Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 4

Artikel: Das Problem der Dreiercliquen : ein Beitrag zur Graphentheorie
Autor: Tietze, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32942

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 33 Heft 4 Seiten 81-104 10. Juli 1978

Das Problem der Dreiercliquen. - Ein Beitrag zur Graphentheorie

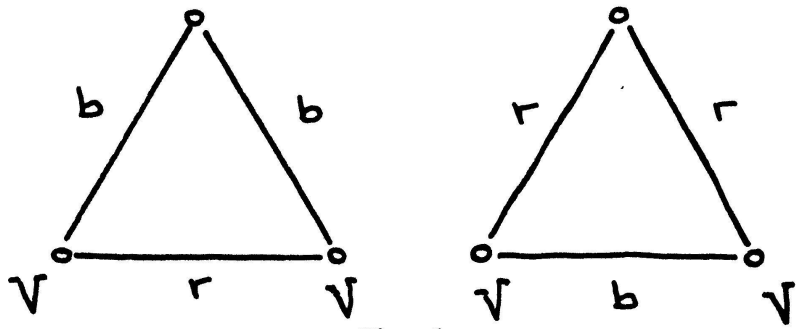
1. Einleitung

In der Unterhaltungsmathematik wird die folgende Frage behandelt: «Befinden sich unter 6 Personen, die sich untereinander mit Du oder Sie anreden, stets 3 Personen, die sich gleich anreden?»
Die Antwort lautet, wenn man 3 Personen der Gesellschaft, die sich gleich anreden, eine *Dreierclique* nennt: In einer Gesellschaft von 6 Personen gibt es mit Sicherheit stets eine Dreierclique.
Die Begründung dafür kann etwa so geführt werden ([3], S. 23): Eine beliebige Person A hat im Verhältnis zu den anderen 5 Personen sicher zu dreien die gleiche Anredeform. Das mögen die Personen B, C und D sein. Wenn nun diese 3 Personen eine Dreierclique bilden, ist eine solche vorhanden. Wenn nicht, dann müssen sich mindestens 2 dieser Personen so anreden, wie A die Personen B, C und D anredet. Dann bildet A mit diesen beiden Personen eine Dreierclique.
Die genauere Untersuchung führt zu der Erkenntnis, dass unter 6 Personen stets wenigstens 2 Dreiercliquen existieren. Allgemeiner stellt sich die Frage nach der Anzahl der Dreiercliquen in einer Gesellschaft von n Personen. Zur Veranschaulichung liegt es nahe, die n Personen als Punkte darzustellen und die $\binom{n}{2}$ möglichen Verbindungen, dem Du und Sie entsprechend, in zwei verschiedenen Farben, etwa Rot und Blau, anzulegen. Damit wird man auf ein Färbungsproblem über Graphen geführt. Die Frage lautet jetzt: Wie gross ist bei einem gefärbten vollständigen Graphen die Mindestzahl der Dreiecke mit gleichfarbigen Seiten, der sog. *chromatischen* Dreiecke? Wir bleiben hier bei der einfachen Bezeichnung: *das Problem der Dreiercliquen.*
Zur Aufhellung der Problematik kann man die Du- und Sie-Beziehungen auch in zwei getrennten Graphen $\mathfrak{G}$ und $\bar{\mathfrak{G}}$ gleicher Knotenzahl darstellen: Die Verbindungen in $\mathfrak{G}$ bedeuten dann etwa das Du, die Verbindungen in $\bar{\mathfrak{G}}$ entsprechend das Sie. Zwei solche Graphen haben die Eigenschaft, dass zwei Knoten in dem einen genau dann verbunden sind, wenn im anderen die Verbindung fehlt. Sie heissen in der Graphentheorie *komplementär.* Damit kann unsere Frage schliesslich auch so formuliert werden: Wie viele der $\binom{n}{3}$ Dreiecke eines vollständigen Graphen

