Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

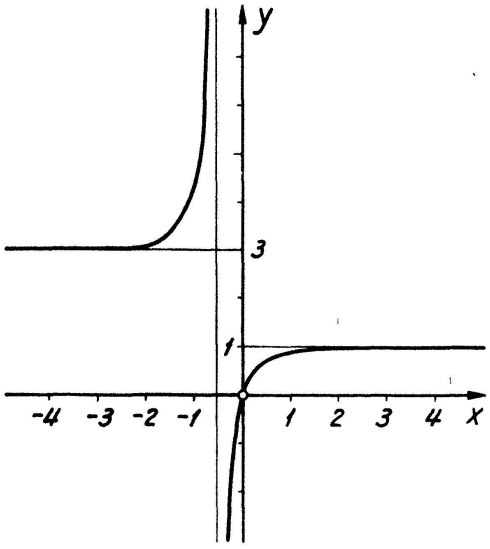
Diese Lösung versagt offensichtlich für $a = b$. Für diesen speziellen Fall nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$y'(t) = c\,(a - y)^2,$$

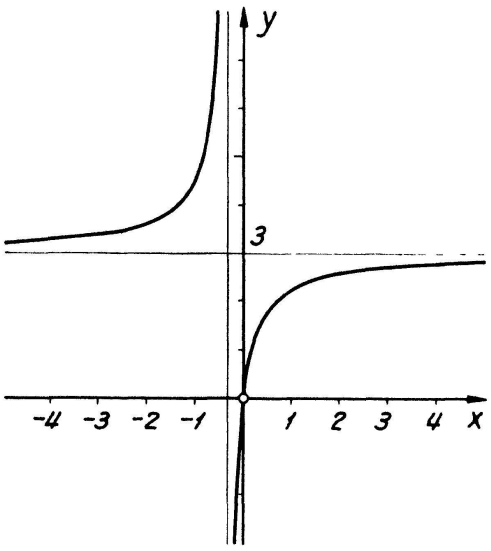
mit

$$y(t) = \frac{c\,a^2\,t}{1 + a\,c\,t}$$

als Lösung. Im ersten Fall erhält man eine transzendente Funktion als Lösung und im zweiten eine gebrochene rationale Funktion. Diese zweite Lösung ergibt sich aber auch



Figur 1



Figur 2

als Grenzwert der ersten Lösung, wenn b gegen a strebt. Wenden wir auf die erste Lösung die Bernoullische Regel an, die noch oft seinem Schüler DE L'HOSPITAL zugeschrieben wird, so erhalten wir

$$y(t) = \lim_{b \to a} \frac{a\,(e^{a\,c\,t} - e^{b\,c\,t}) - c\,a\,b\,t\,e^{b\,c\,t}}{-e^{b\,c\,t} - b\,c\,t\,e^{b\,c\,t}} = \frac{c\,a^2\,t}{1 + a\,c\,t}.$$

Anhand der Figuren 1 und 2 für $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$ und $a = b = 3$, $c = 1$ lässt sich der Übergang der transzendenten Kurve in die rationale Kurve leicht überblicken.

P. BUCHNER

Aufgaben

Aufgabe 318. Kann man aus allen konvexen Rotationskörpern des R_3 durch Nebenbedingungen solche Klassen auswählen, dass die Kugel im Vergleich mit allen Körpern einer Klasse weder maximales noch minimales Volumen hat? H. BIERI, Bern

Lösung des Aufgabenstellers: Solche Klassen kann man tatsächlich angeben. Einen konvexen Rotationskörper des R_3 beschreiben wir durch Hauptmasszahlen V (Volumen), F (Oberfläche), M (Integral der mittleren Krümmung) und die Nebenmasszahlen D (Durchmesser, allergrösste Breite), Δ (Dicke, allerkleinste Breite), r (Äquatorradius), l (Länge gemessen auf der Rotationsachse), L (Länge der erzeugenden Meridiankurve), Q (Flächeninhalt eines Meridianschnittes). $\mathfrak{K}_u$ bzw. $\mathfrak{K}_{u,v}$ bezeichne die Klasse aller konvexen Rotationskörper mit festem vorgegebenem u bzw. mit festen u, v. Um Komplikationen zu vermeiden, verabreden wir noch, dass Grössen aus den Gruppen D, Δ und r, l nicht gemischt werden sollen. So ergibt sich der

Satz: *Die einzigen Klassen, in welchen das Volumen der Kugel nicht extremal ist, sind die folgenden:*

$$1.\ \mathfrak{K}_{r,Q};\quad 2.\ \mathfrak{K}_{l,Q};\quad 3.\ \mathfrak{K}_{r,l;Q};\quad 4.\ \mathfrak{K}_{r,L};\quad 5.\ \mathfrak{K}_{l,L};\quad 6.\ \mathfrak{K}_{r,l;L}.$$

