Kann man ohne Rechner entscheiden, ob e oder e größer ist

Autor(en): **Hohler, Peter / Gebauer, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 5

PDF erstellt am: **11.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35553

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

VERDANKUNG

Für wertvolle Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr. M. Jeger herzlich danken.

P. Baptist, Bayreuth

LITERATURVERZEICHNIS

1 E.L. Berlekamp: Algebraic Coding Theory. McGraw-Hill, New York 1968.
2 A. Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Klett, Stuttgart 1977.
3 M. Jeger: Zur Behandlung des euklidischen Algorithmus bei Polynomen mit einem programmierbaren Taschenrechner. El. Math. *35*, 25–42 (1980).
4 H. Lüneburg: Vorlesungen über Zahlentheorie. Birkhäuser, Basel 1979.

Kann man ohne Rechner entscheiden, ob e^π oder π^e grösser ist?

In [1] findet sich dazu die folgende elegante Lösung: In der Ungleichung $e^q > q+1$ für $q \neq 0$ setzt man $q = (\pi/e) - 1$ und erhält

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e}.$$

Daraus folgt $e^{\pi/e} > \pi$ und daraus

$$e^\pi > \pi^e. \tag{1}$$

Geht man diese Herleitung nochmals durch, so erkennt man, dass dabei die Zahl π insofern keine wesentliche Rolle spielt, als alle Ungleichungen gültig bleiben, wenn man an Stelle von π irgendeine positive Zahl $\neq e$ einsetzt.

Man schliesst daraus:
Genau die Zahl $a = e$ hat die Eigenschaft

$$\bigwedge_{x>0} a^x \geq x^a. \tag{2}$$

Dass *nur* die Zahl e diese Eigenschaft hat, folgt aus der Tatsache, dass die Gerade $y = x+1$ nur für $a = e$ Tangente an die Kurve $y = a^x$ ist; für jede Basis $a \neq e$ gibt es demnach ein q mit $|q| < 1$, so dass $a^q < q+1$. Für $x = a(q+1)$ gilt dann

$$a^{\frac{x}{a}-1} < \left(\frac{x}{a} - 1\right) + 1 = \frac{x}{a}$$

und daraus wie in (1): $a^x < x^a$.
Damit ist (2) bewiesen.
Einen anderen Zugang zum Satz (2) erhält man, wenn man die Ungleichung $a^x \geq x^a$ logarithmiert. Man erhält dann die äquivalente Ungleichung $x \cdot \ln a \geq a \cdot \ln x$ und daraus

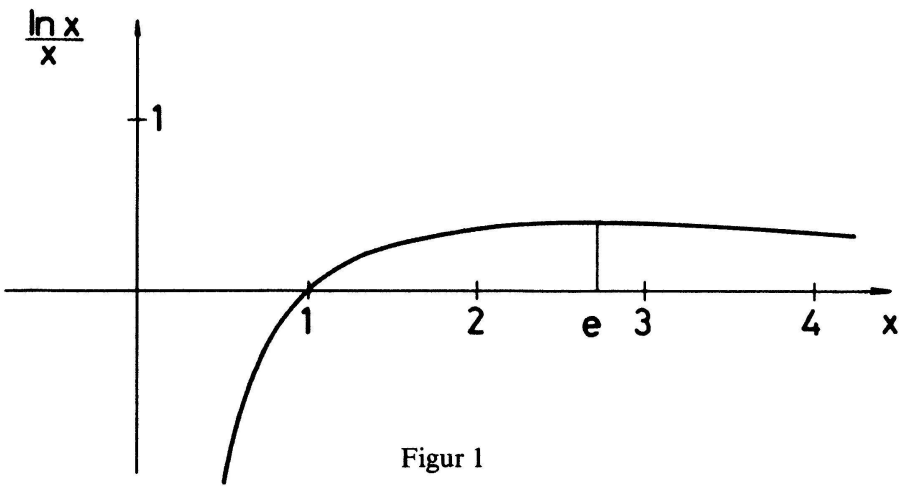
$$\frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}.$$

Die gesuchte Zahl a ist also gleich dem Argument x der Funktion $f(x)=\ln x/x$, das den maximalen Funktionswert liefert. Durch Ableiten von $f(x)$ findet man sofort $a=x_{\max}=e$.
Auf die gleiche Art lässt sich auch die Gleichung $y^x=x^y$ diskutieren: Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}.$$