mit n Knoten bleiben mindestens erhalten, wenn dieser in beliebiger Weise in komplementäre Graphen aufgeteilt wird?
Die erste Lösung des *Dreiercliquenproblems* hat offenbar A. W. Goodman im Jahre 1959 veröffentlicht [1]. Sein Ergebnis soll hier einfach als die *Goodman-Formel* bezeichnet werden. Unabhängig von dem Minimalproblem kann man allgemein nach der genauen Zahl der chromatischen Dreiecke bei einer beliebigen Kantenfärbung eines vollständigen Graphen fragen. Hierzu hat G. Lorden 1962 ein sehr nützliches Lemma entwickelt [2].
Die vorliegende Untersuchung wurde durchgeführt ohne Kenntnis der früheren Arbeiten. Sie benutzt jetzt den schönen Ansatz von Lorden und entwickelt für die Zahl D_n der Dreiecke bei beliebiger Zerlegung eines vollständigen Graphen einen bemerkenswert einfachen Ausdruck (Satz 1). Eine spezielle zweite Form der Darstellung von D_n (Satz 2) führt dann leicht auf die Goodman-Formel.

2. Das Lemma von Lorden

Die Zahl der Kanten, die in einem Graphen mit einem Knoten K inzidieren, heisst die *Ordnung* des Knotens K. Haben alle Knoten eines Graphen $\mathfrak{G}$ die gleiche Ordnung r, dann heisst $\mathfrak{G}$ ein *regulärer Graph* von der Ordnung r. Der vollständige Graph mit n Knoten ist regulär von der Ordnung $n-1$. Er möge mit $\mathfrak{J}_n$ bezeichnet werden. Er hat $\binom{n}{2}$ Kanten und enthält $\binom{n}{3}$ Dreiecke.
Wir richten unser Augenmerk zunächst auf die Zahl der nichtchromatischen Dreiecke eines gefärbten $\mathfrak{J}_n$. Diese Dreiecke haben entweder die Seitenfarben Blau-Blau-Rot oder Rot-Rot-Blau (Fig. 1). In jedem dieser Dreiecke gibt es genau zwei Ecken, an denen verschiedenfarbige Seiten zusammenstossen. Das sind die



Figur 1

Ecken an der Seite, deren Farbe nur einmal vorkommt. Solche Ecken mögen *V-Ecken* heissen. Man kann die Gesamtzahl dieser Ecken leicht bestimmen, wenn man etwa die Zahl r_i der roten Kanten kennt, die mit dem Knoten K_i $(i=1, 2, \dots n)$ inzidieren. Mit dem Knoten K_i inzidieren dann $n-1-r_i$ blaue Kanten. Da jede Kombination einer roten mit einer blauen Kante eine V-Ecke ergibt, liegen in dem Knoten K_i genau $r_i \cdot (n-1-r_i)$ V-Ecken. Damit ergibt sich die Gesamtzahl der V-Ecken in $\mathfrak{J}_n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot (n-1-r_i). \tag{1}$$

Da nun zu je zwei V-Ecken genau ein wohlbestimmtes nichtchromatisches Dreieck gehört, ist die Zahl der nichtchromatischen Dreiecke $(1/2)\,S_n$. Damit folgt das *Lemma von Lorden*: Inzidieren in einem gefärbten vollständigen Graphen $\mathfrak{J}_n\,(n \geq 3)$ mit dem Knoten K_i genau r_i rote Kanten, dann ist die Zahl der chromatischen Dreiecke von $\mathfrak{J}_n$

$$D_n = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot (n-1-r_i)\,. \tag{2}$$

