Formes quadratiques réelles semi-définies : démonstration élémentaire du critère des mineurs principaux

Autor(en): **Archinard, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 2

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40029

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 42 Nr. 2 Seiten 25–50 Basel, März 1987

Formes quadratiques réelles semi-définies. Démonstration élémentaire du critère des mineurs principaux

1. Introduction

Soit $A=(a_{ij})$ une $n \times n$ matrice réelle symétrique et $x' A x$ $(=\sum a_{ij} x_i x_j)$ la forme quadratique qui lui est associée, x étant le vecteur colonne dont les coordonnées sont $x_1, \ldots, x_n$ et x' le vecteur transposé de x. On sait que toute forme quadratique réelle s'écrit de cette manière, la matrice symétrique réelle A étant déterminée de manière unique.

Dans de nombreux domaines, notamment lorsqu'on étudie les extrema d'une fonction en faisant intervenir ses dérivées secondes, on s'intéresse aux signes des valeurs que prend $x' A x$ pour $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'on cherche à savoir si une matrice est définie, semi-définie ou non définie (cf. définitions 2.2).

Des critères classiques portant sur les signes de certains mineurs principaux de A (cf. définition 2.1) permettent de répondre à cette question (cf. théorèmes 3.1, 3.2, 3.1* et 3.2*).

Alors que le critère pour les matrices réelles symétriques semi-définies positives est démontré dans les ouvrages classiques soit par des considérations sur les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice concernée ([5]), soit en le déduisant de celui des matrices réelles symétriques définies positives par des arguments de continuité ([2], [3], [6]), on se propose, dans ce travail, de le déduire, aussi de ce dernier critère, mais directement à l'aide de l'algèbre des matrices.

Dans ce but, on démontre d'abord, dans la section 2, quelques résultats sur les matrices réelles symétriques semi-définies positives (lemme 2.2) et sur les matrices réelles symétriques (lemmes 2.1 et 2.3). Le dernier de ces résultats nous semble original, ainsi que les démonstrations.

Dans la section 3, on rappelle d'abord, sans démonstration, le critère pour les matrices définies positives (théorème 3.1), puis, en utilisant les résultats de la section 2, on démontre le critère concernant les matrices semi-définies positives (théorème 3.2). Enfin, on en déduit les critères pour les matrices définies et semi-définies négatives (théorèmes 3.1* et 3.2*).

2. Définitions et résultats préliminaires

On rappelle d'abord certaines définitions concernant, d'une part, les matrices carrées, de manière générale et, d'autre part, les matrices réelles symétriques.

Définition 2.1 (Sous-matrices et mineurs principaux)

Soit P une matrice carrée quelconque. On appelle sous-matrice principale de P toute sous-matrice de P obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de P en même nombre et de mêmes indices et on appelle sous-matrice primaire principale toute sous-matrice principale obtenue en supprimant les dernières lignes et les dernières colonnes de P, à partir d'un certain indice.
Ainsi, en convenant qu'une matrice carrée est elle-même l'une de ses sous-matrices principales et primaires principales, on constate qu'une $n \times n$ matrice a exactement n sous-matrices primaires principales et $\binom{n}{p}$ sous-matrices principales de format $p \times p$.
On dit que des sous-matrices principales P_i^*, $i = \alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+l$, de P forment une chaîne complète (de longueur $l+1$) si pour tout $i = \alpha, \ldots, \alpha+l-1$, P_i^* est obtenue en supprimant une ligne et une colonne de P_{i+1}^*.
Enfin, on appelle mineur (primaire) principal, le déterminant d'une sous-matrice (primaire) principale.

Soit Q une forme quadratique réelle de n variables, A l'unique matrice $n \times n$ réelle symétrique telle que $Q(x) = x' A x$ et soit $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Définition 2.2 (Classification des formes quadratiques)

a) La forme Q est dite définie positive (respectivement définie négative) si $Q(x) > 0$ (respectivement si $Q(x) < 0$) pour tout $x \in (\mathbb{R}^n)^*$.
b) Q est dite semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) si $Q(x) \geq 0$ (respectivement si $Q(x) \leq 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et s'il existe $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $Q(x^*) = 0$.
c) Q est dite définie non négative (respectivement définie non positive) si $Q(x) \geq 0$ (respectivement $Q(x) \leq 0$) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi Q est définie non négative si et seulement si elle est définie ou semi-définie positive.
d) Dans tous les autres cas, c'est-à-dire s'il existe dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs x^+ et x^- tels que $Q(x^+) > 0$ et tels que $Q(x^-) < 0$, on dit que Q est non définie.