Beweis: a) Dass das Volumen der Kugel in den Klassen $\mathfrak{K}_F$, $\mathfrak{K}_M$, $\mathfrak{K}_{F,M}$, $\mathfrak{K}_D$, $\mathfrak{K}_\Delta$, $\mathfrak{K}_{D,\Delta}$ extremal ist, ist bekannt (ebenso für $\mathfrak{K}_{F,\Delta}$, $\mathfrak{K}_{F,D}$, $\mathfrak{K}_{M,\Delta}$, $\mathfrak{K}_{M,D}$).

b) Der *Kegelstumpf* mit $R = 1$, $r = (\pi - 2)/2$, $Q = \pi$ besitzt das Volumen

$$V = \frac{\pi}{6}(\pi^2 - 2\pi + 4) < \frac{4\pi}{3}.$$

Der *Zylinderkegel* mit dem Zylinderradius $r = 1$, der Gesamthöhe $h = 2$ sowie der Zylinderhöhe $x = \pi - 2$ besitzt den Meridianschnitt $Q = \pi$ und das Volumen

$$V = \frac{2\pi}{3}(2\pi - 3) > \frac{4\pi}{3}.$$

Das Kugelvolumen ist also in der Klasse $\mathfrak{K}_{r,l;Q}$ nicht extremal. Da die betrachteten Vergleichskörper auch den Klassen $\mathfrak{K}_{r,Q}$ sowie $\mathfrak{K}_{l,Q}$ angehören, gilt die Aussage auch für diese Klassen.

c_1) Der *symmetrische Doppelkegel* mit $r = 1$, $l = 2$ besitzt die Länge der Meridiankurve $L_1 = 2\sqrt{2} < \pi$, der einfache Kegel mit gleichgrossem r und l die Länge der Meridiankurve $L_2 = 1 + \sqrt{5} > \pi$. Beide Körper sowie die ganze einparametrige Schar von interpolierenden *unsymmetrischen Doppelkegeln* weisen das Volumen $2\pi/3 < 4\pi/3$ auf. Es gibt also einen unsymmetrischen Doppelkegel mit $L = \pi$ und $V < 4\pi/3$. Somit besitzt die Kugel in $\mathfrak{K}_{r,l;L}$ nicht kleinstes Volumen.

c_2) Als Variationsproblem hat man

$$\int (y^2 + \lambda\sqrt{1 + y'^2})\, dx = \text{Extremum}$$

mit der Eulerschen Differentialgleichung

$$2y - \lambda y''(1 + y'^2)^{-3/2} = 0.$$

Nach zweimaliger Integration ergibt sich

$$x + \beta = \int \frac{(\alpha - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (\alpha - y^2)^2}},$$

und ein Kreisbogen resultiert auch im Spezialfall $\alpha = \lambda$ nicht. Die Kugel besitzt also in der Klasse $\mathfrak{K}_{l,L}$ auch nicht maximales Volumen.

Die Freilassung der Körperenden sowie die Beschränkung der maximalen Ordinate lässt die Eulersche Differentialgleichung invariant, so dass der Ausdehnung der Aussage auf die Klassen $\mathfrak{K}_{r,L}$ und $\mathfrak{K}_{l,r;L}$ nichts im Wege steht.

Aufgabe 319. Man zeige, dass in den Dreiecken, für die das Seitenverhältnis $\lambda = c/a$ einen konstanten Wert $(1 < \lambda < 2)$ hat, die aus den entsprechenden Gegenwinkeln gebildete Summe $\sigma = \gamma + 2\alpha$ dann und nur dann maximal ist, wenn $\operatorname{tg}\gamma + 2\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Setzt man $\tau = (\alpha - \beta)/2 = (\sigma - \pi)/2$, so gilt für das Maximum der Winkeldifferenz $\alpha - \beta$

$$\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\tau_{max}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma_{max} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{4 - \lambda^2}}.$$