3. Die Zahl D_n durch Zerlegung eines vollständigen Graphen $\mathfrak{J}_n$

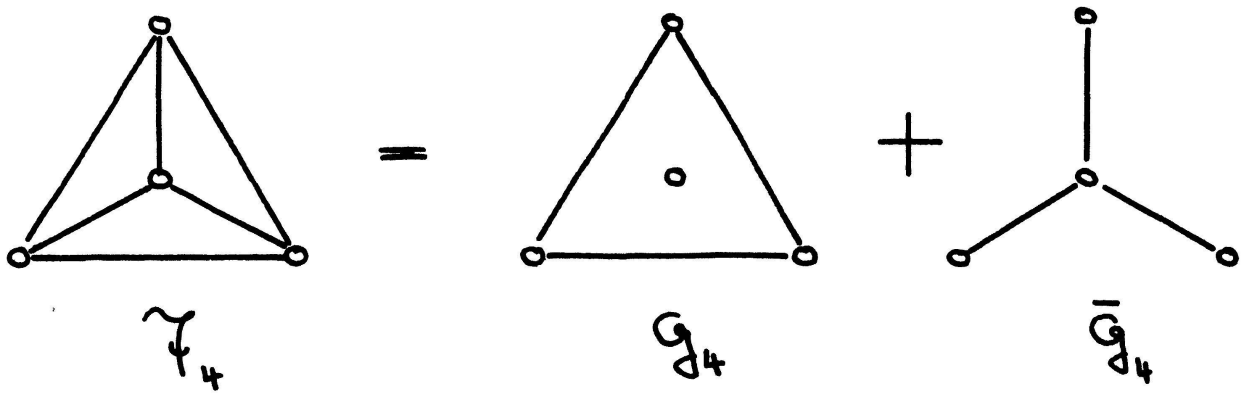
Die Zahl D_n der chromatischen Dreiecke soll nun dadurch bestimmt werden, dass wir von einer Aufteilung von $\mathfrak{J}_n$ in zwei komplementäre Graphen $\mathfrak{G}_n$ und $\bar{\mathfrak{G}}_n$ ausgehen. Unter $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ wollen wir den Graphen verstehen, der aus den getrennt liegenden Graphen $\mathfrak{G}_n$ und $\bar{\mathfrak{G}}_n$ besteht. Er hat $2n$ Knoten und $\binom{n}{2}$ Kanten. Figur 2 zeigt eine Summenzerlegung $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ von $\mathfrak{J}_n$. Es gilt der folgende

Satz 1. *Zerlegt man einen vollständigen Graphen $\mathfrak{J}_n\,(n > 3)$ in beliebiger Weise in die Summe von komplementären Graphen $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$, und gibt z_k die Zahl der Knoten in $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ an, die die Ordnung k haben, dann gilt für die Anzahl D_n der Dreiecke in $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$*

$$(n-3) \cdot D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{3} \cdot z_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 2n\,. \tag{3}$$

Im Beispiel der Figur 2 ergibt sich

$$(4-3) \cdot D_4 = \binom{3}{3} \cdot z_3 = 1\,; \qquad D_4 = 1\,.$$



Figur 2

Die Werte z_k

k	0	1	2	3
z_k	1	3	3	1

haben naturgemäss die Summe $8 = 2n$.

Beweis:
a) Sei etwa $\mathfrak{G}_n$ der rote, $\bar{\mathfrak{G}}_n$ der blaue Teilgraph des gefärbten $\mathfrak{J}_n$. Aus der Voraussetzung beim Lorden-Lemma, dass mit dem Knoten K_i von $\mathfrak{J}_n$ genau r_i rote Kanten inzidieren, folgt jetzt: die Knoten $K_1, K_2, \ldots K_n$ von $\mathfrak{G}_n$ haben die Ordnungen

$$r_1, r_2, \ldots r_n, \qquad 0 \leq r_i \leq n-1.$$

Wir fassen in der Summe (1)

$$S_n = r_1 \cdot (n-1-r_1) + r_2 \cdot (n-1-r_2) + \cdots + r_n \cdot (n-1-r_n)$$

die Glieder mit gleichen r-Werten zusammen.
Möge etwa der Wert $0, 1, \ldots n-1$:

$u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ mal vorkommen.

