# Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 4

PDF erstellt am: **10.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

number of values of $p$ and $q$, if either $U_2$ or $U_3$ is irreducible, for which $P(x, y)$ is reducible.

Next

$$h^2 - 4\,a\,b = (p^2\,h_2 - 2\,p\,q\,h_1 - q^2\,h_3)^2 - 4\,(p^2\,a_2 - 2\,p\,q\,a_1 - q^2\,a_3)\,(p^2\,b_2 - p\,q\,b_1 - q^2\,b_3)$$

If $h_2^2 - 4\,a_2\,b_2 > 0$ and is not a perfect square, this holds for $h^2 - 4\,a\,b$ if $p$ is large compared with $q$, and for an infinity of $p$. This proves Theorem (1).

There are many special cases not included in the theorem. We need only mention

**Theorem 2**

*The equation*

$$z^2 = k^2 + x^2\,(a\,x^2 + b\,y^2),\ a\,b\,k \neq 0\,,$$

*has an infinity of integer solutions if $k$, $a$, $b$ are integers and either $b > 0$, or $b < 0$, $4\,a\,k^2 > b^2$.*

We have

$$z + k = \frac{q}{p}\,(a\,x^2 + b\,y^2),\ z - k = \frac{p}{q}\,x^2\,,$$

where $p$, $q$ are integers and $(p, q) = 1$. Then

$$(a\,q^2 - p^2)\,x^2 + b\,q^2\,y^2 = 2\,k\,p\,q\,.$$

This will have the solution $x = 0$, $y = t$, where $t$ is an arbitrary integer, if $b\,q\,t^2 = 2\,k\,p$, and so if $\delta = (b, 2\,k)$, we can take

$$\lambda p = \frac{b}{\delta}\,t^2,\ \lambda\,q = \frac{2\,k}{\delta}\,,\quad \lambda = \left(t^2, \frac{2\,k}{\delta}\right)$$

Hence there will be an infinity of integer solutions for $x$, $y$ if $b\,(p^2 - a\,q^2) > 0$ and is not a perfect square, i.e. $b\,(b^2\,t^4 - 4\,a\,k^2) > 0$ and is not a perfect square. This is possible if $b > 0$ for an infinity of values of $t$, and also if $b < 0$, $4\,a\,k^2 > b^2$ for $t = 1$.

The case $4\,a\,k^2 < b^2$ seems difficult. Of course if $a < 0$, $b < 0$, there are only a finite number of solutions.

L. J. MORDELL, St. Johns College, Cambridge, England

# Ungelöste Probleme

**Bemerkung** zu Nr. 14 (El. Math. *11*, 134–135 (1956)). A. a. O. wurde gezeigt, dass die Gleichung $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = x_1\,x_2 \ldots x_s$ für jedes natürliche $s$ mindestens eine Lösung in natürlichen Zahlen besitzt. Nach einer Mitteilung von Herrn A. SCHINZEL (Warschau) hat M. MISIUREWICZ vor kurzem bewiesen, dass $s = 2, 3, 4, 6, 24, 144, 174, 444$ die einzigen $s \leqq 1000$ sind, für die genau eine Lösung existiert.