**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 33 (1978)
**Heft:** 6

**Artikel:** Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck
**Autor:** Stammler, Ludwig
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-32948

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

$$0=|f(u)|\geq|b_1|c_q(q)-|b_1|\cdot\sum_{\nu=2}^{n}|c_q(a_\nu-a_1)|$$

$$\geq|b_1|\cdot\left\{\varphi(q)-\frac{n-1}{p_1-1}\cdot\varphi(q)\right\}$$

$$\geq|b_1|\cdot\varphi(q)\cdot\frac{1}{p_1-1}.$$

Therefore $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$, and the theorem is proved.

Wolfgang Schwarz, Frankfurt am Main

Š. Porubský informed me that another simple proof of the theorem of this note and a discussion of its connections with covering systems is given in M. Newman: Roots of unity and covering sets. Math. Ann. *191*, 279–282 (1971).

REFERENCES

1 J.H. Conway and A.J. Jones: Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity). Acta Arith. *30*, 229–240 (1976).
2 G.H. Hardy and E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford 1968.
3 H.B. Mann: On linear relations between roots of unity. Mathematika, Lond. *12*, 107–117 (1965).
4 L. Rédei: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerungen des Hauptsatzes von Hajós. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *16*, 329–373 (1965).
5 I.J. Schoenberg: A note on the cyclotomic polynomial. Mathematika, Lond. *11*, 131–136 (1964).
6 B.L. van der Waerden: Algebra I. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1966.
7 E. Wittmann: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln. El. Math. *26*, 42–43 (1971).

# Elementarmathematik und Didaktik[1])

## Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck

Die folgende Aufgabe, die in der Thematik und in den Behandlungsmethoden mehrfach verallgemeinerungsfähig ist, bis hin zur Nutzung in manchen Anwendungsbereichen, kann auch bereits für sich Interesse finden, sowohl als Frage wie auch wegen der Eigenart des Ergebnisses.

**Aufgabe.** *Gegeben sei in der euklidischen Ebene ein beliebiges Dreieck $ABC$. Gesucht ist eine in dem Sinne optimale Kreisfläche $K$, dass zwischen ihr und der Dreiecksfläche $D$ die symmetrische Differenz*

$$(K\cup D)\backslash(K\cap D)$$

*möglichst kleinen Flächeninhalt $F$ hat.*

1) Die für diese Sparte bestimmte Erweiterung des Umfangs von 2 Heften pro Jahrgang um je 8 Seiten wird durch die Deutschschweizerische Mathematik-Kommission (DMK) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer (VSMP) finanziert.

Ein Ansatz zur Behandlung dieser Aufgabe (der z. B. auch brauchbar bleibt, wenn $D$ und $K$ irgendwelche Ovale sind; vgl. [1]) besteht in folgendem Vorgehen: Es sei $K$ irgend ein Kreis, der mit $D$ gemeinsame innere Punkte hat; $Z$ sei ein gemeinsamer innerer Punkt. Wir betrachten die Schar aller aus $K$ durch Streckung mit $Z$ als Zentrum und jeweils positivem $s$ als Streckfaktor entstehenden Kreise $K(s)$. Die symmetrische Differenz $(K(s)\cup D)\setminus(K(s)\cap D)$ habe den Flächeninhalt $F(s)$. Für $0<s_1<s_2$ zerlegen wir die Ringfläche zwischen den Rändern von $K(s_1)$ und $K(s_2)$ in Flächenstücke, die zu vier Klassen jeweils mit Flächeninhaltssummen $P, Q, p, q$ so zusammengefasst werden, wie aus Abb. 1 ersichtlich ist. Es ergibt sich

