Polyederfunktionale, die nicht translationsvariant, aber injektiv sind

Autor(en): **Kirsch, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 5

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32943

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 33 Heft 5 Seiten 105-128 10. September 1978

Polyederfunktionale, die nicht translationsinvariant, aber injektiv sind

Herrn Professor H. Hadwiger zum 70. Geburtstag

Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ zunächst die Menge aller *eigentlichen Polygone*, d.h. die Menge aller Vereinigungen von je endlich vielen abgeschlossenen und nicht entarteten Dreiecken. Offenbar ist $\mathfrak{R}$ abgeschlossen bzgl. Vereinigungsbildung, nicht aber bzgl. Durchschnitts- und Differenzbildung. Versteht man jedoch die letztgenannten Operationen, in «unbewusster Abstraktion» (G. Aumann [1]), wie folgt:

$A \cap' B =$ abgeschlossene Hülle des offenen Kerns von $A \cap B$,

$A \setminus' B \;\; =$ abgeschlossene Hülle von $A \setminus B$,

dann ist $(\mathfrak{R}, \cup, \cap', \setminus')$, kurz $\mathfrak{R}$, ein abschnittskomplementärer distributiver Verband[1]) (mit Nullelement $\emptyset$, ohne Einselement); d.h. $\mathfrak{R}$ ist abgeschlossen bzgl. der beschriebenen Operationen, und es gelten die vertrauten Regeln der Mengenalgebra.

Ein *Inhaltsfunktional* (oder: eine Inhaltsmasszahl) auf der Menge $\mathfrak{R}$ ist nach H. Hadwiger [2] eine Abbildung Φ von $\mathfrak{R}$ in $\mathbf{R}$, die *translationsinvariant* ist und darüber hinaus

einfach additiv: $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, falls $A \cap' B = \emptyset$;

(nichtnegativ-)*definit*[2]): $\Phi(A) \geq 0$;

normiert: $\Phi(Q) = 1$ (Q das Einheitsquadrat).

Wir zeigen nun, dass man bei Verzicht auf Translationsinvarianz *injektive* Funk-

1) Hierzu etwa H. Hermes: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955 (insb. S. 48, 49).

2) Infolge der Beschränkung auf eigentliche Polygone ist Φ sogar positiv definit, d.h. aus $\Phi(A) = 0$ folgt $A = \emptyset$.

tionale auf $\mathfrak{R}$ angeben kann, die alle übrigen Eigenschaften eines Inhaltsfunktionals haben. Mit anderen Worten, wir beweisen den

Satz. *Es gibt injektive Abbildungen Φ von $\mathfrak{R}$ in* **R**, *die einfach additiv, definit und normiert sind.*

Zur *Vorbereitung* des Beweises erinnern wir an die Arbeit [1], in der (zur Illustration des Darstellungssatzes von Stone) zwei elementare Darstellungen von $\mathfrak{R}$ als *Mengenverbände,* also mit ungeänderter Bedeutung der Mengenoperationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$ gegeben werden. Im Gegensatz zu G. Aumann interessiert uns primär diejenige Darstellung, bei der die Mengen, welche die eigentlichen Polygone[3]) repräsentieren, selbst *Punktmengen* sind: Dabei besteht für $A \in \mathfrak{R}$ die repräsentierende Menge A^φ aus allen inneren Punkten von A und (falls $A \neq \emptyset$) den Punkten derjenigen Randstrecken von A, deren nach innen weisende Normalen einen Richtungswinkel zwischen 0 einschliesslich und π ausschliesslich haben; in ähnlicher Weise wird über die Eckpunkte verfügt ([1], S. 26, 27). Diese Darstellung φ ist, wie man sich nach [1] «leicht überlegt», ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf einen Punktmengenverband. Natürlich gilt $\emptyset^\varphi = \emptyset$. Man beachte ferner, dass im Falle $A \neq \emptyset$ das eigentliche Polygon A und damit auch die Punktmenge A^φ innere Punkte besitzt.