Da die Lösungen $x=y$ trivial sind und die Gleichung in x und y symmetrisch ist, kann man ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen (siehe Fig. 1):

$$1<x<y.$$



Figur 1

Ist (x,y), $1<x<y$, eine Lösung der Gleichung $x^y=y^x$, so setzen wir $y=x+\delta$ und erhalten

$$x^{x+\delta}=(x+\delta)^x \Leftrightarrow x^\delta=\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^x \Leftrightarrow x=\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{x}{\delta}}.$$

Aus der Figur 1 entnimmt man, dass δ/x jeden reellen Wert $r>0$ annehmen kann. Man erhält somit eine Parameterdarstellung der Lösungspaare:

$$x=(1+r)^{\frac{1}{r}}$$

$$y=x+\delta=x\left(1+\frac{\delta}{x}\right)=(1+r)^{\frac{1}{r}}(1+r)=(1+r)^{\frac{1}{r}+1}.$$

Die Lösungen der Gleichung $y^x=x^y$ mit $x<y$ lassen sich darstellen in der Form

$$(x,y)=\left((1+r)^{\frac{1}{r}},(1+r)^{\frac{1}{r}+1}\right), \qquad r>0. \tag{3}$$

Es ergeben sich *rationale Lösungen*, wenn man für r Stammbrüche $1/n$, $n \in \mathbf{N}$, einsetzt[1]). Man erhält dann

$$(x,y)=\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n},\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right). \tag{4}$$

So liefert z. B. $n=2$:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}.$$

Wir beweisen nun noch, dass die in (4) aufgeführten Lösungen die einzigen rationalen Paare sind:
Zunächst: Wäre r irrational und $(1+r)^{1/r}$ rational, dann wäre

$$(1+r)^{\frac{1}{r}+1}=(1+r)^{\frac{1}{r}}(1+r)$$

irrational, denn das Produkt aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.
Wir setzen also $r=m/n$ und zeigen:

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \tag{5}$$

m, n natürlich, teilerfremd, $m>1$, ist irrational.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Implikation

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \text{ rational } \Rightarrow \left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ rational}.$$

Da die zu m teilerfremden Zahlen $<m$ bezüglich der Multiplikation modulo m eine Gruppe bilden, ist die Kongruenz $z \cdot n \equiv 1 \pmod{m}$ bei unseren Voraussetzungen lösbar. Ist $zn=\lambda m+1$, so gilt:

Ist $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ rational, so ist auch

$$\left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\right]^{z}=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{nz}{m}}=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{\lambda m+1}{m}}=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

1) Die Lösungen in algebraischen Zahlen finden sich in [2].

rational und damit $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ rational.

Der Beweis der Aussage (5) ist also erbracht, wenn gezeigt ist, dass

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\frac{m+n}{n}}$$

irrational ist.
Die m-te Wurzel aus dem Quotienten der beiden teilerfremden Zahlen $m+n$ und n kann aber nur dann rational sein, wenn sowohl $m+n$ als auch n eine m-te Potenz ist. Ist $n=w^m$, so gilt für die nächsthöhere m-te Potenz nach der Ungleichung von Bernoulli

$$(w+1)^m > w^m + mw \geq n+m.$$

$m+n$ kann also nicht gleichzeitig mit n eine m-te Potenz sein, womit (5) bewiesen ist.
Die in (4) aufgeführten Lösungspaare sind also die einzigen rationalen.
Da $n+1$ und n teilerfremd sind, erhält man schliesslich für $n=1$ die *einzige ganzzahlige Lösung* (2/4).

Peter Hohler, Olten
Peter Gebauer, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Honsberger: Mathematical Morsels. Dolciani Math. Expos., USA 1978 (Problem 26).
2 D. Sato: Algebraic Solution of $x^y=y^x$. Proc. Am. Math. Soc. *31* (1972), 316.

Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen

In der didaktischen Literatur findet man viele Axiomatisierungen der natürlichen Zahlen, die von den Peano-Axiomen abgeleitet sind oder die die Wohlordnungseigenschaft benutzen. Wir wollen hier ein Axiomensystem vorstellen, das im entscheidenden - zur Wohlordnung äquivalenten - Axiom von Mächtigkeitsbetrachtungen ausgeht und das dabei ein besonders einfaches Prinzip benutzt:

Das Dirichletsche Schubfächprinzip.
Wenn m Gegenstände auf n Schubfächer verteilt werden und dabei $m>n$ ist, dann enthält ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.
Bauhoff zeigt in [1], dass das Schubfachprinzip als Beweisprinzip sinnvoll verwendet werden kann. Engel und Sewerin stellen in [3] eine Fülle von Aufgaben und Problemen vor, die mittels des Schubfachprinzips zu lösen sind. Pinker schliesslich