$$F(s_2)-F(s_1)=P+p-Q-q. \tag{1}$$

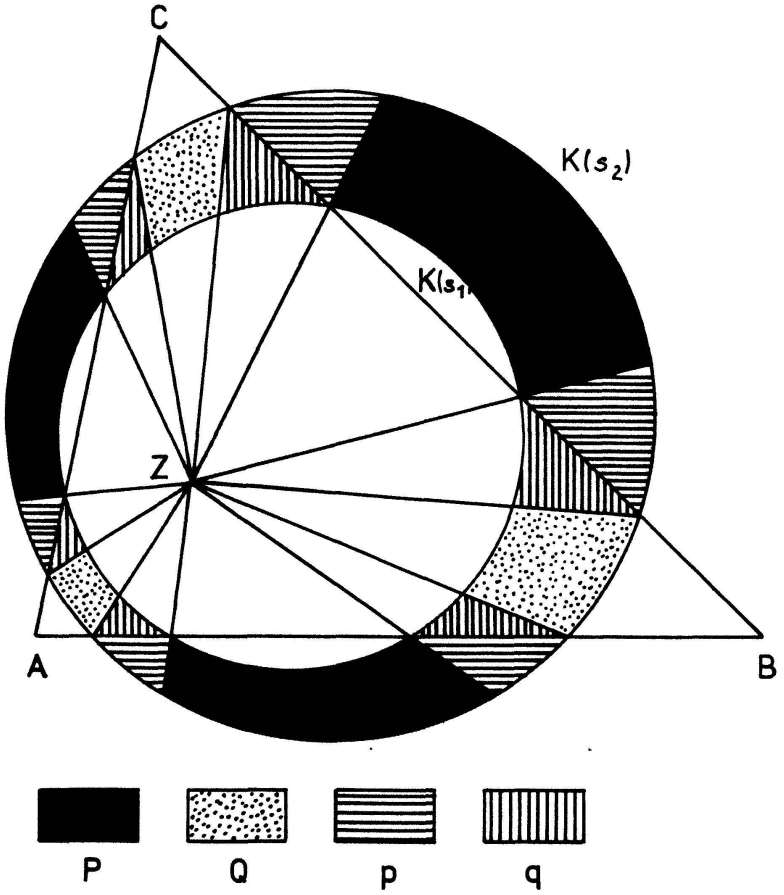


Abb. 1

Dies ermöglicht Monotoniekriterien für $F(s)$ als Funktion von $s$. Um sie zu formulieren, zerlegen wir für jedes $s>0$ die Kreisfläche $K=K(1)$ in Sektoren mit dem Scheitel $Z$, die zu zwei Klassen jeweils mit Flächeninhaltssummen $G(s)$, $H(s)$ so zusammengefasst werden, wie Abb. 2 zeigt.

Für kleine $s$ ist konstant $G(s)=0$; von einem bestimmten Wert von $s$ an wächst $G(s)$ streng monoton - hier, für den Fall eines (konvexen) Polygons $D$ und eines Kreises $K$, sogar auch stetig (vgl. hierzu allgemeiner [2]) - bis zu einem Wert von $s$, von dem an $G(s)$ konstant gleich dem gesamten Flächeninhalt $|K|$ von $K$ bleibt; für jedes $s$ ist ausserdem $G(s)+H(s)=|K|$. Hiernach hat genau eine Zahl $s^*$ die Eigenschaft

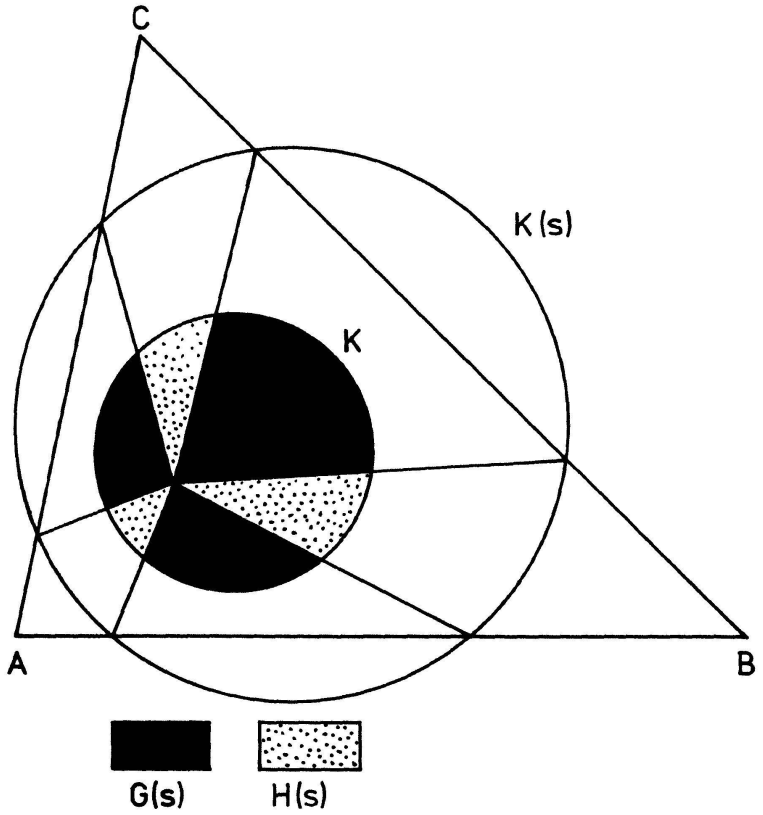


Abb. 2

$$G(s^*)=H(s^*)\left(=\frac{1}{2}\,|K|\right), \tag{2}$$

und es ergibt sich als Diskussion von (1): Gilt $(s_1<)\ s_2 \leqq s^*$, so ist $G(s_2) \leqq H(s_2)$, wegen der Ähnlichkeit also $P+p+q \leqq Q$ und folglich $F(s_2)-F(s_1) \leqq -2q<0$. Gilt aber $s^* \leqq s_1\,(<s_2)$, so ist $G(s_1) \geqq H(s_1)$, also $P \geqq Q+p+q$ und folglich $F(s_2)-F(s_1) \geqq 2p>0$. Somit nimmt $F(s)$ als in $(0,s^*]$ streng fallende und in $[s^*,+\infty)$ streng steigende Funktion genau an der Stelle $s^*$ das globale Minimum an, d. h. wir haben