Zum *Beweis* des Satzes wählen wir eine abzählbare, in der Ebene dicht liegende Menge D von Punkten $x_1, x_2, \ldots$ (wobei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$). Sodann definieren wir für jedes Polygon $A \in \mathfrak{R}$:

$$\Phi(A) = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}, \quad \text{mit} \quad c = \sum_{x_i \in Q^\varphi} 2^{-i}.$$

Da in Q^φ jedenfalls Punkte von D liegen, ist c streng positiv und die Zahl $\Phi(A)$ wohldefiniert. Es gilt $\Phi(\emptyset) = 0$. Im Falle $A \neq \emptyset$ enthält A^φ innere Punkte und folglich unendlich viele Punkte aus D; die angeschriebenen Summen sind dann also unendliche Reihen mit streng positiven Gliedern.
Offenbar ist das Funktional Φ definit und normiert. Auch die *einfache Additivität* ist sofort zu sehen: Für $A, B \in \mathfrak{R}$ mit $A \cap' B = \emptyset$ hat man $(A \cup B)^\varphi = A^\varphi \cup B^\varphi$ und $A^\varphi \cap B^\varphi = (A \cap' B)^\varphi = \emptyset^\varphi = \emptyset$, also

$$\Phi(A \cup B) = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi \cup B^\varphi} 2^{-i} = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i} + c^{-1} \sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i} = \Phi(A) + \Phi(B).$$

Nun zur *Injektivität:* Es sei $A \neq B$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \setminus' B \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge $(A \setminus' B)^\varphi = A^\varphi \setminus B^\varphi$ innere Punkte, also auch Punkte aus D. Es folgt $(A^\varphi \setminus B^\varphi) \cap D = (A^\varphi \cap D) \setminus (B^\varphi \cap D) \neq \emptyset$, also $A^\varphi \cap D \neq B^\varphi \cap D$. Das bedeutet: Die Summen $\sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}$ und $\sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i}$ stimmen nicht in allen Gliedern überein und haben folglich verschiedene Werte. Hierzu beachte man, dass diese

3) Bei Aumann: Die «elementargeometrischen Figuren».

Summen als nichtabbrechende (oder identisch verschwindende) Dualbrüche interpretierbar sind: Zwei solche haben verschiedene Werte, sobald sie nicht an allen Stellen übereinstimmen. Somit folgt $\Phi(A) \neq \Phi(B)$.

Als eine bemerkenswerte *Konsequenz* des hiermit bewiesenen Satzes erwähnen wir: Φ ist wegen der Definitheit und Additivität monoton: d.h. aus $A \subset B$ ($\subset$ bezeichne die strenge Inklusion) folgt jedenfalls $\Phi(A) \leq \Phi(B)$. Wegen der Injektivität folgt nun weiter $\Phi(A) < \Phi(B)$; d.h. Φ ist *streng monoton*. Nach Vorgabe von Φ ist somit durch $A \prec B \Leftrightarrow \Phi(A) < \Phi(B)$ eine *strenge lineare Ordnung* $\prec$ *in* $\mathfrak{R}$ definiert, welche die bereits vorhandene (nicht lineare) Ordnungsrelation $\subset$ in $\mathfrak{R}$ respektiert: Aus $A \subset B$ folgt $A \prec B$. Damit ist eine bekannte Existenzaussage (die Fortsetzbarkeit jeder Ordnung zu einer linearen Ordnung) für den speziellen Fall der Inklusion eigentlicher Polygone in einer sehr konkreten Weise, gleichsam mittels «Punktbewertung» (hierzu [3, 4]), nachgewiesen.

Im Hinblick auf die Überschrift dieser Note sei schliesslich bemerkt, dass unsere Überlegungen gültig bleiben, wenn $\mathfrak{R}$ die Menge aller *eigentlichen Polyeder*, für beliebige Dimension k, bedeutet. Hierfür hat man sich nur klarzumachen, dass auch in diesem Fall ein Isomorphismus φ von $\mathfrak{R}$ auf einen Punktmengenverband existiert, derart dass mit jedem nichtleeren Polyeder A aus $\mathfrak{R}$ auch A^{φ} innere Punkte besitzt.

Arnold Kirsch, Kassel

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Aumann: Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen? El. Math. *7*, 25–28 (1952).
2 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
3 A. Kirsch: Lässt sich jede «gerechte» Rangordnung durch eine Punktbewertung erzeugen? Math.-Phys. Semesterber. *15*, 94–101 (1968).
4 A. Kirsch: «Gerechte» lineare Ordnungen und Punktbewertungen. Der Mathematikunterricht *15*/1, 64–84 (1969).

Rektifizierbare vierdimensionale Simplices

Herrn Prof. H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Übersicht

Zwei eigentliche Polyeder A, B heissen *zerlegungsgleich*, geschrieben $A \sim B$, wenn sie im Sinne der Elementargeometrie in Teilpolyeder $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ so zerlegt werden können, dass A_i mit B_i kongruent ist (für $i = 1, \ldots, n$). Insbesondere nennen wir mit Goldberg [5] jedes Polyeder A, das *zu einem Würfel zerlegungsgleich* ist, *rektifizierbar*. Ein Interesse an der Aufsuchung rektifizierbarer Polyeder liegt