Man erhält

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 \cdot 0 \cdot (n-1) + u_1 \cdot 1 \cdot (n-2) + u_2 \cdot 2 \cdot (n-3) + \cdots + u_{n-1} \cdot (n-1) \cdot 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k \cdot k \cdot (n-1-k). \end{aligned} \tag{4}$$

b) Weil u_k Knoten in $\mathfrak{G}_n$ die Ordnung k haben, haben u_k Knoten in $\bar{\mathfrak{G}}_n$ die Ordnung $n-1-k$ und u_{n-1-k} Knoten in $\bar{\mathfrak{G}}_n$ die Ordnung k.
Die Gesamtzahl der Knoten in $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ mit der Ordnung k ist daher

$$z_k = u_k + u_{n-1-k}.$$

Es ist $z_{n-1-k} = z_k$ und $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 2n$ (bestätigt im Beispiel).

c) Neben (4) gilt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-1-k} \cdot (n-1-k) \cdot k. \tag{5}$$

Die Summe ergibt

$$2S_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot (n-1-k) \cdot z_k.$$

Damit folgt aus dem Lorden-Lemma

$$D_n = \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot (n-1-k) \cdot z_k. \tag{6}$$

d) Um $\binom{n}{3}$ in die Summe einbeziehen zu können, verwenden wir

$$2n=\sum_{k=0}^{n-1} z_k \quad \text{und setzen} \quad 2\cdot(n-3)\cdot\binom{n}{3}=2n\cdot\binom{n-1}{3}=\binom{n-1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} z_k.$$

Damit wird

$$2(n-3)\cdot D_n=\sum_{k=0}^{n-1} z_k\left[\binom{n-1}{3}-\frac{(n-1-k)\cdot k\cdot(n-3)}{2}\right]. \tag{7}$$

Wir formen nun die Klammer um unter Benutzung der für beliebige a, $b\in\mathbf{Z}$ und $n\in\mathbf{N}$ gültigen Beziehung

$$\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{n-k}\binom{b}{k}\ ^{1)}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\binom{a+b}{3}=\binom{a}{3}+\binom{a}{2}\binom{b}{1}+\binom{a}{1}\binom{b}{2}+\binom{b}{3}=\binom{a}{3}+\binom{b}{3}+\frac{ab(a+b-2)}{2}$$

oder

$$\binom{a+b}{3}-\frac{ab(a+b-2)}{2}=\binom{a}{3}+\binom{b}{3}.$$

Die Klammer in (7) kann damit wie folgt umgeformt werden

$$\binom{(n-1-k)+k}{3}-\frac{(n-1-k)k(n-1-k+k-2)}{2}=\binom{n-1-k}{3}+\binom{k}{3}.$$

Wir erhalten aus (7)

$$\begin{aligned}2(n-3)\cdot D_n&=\sum_{k=0}^{n-1} z_k\cdot\left[\binom{k}{3}+\binom{n-1-k}{3}\right]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{3}z_k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{3}z_{n-1-k}.\end{aligned}$$

Wegen der Gleichheit der beiden Summen ist damit (3) erreicht.

4. Differenzierte Darstellung der Anzahl D_n

Im Hinblick auf das Minimalproblem erweist sich die getrennte Darstellung der Fälle $n=2m$, $n=4m+1$ und $n=4m+3$ als nützlich.

1) Man kann diese Beziehung bestätigen, indem man im Binomialreihenprodukt $(1+x)^{a+b}=(1+x)^a(1+x)^b$ beidseitig den Koeffizienten von x^n betrachtet.

Satz 2. *Zerlegt man einen vollständigen Graphen $\mathfrak{J}_n (n>3)$ in beliebiger Weise in komplementäre Graphen $\mathfrak{G}_n$ und $\bar{\mathfrak{G}}_n$ und gibt es in $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ genau z_k Knoten der Ordnung k, dann gilt für die Anzahl D_n der Dreiecke in $\mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$*

$$D_{2m} = G_1(m) + \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{2} \cdot z_{m-k} \quad \text{mit} \quad G_1(m) = \frac{m(m-1)(m-2)}{3}, \tag{8a}$$

$$D_{4m+1} = G_2(m) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2m} k^2 \cdot z_{2m-k} \quad \text{mit} \quad G_2(m) = \frac{2m(m-1)(4m+1)}{3}, \tag{8b}$$

$$D_{4m+3} = G_3(m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2m+1} k^2 \cdot z_{2m+1-k} \quad \text{mit}$$

$$G_3(m) = \frac{2m(m+1)(4m-1)}{3}. \tag{8c}$$

Die Zahlen $G_i(m)$ sind ganz, da die Faktoren im Zähler jeweils alle Restklassen mod 3 repräsentieren.