**Satz 1.** *Bei Einschränkung auf die einparametrige Schar der $K(s)$ ist genau derjenige Kreis $K(s^*)$ optimal, für den die «Halbierungsbedingung» (2) erfüllt ist.*

Ist speziell $Z$ der Mittelpunkt von $K$, so besagt (2) einfach, dass $D$ den Umfang des Kreises $K(s^*)$ halbiert. (Dies lässt sich anderweitig verallgemeinern, z. B. zu folgender Aussage aus [1]: Bei beliebigem - nicht notwendig konvexem - Polygon $D$ ist die Umfangshalbierung eines Kreises $K$ notwendig und hinreichend für stationäres Verhalten von $F$, wenn $K$ nur eine Schar konzentrischer Kreise durchläuft.) Jedoch ist es anscheinend unvorteilhaft, nur von den konzentrischen Kreisscharen auszugehen, wenn man nun durch Variation des Punktes $Z$ über die bisher betrachtete einparametrige Schar hinausgelangen möchte. Vielmehr eröffnet gerade der Ansatz, der zu Satz 1 führte, einen besonders einfachen Weg zu Aussagen bei variablem $Z$. (In [1] wurde auch dieses Vorgehen in Anpassung an allgemeinere Ovale formuliert, ohne die hier folgende Nutzung speziell für Kreise $K$ und Dreiecke $D$.)

Wir nennen einen gemeinsamen inneren Punkt $Z$ eines Kreises $K$ und eines Dreiecks $D$ ein «Halbierungszentrum» von $K$ bezüglich $D$, wenn [wie in (2) für $K(s^*)$ als $K$] die Strahlen aus $Z$ zu allen ausserhalb $D$ gelegenen Randpunkten von $K$ gerade den Flächeninhalt $(1/2)|K|$ überstreichen. Auch Randpunkte $Z$ von $K \cap D$ könnte man zunächst mit zulassen; da sie aber ohnehin aus der Diskussion ausscheiden (siehe unten die Bemerkung zum 3. Fall), sehen wir sogleich von ihnen ab.

**Satz 2.** *Die Menge aller Halbierungszentren von $K$ bezüglich $D$ ist der Durchschnitt des Inneren $J$ von $K \cap D$ mit einer nicht nulldimensionalen linearen Mannigfaltigkeit, d. h. entweder leer oder eine $J$ durchquerende Strecke oder ganz $J$.*

Beweis: Für jeden Punkt $Z \in J$ setzt sich das Flächenstück, das von den Strahlen aus $Z$ zu allen ausserhalb $D$ gelegenen Randpunkten von $K$ überstrichen wird, zusammen aus der Vereinigungsmenge von Kreissegmenten, die (bei variablem $Z$) konstant sind, und Dreiecken mit je konstanter Gegenseite zu $Z$. Also ist der Flächeninhalt dieses überstrichenen Flächenstückes eine lineare Funktion der