On dit que A est définie positive si Q est définie positive, que A est semi-définie positive si Q est semi-définie positive, etc.

Lemme 2.1

Toute matrice symétrique de rang r a une sous-matrice principale régulière d'ordre r.

Démonstration

Le rang de la matrice étant r, toutes ses colonnes sont combinaisons linéaires de r d'entre elles, qui sont linéairement indépendantes. Soit $i_1, i_2, \ldots, i_r$, les indices de ces r colonnes indépendantes.
En ajoutant à chacune des autres colonnes la combinaison adéquate de ces r colonnes indépendantes, on obtient une matrice de rang r et dont toutes les colonnes sont nulles, sauf celles d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_r$, qui sont celles de la matrice d'origine.

En faisant la même opération sur les lignes de cette nouvelle matrice, on obtient, par symétrie, une matrice dont les lignes sont toutes nulles, sauf celles d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_r$.
Cette matrice est de rang r, ses lignes et ses colonnes d'indices autres que $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sont nulles et les éléments d'indices lignes et d'indices colonnes pris parmi $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sont ceux de la matrice d'origine.
On en déduit immédiatement que la sous-matrice principale de la matrice d'origine, obtenue en supprimant les lignes et les colonnes d'indices autres que $i_1, i_2, \ldots, i_r$ est régulière.

Lemme 2.2

Une $n \times n$ matrice réelle symétrique A est semi-définie positive si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) Elle est singulière.
(2) Il existe une sous-matrice principale de A définie positive et de format $r \times r$, où $r = \operatorname{rang} A$ (d'après (1) on a $r < n$).

Démonstration

a) On suppose que A est semi-définie positive.
Les valeurs propres de A (qui sont toutes réelles) sont toutes ≥ 0, l'une d'entre elles, au moins, étant nulle. Le déterminant de A, qui est égal au produit de ses valeurs propres, est donc nul. La condition (1) est satisfaite.
La matrice A étant symétrique et de rang r, il existe une sous-matrice principale et régulière de A de format $r \times r$ (lemme 2.1). Cette sous-matrice est donc semi-définie ou définie positive, car elle correspond à la restriction de la forme $x' A x$ à un sous-espace de R^n (obtenu en annulant les $n-r$ coordonnées x_i dont les indices sont ceux des lignes et des colonnes supprimées de A). Comme elle est régulière, elle n'est pas semi-définie: elle est donc définie. La condition (2) est satisfaite.
b) On suppose que la matrice A satisfait les conditions (1) et (2). On peut supposer de plus que la sous-matrice principale de A, définie positive et de format $r \times r$, donnée en (2), est primaire principale. (On se ramène à cette situation par une permutation convenable des lignes de A et de ses colonnes.) Soit A_r cette sous-matrice. On a donc $A = \begin{pmatrix} A_r & D \\ D' & C \end{pmatrix}$ où D et C sont de formats respectifs $r \times (n-r)$ et $(n-r) \times (n-r)$.

Soit alors $T = \begin{pmatrix} I_r & -A_r^{-1} D \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. C'est une matrice régulière et on a

$$T' A T = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & -D' A_r^{-1} D + C \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a $\operatorname{rang}(T' A T) = \operatorname{rang} A$. Comme $\operatorname{rang} A = r$, on en déduit immédiatement que

$$T' A T = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$T'AT$ est donc semi-définie positive et il en est de même de A, puisque T est régulière ([3], chapitre 10).

Remarque 2.1

La démonstration donnée en a) permet de montrer que toutes les sous-matrices principales et régulières d'une matrice semi-définie positive sont définies positives et que toutes ses sous-matrices principales et non régulières sont semi-définies positives.

Lemme 2.3

Si tous les mineurs principaux d'une matrice réelle, symétrique et régulière sont positifs ou nuls, alors ils sont tous strictement positifs.

Démonstration

Si A est de format 1×1, la proposition est évidente.

Si A est de format 2×2, on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, avec $a \geq 0$, $c \geq 0$ et dét $A = ac - b^2 > 0$. Il en découle $a > 0$ et aussi $c > 0$.

On considère alors le cas général où A est de format $n \times n$ avec $n \geq 3$: on démontre d'abord que la sous-matrice primaire principale A_{n-1} de A a son déterminant strictement positif.