Beweis:
1. Aus (7) folgt

$$2 \cdot D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \cdot \left[\frac{1}{3}\binom{n-1}{2} - \frac{(n-1-k) \cdot k}{2}\right]. \tag{7'}$$

Daraus wird im Falle $n = 2m$

$$2 \cdot D_{2m} = \sum_{k=0}^{2m-1} z_k \cdot \left[\frac{1}{3}\binom{2m-1}{2} - mk + \binom{k+1}{2}\right]. \tag{9}$$

Hier kann man die Klammer wiederum mit der bereits schon einmal benutzten Beziehung über Binomialkoeffizienten auf eine zweckmässigere Form bringen. Wegen

$$\binom{m-k}{2} = \binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{-k}{1} + \binom{-k}{2} = \binom{m}{2} - mk + \binom{k+1}{2}$$

ist

$$\frac{1}{3}\binom{2m-1}{2} - mk + \binom{k+1}{2} = \frac{1}{3}\binom{2m-1}{2} + \binom{m-k}{2} - \binom{m}{2}$$

$$= \binom{m-k}{2} + \frac{1}{3}\binom{m-1}{2}.$$

Aus (9) wird damit

$$2 \cdot D_{2m} = \frac{1}{3}\binom{m-1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2m-1} z_k + \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{m-k}{2} \cdot z_k = A + B$$

$$A = \frac{1}{3}\binom{m-1}{2} \cdot 4m = 2 \cdot G_1(m).$$

In der Summe B sind symmetrisch liegende Glieder

$$\binom{m-k}{2} \cdot z_k \quad \text{und} \quad \binom{k+1-m}{2} \cdot z_{2m-1-k} \qquad 0 \leq k \leq m-1$$

gleich, weil

$$\binom{-(m-k-1)}{2} = \binom{m-k}{2} \quad \text{und} \quad z_k = z_{2m-1-k}$$

ist. Man erhält

$$2 \cdot D_{2m} = 2 \cdot G_1(m) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-k}{2} \cdot z_k$$

und damit (8a).

2. Für $n = 2r+1$ folgt entsprechend aus (7′)

$$2 \cdot D_{2r+1} = \sum_{k=0}^{2r} z_k \cdot \left[\frac{1}{3}\binom{2r}{2} - \frac{k(2r-k)}{2}\right].$$

Der Klammerausdruck wird mit $k \cdot (2r-k) = r^2 - (r-k)^2$

$$\frac{1}{3}\binom{2r}{2} - \frac{r^2}{2} + \frac{(r-k)^2}{2} = \frac{(r-k)^2}{2} + \frac{r(r-2)}{6}.$$

Damit hat man

$$2 \cdot D_{2r+1} = \sum_{k=0}^{2r} z_k \cdot \left[\frac{r(r-2)}{6} + \frac{(r-k)^2}{2}\right]$$

$$D_{2r+1} = \frac{r(r-2)}{6} \cdot (2r+1) + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{2r} (r-k)^2 \cdot z_k = A + B. \tag{10}$$

Im Falle $r = 2m$, $n = 4m+1$ wird $A = \big(2m(m-1)\big)/3 \cdot (4m+1) = G_2(m)$.

In der Summe B entsteht für $k=2m$ ein Mittelglied, welches verschwindet. Die übrigen symmetrisch liegenden Glieder

$$(2m-k)^2 \cdot z_k \quad \text{und} \quad [2m-(4m-k)]^2 \cdot z_{4m-k}$$

sind wieder gleich. Damit erhält man

$$D_{4m+1} = G_2(m) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2m-1} (2m-k)^2 \cdot z_k$$

und schliesslich (8b).
Ganz entsprechend folgt im Falle $r=2m+1$, $n=4m+3$ aus (10)

$$D_{4m+3} = G_3(m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{2m} (2m+1-k)^2 \cdot z_k$$

und (8c).