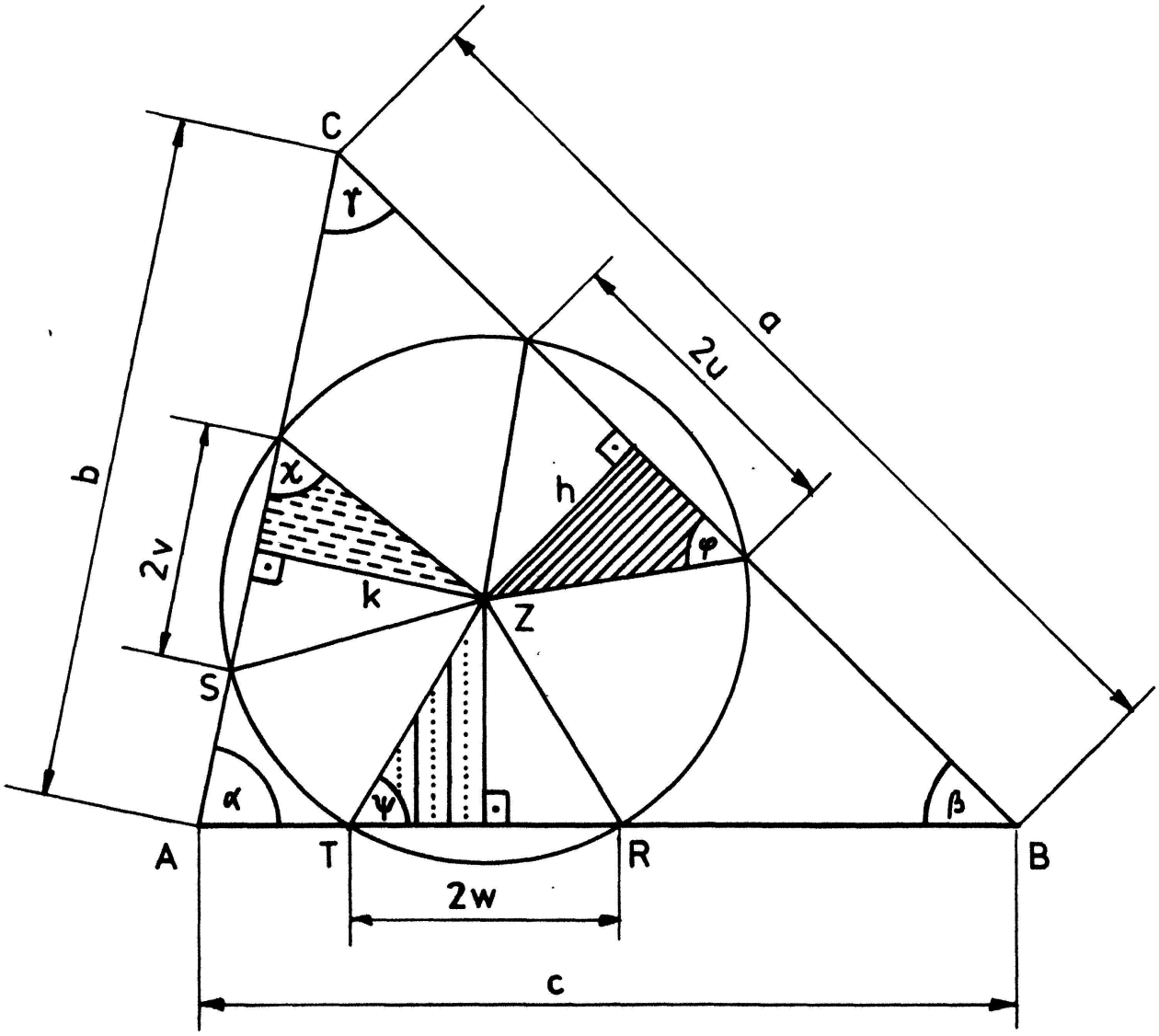


Abb. 3

kartesischen Koordinaten von $Z$. Diese nimmt den Wert $(1/2)|K|$ genau auf einer Punktmenge der behaupteten Art an.
Somit gelangen wir zu einer Bedingung, die zunächst formuliert sei:
**Bedingung (H)** wird genau dann (bezüglich eines Dreiecks $D$) von einem Kreis $K$ erfüllt, wenn die folgenden beiden Aussagen gelten:
($H_1$) Das Dreieck $D$ halbiert den Umfang von $K$, d.h., der Mittelpunkt $Z$ von $K$ ist (wenn er auch innerer Punkt von $D$ ist) ein Halbierungszentrum von $K$ bezüglich $D$.
($H_2$) Variiert der gemeinsame innere Punkt $Z$ von $D$ und $K$, ausgehend von der Lage als Mittelpunkt von $K$, in mindestens zwei nichtkollinearen Richtungen, so bleibt $Z$ Halbierungszentrum (desselben Kreises $K$ bezüglich desselben Dreiecks $D$).

Nach Satz 1 und Satz 2 ist nun diese Bedingung (H) jedenfalls notwendig für die Optimalität von $K$. Sie ist sogar, wovon wir im folgenden nicht einmal Gebrauch machen, (notwendig und) hinreichend für die Optimalität von $K$ bei Variation über eine dreiparametrige Schar. - Wir suchen nun für die verschiedenen Fälle einer Verwirklichung von ($H_1$) auch ($H_2$) zu erfüllen:

**1. Fall.** Die Peripherie eines Kreises $K$, der ($H_1$) erfüllt, werde durch $D$ in sechs Teilbögen zerlegt, die abwechselnd innerhalb und ausserhalb $D$ liegen (Abb. 3; auch Grenzfälle wie $R=T$ oder $S=A=T$ kann man zunächst, unabhängig von der Frage der Optimalität, mit zulassen).
Für die in Abb. 3 angegebenen Winkel $\varphi, \chi, \psi$ besagt ($H_1$) dann
$(180°-2\varphi)+(180°-2\chi)+(180°-2\psi)=180°$, d.h. $\varphi+\chi+\psi=180°$. Variiert nun $Z$ parallel zu $AB$, so bleibt $Z$ dabei genau dann Halbierungszentrum, wenn

$$hu+kv=\text{const} \tag{3}$$

bleibt. Allgemein stellt aber (3), wenn $h, k$ die Lote (eines variablen Punktes $Z$) auf $BC$ bzw. $AC$ sind und wenn $u, v$ gegebene Koeffizienten (nicht beide 0) sind, eine Gerade dar, deren Richtung eineindeutig durch $u:v$ gegeben ist. Für die Gerade $AB$ selbst gilt offenbar $ha+kb=\text{const}$; also stellt (3) genau dann eine Parallele zu $AB$ dar, wenn die gegebenen Koeffizienten im Verhältnis $u:v=a:b$ stehen. Entsprechendes gilt für das Variieren von $Z$ parallel zu den anderen Dreiecksseiten; damit ist bewiesen:

