Kleine Mitteilung

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 5

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

wird und $2m/(1+u)-(m-1)$ beträgt. Weiter ist $\sigma'(\alpha_0)=2mf'(\alpha_0)-(m-1)=0$, d. h. $f'(\alpha_0)=(m-1)/2m$. Auf $[0,\alpha_0)$ ist $\sigma\geq 0$ (weil $\sigma'>0$) und $\sigma\leq\alpha$ (weil $f'\leq\frac{1}{2}$, somit $\sigma'\leq m-(m-1)=1$). Da die Klammer von (3.17) monoton mit σ und σ monoton mir α wächst, wird ihr Maximum in α_0 erreicht. Es beträgt, wegen $\sigma(\alpha_0)\leq\alpha_0$, höchstens $\frac{1}{2}-f'(\alpha_0)=1/2m$. Insgesamt bleibt also der Ausdruck in (3.17) kleiner als

$$\left[\frac{2m}{1+u}-(m-1)\right]\cdot\frac{1}{2m}-\frac{1}{2m}=\frac{1-u}{2(1+u)}<0.$$

Damit ist der Beweis beendet. Dieses letzte Beispiel lehrt, dass man starke Symmetrieeigenschaften des Graphen postulieren muss, um die Nullstellen an $\mathbb{R}_-$ oder mindestens $\mathbb{R}_-\cup S_1$ zu binden. Für weitere Diskussionen vgl. [2] und [3].

Irene Hueter und Henri Carnal
Institut für mathematische Statistik, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Onsager L.: Crystal Statistics I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev. *65*, 117 (1944).
2 Peitgen H.-O., Richter P. H.: The Beauty of Fractals. Springer Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.
3 V. Saarloos W., Kurtze D. A.: Location of zeros in the complex temperature plane. Absence of Lee-Yang theorem. J. Phys. *A 17*, 1301 (1984).
4 Yang C. N., Lee T. D.: Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions I, II. Phys. Rev. *87*, 404, 410 (1952).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/050130-08$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilung

On a problem by Shapiro

In 1954, H. S. Shapiro proposed the following problem: determine the minimum of the cyclic sum

$$S_n(a)=\sum_{i=1}^{n} a_i/(a_{i+1}+a_{i+2}), \tag{1}$$

with $a_i\geq 0$ and $a_i+a_{i+1}>0$ ($a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$). He conjectured that this minimum is $n/2$. This is known to be true for $n\leq 13$, but false for $n\geq 14$ (see [1] for reference, and the range $15\leq n\leq 23$, n odd).

In the present work we propose a method which enables us to solve the problem for $n<7$. The method is based on an application of Fourier transformation to functions of discrete argument.

We denote

$$S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}$$

$$\alpha_i = \frac{n a_i}{\sum_{k=1}^{n} a_k} - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Then

$$\alpha_i > -1, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0 \tag{2}$$

and

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + \alpha_k}{1 + \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}}{2}}, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_1, \ \alpha_{n+2} = \alpha_2.$$

For $x > -1$, $(1 + x)^{-1} \geq 1 - x$, the equality being valid only for $x = 0$.
It follows

$$2S \geq \sum_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k)\left(1 - \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}}{2}\right) = n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) \equiv n - \frac{A}{2}. \tag{3}$$

We introduce a real valued function $f(x)$, such that

$$f(k) = \alpha_k \quad \text{for} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{and} \quad f(k) = f(n + k).$$

From (2) it follows

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 0. \tag{4}$$

We represent $f(x)$ by a Fourier trigonometric polynomial

$$f(k) = \sum_{m=1}^{n} q(m) \exp\left(2\pi i \frac{mk}{n}\right), \tag{5}$$

where

$$q(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \exp\left(-2\pi i \frac{mk}{n}\right) \tag{6}$$

Bearing in mind that $f(x)$ is real valued, we obtain

$$q(n - m) = \overline{q(m)}. \tag{7}$$

Besides, from (5) and (6) it follows

$$q(n+m) = q(m), \quad q(n) = 0. \tag{8}$$

Now, the sum A can be represented as follows

$$A = n \sum_{k=1}^{n} q(n-k)\, q(k) \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right)$$
$$+ i n \sum_{k=1}^{n} q(n-k)\, q(k) \left(\sin \frac{2\pi}{n} k + \sin \frac{4\pi}{n} k \right).$$

Because of (7) and (8), we have (A being real)

$$A = n \sum_{k=1}^{n-1} q(n-k)\, q(k) \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right).$$

Hence, by (3) and (7) it follows

$$S \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{n-1} |q(k)|^2 \left(\cos \frac{2\pi}{n} k + \cos \frac{4\pi}{n} k \right). \tag{9}$$

The function $\cos x + \cos 2x$ is non-positive for $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$. Thus the second term of the last inequality (9) is non-negative for every $1 \leq k < n$ and $n < 7$.
Thus (1) is proved for $n < 7$.
The equality in (1) is obtained if and only if

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_n + \alpha_1 = 0.$$

For $n = 3, 5$ the last system has the following solution:

$$\alpha_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

For $n = 4, 6$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5; \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 \quad \text{and hence}$$

$$\alpha_k = (-1)^k \alpha, \quad |\alpha| < 1.$$

Evgenii S. Freidkin, University of the Witwatersrand, Johannesburg
Solomon A. Freidkin, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa

REFERENCES

[1] Troesch B. A.: The validity of Shapiro's cyclic inequality, Math. Comp. *53*, 657–664 (1989).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/050137-03$1.50 + 0.20/0