Pour montrer que dét $A_{n-1} > 0$, on remarque d'abord qu'il existe une $(n-1)\times(n-1)$ sous-matrice régulière A^*_{n-1} de A obtenue en supprimant la dernière colonne de A et l'une de ses lignes (Si aucune des n sous-matrices de A obtenues par ce procédé n'était régulière, le déterminant de A serait évidemment nul). Soit k l'indice de la ligne supprimée; si $k = n$ on a $A^*_{n-1} = A_{n-1}$ et il n'y a rien à démontrer.

On suppose donc $k < n$. Les $n-1$ vecteurs colonnes de la matrice A^*_{n-1} formant une base de R^{n-1}, on obtient en ajoutant à la dernière colonne de A une combinaison linéaire convenable de ses $n-1$ premières colonnes une $n \times n$ matrice C dont les $n-1$ premières colonnes sont celles de A et dont la dernière a toutes ses composantes nulles sauf celle d'indice k. On a donc $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$, $c_{in} = 0$ pour $i \neq k$ et $c_{kn} \neq 0$.

On voit, par symétrie, qu'en ajoutant à la dernière ligne de C une combinaison linéaire de ses $n-1$ premières lignes (les coefficients étant ceux de la combinaison précédente) on obtient la matrice

$$D = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & \vdots \\ & A_{n-1} & c_{kn} \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \ldots c_{nk} \ldots & & 0 \quad d_{nn} \end{pmatrix}$$

toutes les composantes de la dernière colonne étant nulles, sauf celle d'indice k qui est égale à c_{kn} et sauf peut-être d_{nn} (et de même pour la dernière ligne, avec $c_{nk} = c_{kn}$).

On a alors dét $A =$ dét $D = d_{nn}$ dét $A_{n-1} - (c_{nk})^2$ dét A^*_{n-2}, où A^*_{n-2} est la sous-matrice principale de A obtenue en supprimant la ligne et la colonne d'indice k de A_{n-1}.
Comme dét $A > 0$, on a d_{nn} dét $A_{n-1} > (c_{nk})^2$ dét A^*_{n-2}.
Comme on a, par hypothèse, dét $A^*_{n-2} \geq 0$ et dét $A_{n-1} \geq 0$, il découle de cette inégalité que dét $A_{n-1} > 0$.
On voit alors, soit en faisant le calcul directement, soit en effectuant une permutation des indices, que le déterminant de toute sous-matrice principale d'ordre $n-1$ de A est strictement positif (et pas seulement celui de A_{n-1}).
En raisonnant par récurrence, on achève alors aisément la démonstration.

On déduit immédiatement de ce résultat la proposition suivante:

Corollaire 2.1

Une matrice réelle symétrique dont le déterminant est > 0 et dont une sous-matrice principale a son déterminant nul a aussi une sous-matrice principale dont le déterminant est < 0.

Remarques 2.2

a) Il se peut toutefois que les sous-matrices primaires principales d'une matrice réelle symétrique de déterminant > 0 aient toutes leurs déterminants ≥ 0 l'un d'entre eux étant nul. Une telle matrice a alors au moins une de ses sous-matrices principales (non primaires) dont le déterminant est < 0.

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) La propriété énoncée au corollaire 2.1 n'est pas valable si l'on remplace > 0 et ≥ 0 par < 0 et ≤ 0.
En effet, il existe des matrices réelles symétriques de déterminants < 0, dont toutes les sous-matrices principales ont leur déterminant ≤ 0, l'un, au moins, étant nul.

Exemple: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Le critère des mineurs principaux pour les matrices réelles symétriques semi-définies

On rappelle d'abord le critère suivant, qui est classique et dont on trouve une démonstration dans tous les ouvrages de référence ([1], [2], [3], [4], [5], [6]).

Théorème 3.1

Une matrice réelle symétrique est définie positive si et seulement si les déterminants de ses sous-matrices primaires principales sont tous strictement positifs.

Remarque 3.1

En fait, le résultat ci-dessus peut s'énoncer de manière plus forte de la manière suivante:

a) La matrice réelle symétrique A est définie positive s'il existe une chaîne complète de sous-matrices principales de A, de déterminants strictement positifs, la plus petite de ces sous-matrices étant de format 1×1 et la plus grande étant la matrice A.
b) Si A est définie positive, toute sous-matrice principale de A a un déterminant strictement positif et en particulier A est régulière.

On peut alors démontrer le critère concernant les matrices semi-définies positives.

Théorème 3.2

Une matrice symétrique réelle non régulière est semi-définie positive si et seulement si toutes ses sous-matrices principales ont leurs déterminants ≥ 0.