**Satz 3.** *Ein Kreis $K$, der ($H_1$) unter den Bedingungen des 1. Falles erfüllt, erfüllt genau dann auch ($H_2$), wenn für ihn*

$$u:v:w=a:b:c \tag{4}$$

*(mit $u, v, w$ aus Abb. 3) gilt.*

Um zur Gewinnung eines Kreises mit diesen Eigenschaften zu gelangen, nehmen wir zunächst an, ein solcher Kreis liege vor. Dann gibt es ein Hilfsdreieck $LMN$ mit $\varphi, \chi, \psi$ als Innenwinkeln, in welchem sich die Abstände $u, v, w$ des Umkreismittelpunktes $X$ von den Seiten wie $u:v:w=a:b:c$ verhalten: Abb. 4 zeigt eine

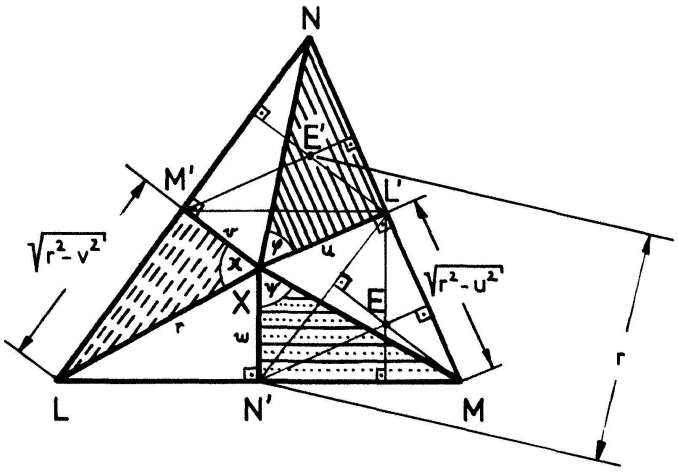


Abb. 4

Gewinnung von $LMN$ durch Zusammensetzen gewisser Teildreiecke aus Abb. 3. Auch umgekehrt ergibt sich, sobald die Innenwinkel $\varphi, \chi, \psi$ eines Hilfsdreiecks $LMN$ mit dieser Eigenschaft vorliegen, im gegebenen Dreieck $D$ ein - sogar konstruktiver - Weg zu dem gesuchten Kreis $K$ (falls $K$ existiert): Man findet in Abb. 3 etwa zunächst ein zu $ZSAT$ ähnliches Viereck aus der Forderung $ZS = ZT$ und den Innenwinkeln $180°-\chi, \alpha$, $180°-\psi$ bei $S$, $A$ bzw. $T$, daraus schrittweise eine zu $ABCZ$ ähnliche Figur und dann diese selbst. Erforderlich für die Ausführbarkeit einer solchen Konstruktion sind die Bedingungen $\chi+\psi \geqq \alpha, \psi+\varphi \geqq \beta, \varphi+\chi \geqq \gamma$; für welches Dreieck $D$, wenn zu ihm $LMN$ vorliegt, diese erfüllt sind (und ob sie auch bereits hinreichend sind), werden wir weiter unten diskutieren.
Vorerst wollen wir allgemein zur Gewinnung eines Hilfsdreiecks $LMN$ gelangen, wenn $u, v, w$ als gegebene Werte betrachtet werden. Dazu zeigen wir

**Satz 4.** *Ist $LMN$ ein spitzwinkliges Dreieck, in dem $r$ der Umkreisradius und $u, v, w$ die Abstände des Umkreismittelpunktes von den Seiten sind, so gilt*

$$r^3-(u^2+v^2+w^2)r-2uvw=0. \tag{5}$$

Beweis: Der Feuerbachkreis von $LMN$ geht durch die Seitenmitten $L', M', N'$ sowie durch die Höhenschnittpunkte $E, E'$ von $N'ML'$ bzw. $M'L'N$ und hat $E'N'$ als Durchmesser. Also folgt aus $EE' \cdot L'N' = EL' \cdot E'N' + EN' \cdot E'L'$ (Satz des Ptolemäus)

$$\sqrt{r^2-u^2} \cdot \sqrt{r^2-v^2} = wr+uv \tag{6}$$

und daraus (5).
Bevor wir die übrigen Fälle der Lage von $K$ betrachten und erst dann die Diskussion auch des 1. Falles abschliessen, begnügen wir uns zunächst noch mit folgender Feststellung: Gemäss (4) hat man, mit den als Seiten von $D$ gegebenen $a, b, c > 0$, die Gleichung (5) in der Form

$$f(x) := x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0 \tag{7}$$

zu behandeln, und diese Gleichung (7) besitzt genau eine positive Lösung $x$. Denn $f'(x)$ hat genau eine positive Nullstelle; es gilt $f(0)<0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ usw.

