittel $(x+y)/2$ ist nicht kleiner als das harmonische Mittel $\frac{2xy}{x+y}$, und somit ist die geforderte Bedingung mit $x + y - \frac{4xy}{x+y} = 1$ oder $(x-y)^2 = x + y$ äquivalent, und diese diophantische Gleichung wurde bereits in a) behandelt.

c) Für diesen (in Deutschland politisch aktuellen) Aufgabenteil mögen x rote und y grüne Individuen $(r_1, \ldots, r_x, g_1, \ldots, g_y)$ in der Urne sein. Es gibt genau $x(x-1)/2$ Ziehungen (r_i, r_j) mit nur roten Individuen, und analog gibt es genau $y(y-1)/2$ Ziehungen in reinem Grün. Gemischtfarbige Ziehungen (r_i, g_j) gibt es xy Stück. Die gefragte Gleichwahrscheinlichkeit führt auf $x(x-1) + y(y-1) = 2xy$ oder $(x-y)^2 = x + y$, also wiederum auf die Gleichung von Aufgabe a).