5. Die Goodman-Formel

Als einfache Konsequenz ergibt sich nun aus dem Satz 2 sofort die *Goodman-Formel.* Die Mindestzahl der chromatischen Dreiecke in einem vollständigen gefärbten Graphen mit n Knoten ist

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{n(n-2)(n-4)}{24} & \text{bei} \quad n=2m, \qquad (11a) \\[2ex] \dfrac{n(n-1)(n-5)}{24} & \text{bei} \quad n=4m+1, \qquad (11b) \\[2ex] \dfrac{(n+1)(n-3)(n-4)}{24} & \text{bei} \quad n=4m+3. \qquad (11c) \end{cases}$$

Bei jedem n existieren Färbungen mit diesen Mindestzahlen.
Die ersten Werte von M_n zeigt die folgende Tabelle:

n	4	5	6	7	8	9	10
M_n	0	0	2	4	8	12	20

Beweis:
Man erkennt leicht, dass die hier auftretenden Zahlen M_n mit den Zahlen $G_i(m)$ von Satz 2 übereinstimmen. Da dort alle Zusätze zu den Zahlen $G_i(m)$ ganzzahlig und grösser oder gleich $-(1/2)$ sind, folgt sofort: Es ist stets $D_n \geq M_n$.

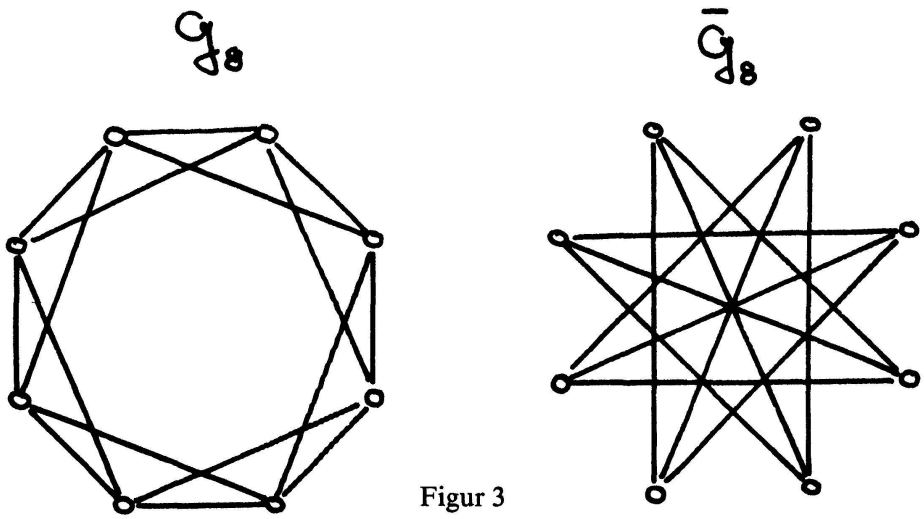
Es muss nur noch nachgewiesen werden, dass es stets Zerlegungen oder Färbungen gibt, bei denen alle in Satz 2 auftretenden Zahlen z_k verschwinden, mit einer kleinen Modifikation im Falle $n=4m+3$. Das ist sehr einfach.