**2. Fall.** Die Peripherie eines Kreises $K$, der $(H_1)$ erfüllt, werde durch $D$ in vier Teilbögen zerlegt, die abwechselnd innerhalb und ausserhalb $D$ liegen (Abb. 5).
Sind die Teilbögen, im Sinne eines Kreisumlaufs angeordnet, etwa $RS, ST, TU, UR$, so ist $(H_1)$ äquivalent mit $RT \perp SU$. Variiert weiterhin $Z$ parallel zu $RS$, so bleibt $Z$ dabei genau dann Halbierungszentrum, wenn $UT \parallel RS$ gilt; entsprechend bei Variation parallel zu $RU$ genau für $ST \parallel RU$. Also erfüllt ein Kreis, der $(H_1)$ unter den Bedingungen des 2. Falles erfüllt, genau dann auch $(H_2)$, wenn $RSTU$ ein Quadrat ist. Dabei muss dann eine der Strecken $RS, ST, TU, UR$ ganz in einer Seite von $D$ liegen, etwa $RS$ in $AB$, und $C$ im Innern von $K$. Hieraus folgt $\sphericalangle ACB > 135°$. Die Diskussion auch dieses Falles schliessen wir weiter unten ab.

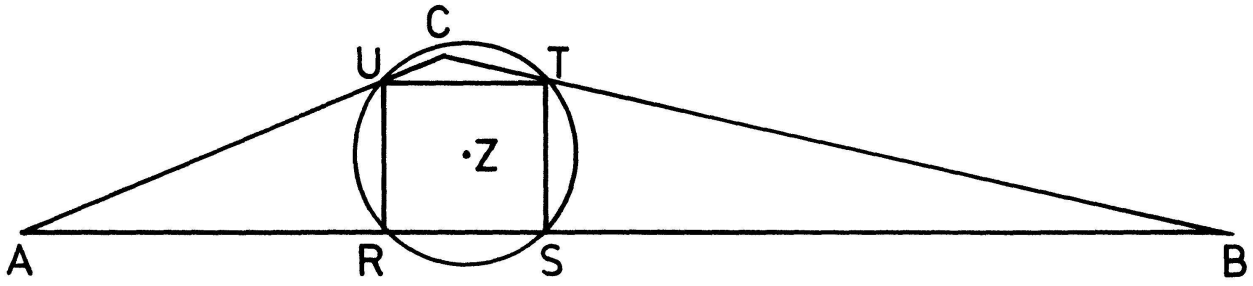


Abb. 5

Als einzige Möglichkeit, $(H_1)$ zu erfüllen (freilich nur mit dem Kreismittelpunkt $Z$ auf dem Rand von $D$), verbleibt noch der

**3. Fall.** Die Peripherie eines Kreises $K$, der $(H_1)$ erfüllt, werde durch $D$ in zwei Teilbögen zerlegt.
Dann kann $(H_2)$ nicht erfüllt werden; um dies zu sehen, variiere man $Z$ nichtparallel zu der Sehne, die die beiden Teilbögen trennt, und wende Satz 2 an. (Natürlich lässt sich ohnehin ein Kreis $K$, dessen Mittelpunkt $Z$ nicht in $J$ liegt, sogleich als nicht optimal erkennen.)
Damit sind wir zur Möglichkeit einer abschliessenden Diskussion vermittels der folgenden endgültigen Fallunterscheidung **(A), (B)** geführt worden. Als Ergebnis wird sich herausstellen:

**Existenz- und Eindeutigkeitssatz zur Aufgabe:** *Für jedes Dreieck D existiert genau ein optimaler Kreis K.*

**(A)** *Das gegebene Dreieck D enthalte einen Innenwinkel grösser als* 135°, *etwa*

$$\gamma = \sphericalangle ACB > 135°. \tag{8}$$

Als Hilfsaussage zum Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes verwenden wir hier noch den folgenden

**Satz 5.** *Es seien $\varphi, \chi, \psi$ die Innenwinkel eines spitzwinkligen Dreiecks $LMN$, in dem die Abstände $u, v, w$ des Umkreismittelpunktes $X$ von den Seiten die Bedingung* (4) *erfüllen. Dabei seien $a, b, c$ und $\alpha, \beta, \gamma$ die Seitenlängen bzw. Winkelgrössen in einem Dreieck $D$, das* (8) *erfüllt. Dann gilt $\varphi + \chi < \gamma$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir $\psi < 45°$: Wäre $\psi \geqq 45°$, so ergäbe ein Vergleich zwischen dem - nach (4) zu $D$ ähnlichen - Dreieck mit den Seitenlängen $u, v, w$ und dem Dreieck $L'XM'$ aus Abb. 4 wegen $\sphericalangle L'XM' = 180° - \psi \leqq 135° < \gamma$ den Widerspruch $L'M' < w \leqq w \cdot \tan\psi = MN'$. Damit ist gezeigt:

$$\frac{w}{r} = \cos\psi > \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$2w^2 r - r^3 > 0,$$

nach (5) also

$$2u^2 v^2 - 2uv(uv + wr) + (w^2 - u^2 - v^2) r^2 > 0$$

und daher nach (6)