Démonstration

a) Soit A une matrice symétrique réelle semi-définie positive. Comme on l'a signalé à la remarque 2.1, les sous-matrices principales et régulières de A sont définies positives; leurs déterminants sont donc > 0. Quant aux sous-matrices principales non régulières, leurs déterminants sont évidemment nuls. Ainsi le déterminant de toute sous-matrice principale est ≥ 0.
b) Soit A une matrice dont toutes les sous-matrices principales ont leurs déterminants ≥ 0.
Soit $r = \operatorname{rang} A$; par hypothèse $r < n$.
Alors il existe une sous-matrice principale de A, régulière et de format $r \times r$ (lemme 2.1).
Son déterminant est > 0 et les déterminants de ses sous-matrices principales sont tous ≥ 0. D'après le lemme 2.3 et le théorème 3.1, cette sous-matrice est donc définie positive et d'après le lemme 2.2, la matrice A est semi-définie positive.

On déduit aisément de ce théorème le résultat suivant:

Corollaire 3.1

Une matrice symétrique réelle est définie non négative si et seulement si toutes ses sous-matrices principales ont leurs déterminants ≥ 0.
Elle est définie positive si elle est régulière et elle est semi-définie positive sinon.

En remarquant que la matrice A est définie négative (respectivement semi-définie négative) si et seulement si $-A$ est définie positive (semi-définie positive) et en tenant compte de la formule dét $(-P) = (-1)^k$ dét P, où k est l'ordre de la matrice carrée P, on obtient, à partir des théorèmes 3.1 et 3.2, les critères suivants:

*Théorème 3.1**

Une matrice réelle symétrique est définie négative si et seulement si les déterminants de ses sous-matrices primaires principales sont non nuls, ceux de ses sous-matrices

d'ordres impairs étant négatifs et ceux de ses sous-matrices d'ordres pairs positifs. (En particulier son déterminant est $\neq 0$.)

*Théorème 3.2**

Une matrice réelle symétrique non régulière est semi-définie négative si et seulement si d'une part les déterminants de ses sous-matrices principales d'ordres impairs sont ≤ 0 et si d'autre part ceux de ses sous-matrices principales d'ordres pairs sont ≥ 0.

*Corollaire 3.1**

Une matrice symétrique réelle est définie non positive si et seulement si d'une part les déterminants de ses sous-matrices principales d'ordres impairs sont ≤ 0 et si d'autre part ceux de ses sous-matrices principales d'ordres pairs sont ≥ 0.
Elle est définie négative si elle est régulière et elle est semi-définitive négative sinon.

Il est alors évident qu'une matrice réelle symétrique est non définie si et seulement si elle ne satisfait aucun des critères énoncés dans les théorèmes 3.1, 3.1*, 3.2 et 3.2*.
Par exemple, une matrice réelle symétrique ayant une sous-matrice principale d'ordre pair dont le déterminant est < 0, ou ayant deux sous-matrices principales de même ordre, l'une de déterminant < 0 et l'autre de déterminant > 0, n'est pas définie.
De même, une matrice réelle symétrique régulière ayant un mineur principal nul n'est pas définie et par conséquent une matrice singulière ayant une sous-matrice principale régulière dont un mineur principal est nul ne l'est pas non plus.

Remarque 2.4

La discussion ci-dessus montre en particulier, qu'une matrice dont le déterminant est > 0 et dont un mineur principal est nul n'est pas définie. Le corollaire 2.1 permet de préciser qu'une telle matrice a un mineur principal < 0.
Il semble que cette précision ne peut être déduite seulement des quatre critères classiques (théorèmes 3.1, 3.1*, 3.2 et 3.2*)! Par contre, on peut la déduire de l'étude des coefficients du polynôme caractéristique de A. On peut aussi comparer avec un résultat donné en [7] (proposition 2.1).

G. Archinard, Faculté des sciences économiques et sociales, Université de Genève

BIBLIOGRAPHIE

1 P. Balestra: Calcul matriciel pour économistes, éditions Castella, Albeuve (Suisse) 1972.
2 G. Debreu: Definite and semi-definite Quadratic Forms. Econometrica *20*, 295–300 (1952).
3 F. R. Gantmacher: Théorie des Matrices (traduction françaises), vol. I, Dunod, Paris 1966.
4 B. Guerrien: Algèbre linéaire pour économistes, édition Economica, Paris 1982.
5 Y. Murata: Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems. Academic Press, 1977.
6 P. A. Samuelson: Foundations of Economics Analysis, Harvard University Press, Cambridge, 1955 (fourth printing).
7 O. Spring: On the second derivative test for constrained local extrema. American Math. Monthly *92*, 631–643 (1985).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/020025-07$1.50+0.20/0