Die in (8a) auftretenden Summen sind

$$\text{bei} \quad n=4m: \qquad \binom{2}{2} z_{2m-2} + \binom{3}{2} z_{2m-3} + \cdots + \binom{2m}{2} z_0,$$

$$\text{bei} \quad n=4m+2: \qquad \binom{2}{2} z_{2m-1} + \binom{3}{2} z_{2m-2} + \cdots + \binom{2m+1}{2} z_0.$$

Die hier vorkommenden z-Werte kann man bei der Zerlegung $\mathfrak{J}_n = \mathfrak{G}_n + \bar{\mathfrak{G}}_n$ vermeiden, indem man $\mathfrak{G}_n$ regulär von der Ordnung $r=2m$ wählt. Bei $n=4m$ ist dann $\bar{\mathfrak{G}}_n$ regulär von der Ordnung $\bar{r}=2m-1$, bei $n=4m+2$ entsprechend von der Ordnung $\bar{r}=2m+1$.
Den betreffenden Graphen $\mathfrak{G}_n$ kann man schrittweise etwa so aufbauen: Man verbindet in einem 1. Schritt jeden der n Knoten, die in einem geschlossenen Ring liegen mögen, mit seinen beiden Nachbarn, in einem 2. Schritt zusätzlich mit den beiden übernächsten Nachbarn usw. bis zum m-ten Schritt, der auf die Ordnung $2m$ führt. Für diese Konstruktion sind genügend Knoten vorhanden: Man benötigt zum 2. Schritt insgesamt $1+4$, zum m-ten Schritt $1+2m$ Knoten. Das gilt auch für $n=4m+1$ und $n=4m+3$.
Beispiel: $n=8$ (Fig. 3).



Figur 3

Auch bei $n=4m+1$ führt die Zerlegung mit dem Graphen $\mathfrak{G}_n$ der Ordnung $r=2m$ zum gewünschten Ziel. Hier hat der komplementäre Graph dieselbe Ordnung. Daher verschwinden alle in der Summe von (8b)

$$\frac{1}{2} \cdot (1^2 \cdot z_{2m-1} + 2^2 \cdot z_{2m-2} + \cdots)$$

auftretenden z-Werte.

Im Falle $n=4m+3$ hat man schliesslich

$$D_{4m+3}=G_3(m)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(1^2\cdot z_{2m}+2^2\cdot z_{2m-1}+\cdots).$$

Hier modifiziert man $\mathfrak{G}_n$ etwa so, dass ein Knoten unverändert bleibt, während die übrigen paarweise verbunden werden. Dann hat ein Knoten die Ordnung $2m$, die übrigen die Ordnung $2m+1$; im komplementären Graphen hat entsprechend ein Knoten die Ordnung $2m+2$ und die übrigen die Ordnung $2m+1$. Man hat daher bei dieser Zerlegung

$$D_{4m+3}=G_3(m)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=G_3(m).$$

Walter Tietze, Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

1 A.W. Goodman: On sets of acquaintances and strangers at any party. Am. Math. Monthly *66*, 778–783 (1959).
2 G. Lorden: Blue-empty chromatic graphs. Am. Math. Monthly *69*, 114–119 (1962).
3 M. Jeger: Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen. Der Mathematikunterricht, Heft 4, S. 11–64 (1974).

Kleine Mitteilungen

Eine Konfiguration von Punkten und Geraden

In Elem. Math. *4* (1977) stellte C. Bindschedler folgende Aufgabe (791):

1. Es sei t eine Tangente an die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in ihren Mittelpunkten berührt (Steinersche Inellipse). Ferner seien K_1, K_2, K_3 drei Kegelschnitte, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der dritten Seite sowie die Gerade t berührt. Je zwei dieser drei Kurven schneiden sich ausser in einer Ecke A_i noch in genau einem weiteren reellen Punkt S_i.
Man zeige, dass die Geraden $A_iS_i (i=1,2,3)$ parallel sind.
Wir betrachten hier eine Erweiterung, indem wir die Tangente t durch eine beliebige Gerade der Ebene ersetzen. Der obige Satz erscheint dann als Sonderfall.

2. Es werden homogene projektive Punktkoordinaten $x_i (i=1,2,3)$ in bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeführt mit beliebig gewähltem Einheitspunkt; t habe die Gleichung $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$ mit $b_i\neq 0 (i=1,2,3)$. Ein Kegelschnitt, der A_1A_2 und A_1A_3 in A_2 und A_3 berührt, gehört zum Büschel, das die Doppelgerade A_2A_3