$$\frac{uv}{r^2} - \frac{\sqrt{r^2 - u^2} \cdot \sqrt{r^2 - v^2}}{r^2} > \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv},$$

$$\cos(\varphi + \chi) > \cos\gamma.$$

Aus Satz 5, Satz 3 und den Betrachtungen nach Satz 3 und Satz 4 folgt: Gilt **(A)**, so ist (H) nicht unter den Bedingungen des 1. Falles erfüllbar; denn die hierzu erforderliche Gültigkeit von (4) führt über (7) auf genau ein $x$, also eindeutige $\varphi, \chi, \psi$, aus denen sich wegen $\varphi + \chi < \gamma$ nicht Abb. 3 zurückgewinnen lässt. Da aber nach dem Satz von Weierstrass ein optimaler Kreis $K$ existieren muss, geschieht dies unter den Bedingungen des 2. Falles. Damit ergibt die folgende Konstruktion den eindeutig bestimmten optimalen Kreis (Abb. 5):

*Man beschreibt - in bekannter Weise sogar mit Zirkel und Lineal - dem Dreieck $D$ das Quadrat $RSTU$ ein. Sein Umkreis ist der gesuchte Kreis $K$.*

**(B)** *Alle Innenwinkel von $D$ seien $\alpha, \beta, \gamma \leqq 135°$.*
Dann kann nach den Betrachtungen zum 2. Fall unter dessen Bedingungen die Forderung (H) nicht erfüllt werden. Also wird das nach dem Satz von Weierstrass auftretende minimale $F$ unter den Bedingungen des 1. Falles angenommen. Wieder führt (4) über (7) auf eindeutige $\varphi, \chi, \psi$, und da nur sie in der als existent erkannten Abb. 3 auftreten können, erfüllen sie auch zu deren Rückgewinnung hinreichende Bedingungen. Das besagt, dass es genau den folgendermassen zu erhaltenden optimalen Kreis gibt:

*Man ermittelt die einzige positive Lösung $x$ von* (7), *zu ihr mit $u : v : w : r = a : b : c : x$ die Winkel $\varphi, \chi, \psi$ in Abb.* 4 *und rekonstruiert mit deren Hilfe Abb.* 3.

Rechnerisch führt dies über

$$\cos\varphi = \frac{a}{x}, \qquad \cos\chi = \frac{b}{x}, \qquad \cos\psi = \frac{c}{x}$$

[$x$ aus (7)], wie ohne weitere Zwischenrechnungen mitgeteilt sei, auf die Formeln

$$AT = \frac{c}{N} \cdot \sin\beta \cdot \left(\sin\chi + \sin(\psi - \alpha)\right), \qquad TR = \frac{2c}{N} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\psi,$$

$$r_{\text{opt}} = \frac{2}{N} \cdot r_u \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

($r_u$: Umkreisradius von $ABC$; $r_{\text{opt}}$: Radius des optimalen Kreises;
$N := \sin\alpha \cdot \sin\varphi + \sin\beta \cdot \sin\chi + \sin\gamma \cdot \sin\psi$).

Damit ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage sowohl im Fall **(A)** als auch im Fall **(B)** bewiesen. Bemerkenswert ist hierbei:

**Satz 6.** *Gilt* **(B)**, *so ist der optimale Kreis im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal aus D konstruierbar.*

Dies folgt z. B., indem man Dreiecke $D$ mit ganzzahligen $a, b, c$ findet, für die $f(x)$ aus (7) über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzibel wird. Für $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ etwa ist dies der Fall; zugleich zeigt dieses Beispiel, dass $K$ sogar zu recht-

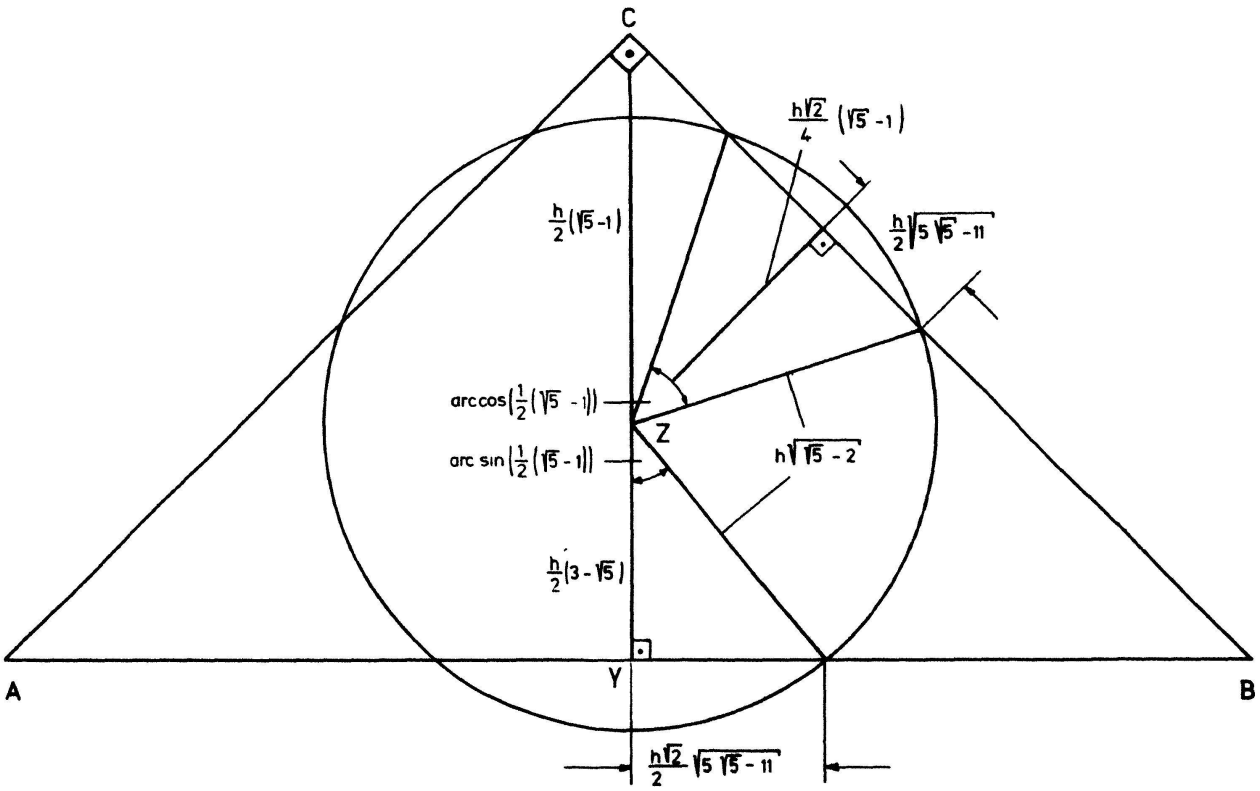


Abb. 6

winkligen Dreiecken $D$ im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Natürlich gibt es auch Dreiecke mit konstruierbarem $K$; z. B. lässt sich, wenn einer der Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ gleich 135° ist, die Konstruktion des Falles **(A)** auch noch anwenden und führt auf denselben Kreis wie nach dem Verfahren aus **(B)**. Ferner wird $f(x)$ beispielsweise für $a=b$ (gleichschenklige $D$) reduzibel, nämlich teilbar durch $x+c$. Wir erwähnen insbesondere als ein pointiertes Gegenstück zu Satz 6:

**Satz 7.** *Ist $ABC$ gleichschenklig und bei $C$ rechtwinklig, so teilt der Mittelpunkt $Z$ des optimalen Kreises die Höhe $CY$ im Verhältnis $CZ:ZY=(1/2)(1+\sqrt{5})$ des «Goldenen Schnittes».*

In der Tat rechnet man nach, dass für den Kreis mit diesem Mittelpunkt $Z$ und dem Radius $CY \cdot \sqrt{\sqrt{5}-2}$ die Bedingung (H) erfüllt ist (Abb. 6).

Ludwig Stammler, Halle (Saale), DDR

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Stammler und B. Weissbach: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beitr. Alg. Geom. *8*, im Druck.
2 L. Stammler und U. Matte: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval. Beitr. Alg. Geom. *9*, im Druck.
3 A. Rosenfeld: Aufgabe E2632. Lösung von J. Oman. Am. Math. Monthly *85*, 280 (1978).

## Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten

Von der Schule her kennt man das Dreieck mit den Seiten 4, 5, 6, in welchem überraschenderweise ein Winkel genau doppelt so gross ist wie ein anderer. Die Frage liegt nahe, ob vielleicht noch weitere solche Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden Seiten $a$, $b$, $c$ und der Winkelbeziehung $\beta=2\alpha$ existieren. Im nachfolgenden Abschnitt a werden unter alleiniger Verwendung des Sinussatzes alle derartigen Dreiecke bestimmt.
Es erhebt sich die nächste Frage: Gibt es auch Dreiecke mit ganzzahligen, teilerfremden $a$, $b$, $c$ und $\beta=3\alpha$? Im Abschnitt b wird auch für diese Dreiecke die entsprechende Parameterdarstellung hergeleitet.
Die gleiche Fragestellung für die Fälle $\beta=4\alpha, 5\alpha, \ldots, k\alpha$ wird im letzten Abschnitt c weiterverfolgt; die Formeln (5) geben die allgemeine Lösung des aufgeworfenen Problems.
Einen andern Weg zur Lösung der vorliegenden Aufgabe hat J. T. Groenman, Groningen (NL) eingeschlagen; anstelle des Sinussatzes verwendet er weitgehend elementargeometrische Überlegungen. Seine Lösung erscheint in «Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde».

a) $\beta=2\alpha$. Der Sinussatz ergibt für die Seitenverhältnisse:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha\,, \qquad \frac{c}{a}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=4\cos^2\alpha-1\,.$$