R. Rose, Saarbrücken

Lösung: Es sei $x = \sin\alpha$. Nach dem Sinussatz ist wegen $\lambda = c/a$ $\sin\gamma = \lambda\sin\alpha = \lambda x$. Die Funktion $\sigma = 2\alpha + \gamma = 2\arcsin x + \arcsin\lambda x$ soll ein Maximum haben. Dazu ist

notwendig, dass

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}} = 0. \tag{1}$$

Wegen

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\lambda x}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}} = \operatorname{tg}\gamma$$

ist dies aber gerade die Bedingung $\operatorname{tg}\gamma + 2\operatorname{tg}\alpha = 0$. Wir zeigen nun, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Infolge der Voraussetzung über λ ist offenbar α spitzer und γ stumpfer Winkel, also ist in (1) der erste Summand positiv, der zweite negativ. Differenziert man die linke Seite von (1), so folgt

$$\sigma''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{1-x^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2 x^2}} \cdot \frac{\lambda^2 x}{1-\lambda^2 x^2}. \tag{2}$$

Wegen $1 < \lambda < 2$ gilt

$$\frac{\lambda^2 x}{1-\lambda^2 x^2} = \frac{x}{\lambda^{-2} - x^2} > \frac{x}{1-x^2} > 0. \tag{3}$$

Ist nun (1) erfüllt, so haben die ersten Faktoren in den Summanden der rechten Seite von (2) denselben Betrag. Wegen (3) hat also der zweite Summand der rechten Seite von (2) einen grösseren Betrag als der erste. Da der zweite Summand negativ ist, ist $\sigma''(x) < 0$, und es liegt ein Maximum vor.

Die am Schluss der Aufgabe angegebene Beziehung lässt sich einfach nachweisen. Aus (1) folgt nämlich

$$\sin\alpha_{max} = x_{max} = \sqrt{\frac{4-\lambda^2}{3\lambda^2}}, \qquad \sin\gamma_{max} = \lambda x_{max} = \sqrt{\frac{4-\lambda^2}{3}}.$$

Hiermit lassen sich sowohl $\operatorname{tg}\gamma_{max}/2$ wie auch $\operatorname{ctg}\tau_{max}$ mittels bekannten trigonometrischen Formeln berechnen.

H. Meili, Winterthur

Weitere Lösungen sandten J. Berkes (Szeged), L. Kieffer (Luxemburg), F. Leuenberger (Zuoz), R. Whitehead (Camborne, England).

Aufgabe 320. 1. n und d sind natürliche Zahlen, r eine ganze Zahl. Weiter ist

$$S(n, d, r) = \sum \binom{n}{k}, \qquad k \equiv r \pmod{d},$$

wo die Summe nur über das Intervall $0 \leqq k \leqq n$ zu erstrecken ist. Dann gilt die Formel

$$S(n, d, r) = \frac{2^n}{d} \sum_{t=0}^{d-1} \cos\left\{(n-2r)\frac{t\pi}{d}\right\} \left(\cos\frac{t\pi}{d}\right)^n.$$

2. Die Zahlenfolge v_n ist durch

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 3, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

bestimmt. Dann gilt, wenn x aus $2x \equiv n \pmod 5$ bestimmt ist,

$$S(n, 5, r) = \begin{cases} \frac{1}{5}[2^n + (-1)^n 2 v_n] & r \equiv x \pmod 5, \\ \frac{1}{5}[2^n + (-1)^n v_{n-1}] & r \equiv x \pm 1 \pmod 5, \\ \frac{1}{5}[2^n - (-1)^n v_{n+1}] & r \equiv x \pm 2 \pmod 5. \end{cases}$$

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

Lösung: 1. Es sei $\zeta = e^{2\pi i/d}$. Dann gilt

$$\sum_{t=0}^{d-1} \zeta^{t(s-r)} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } s \not\equiv r \pmod{d}, \\ d \text{ wenn } s \equiv r \pmod{d}. \end{cases}$$

Also ist

$$S = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \sum_{t=0}^{d-1} \zeta^{t(s-r)} = \frac{1}{d} \sum_{t=0}^{d-1} \zeta^{-tr} (1+\zeta^t)^n.$$

Nun ist

$$1 + \zeta^t = \zeta^{t/2} (\zeta^{t/2} + \zeta^{-t/2}) = 2\, \zeta^{t/2} \cos \frac{\pi t}{d}.$$

Also folgt

$$S = \frac{2^n}{d} \sum_{t=0}^{d-1} \zeta^{(n-2r)t/2} \left(\cos \frac{\pi t}{d}\right)^n.$$

Da S reell ist, müssen sich die imaginären Glieder wegheben, und es ergibt sich

$$S = \frac{2^n}{d} \sum_{t=0}^{d-1} \cos\left\{(n-2r)\frac{t\pi}{d}\right\} \left(\cos \frac{t\pi}{d}\right)^n = S(n, d, r).$$

J. Cigler, Wien

2. If

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = 3, \qquad v_n = v_{n-1} + v_{n-2},$$

then

$$v_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = (-1)^n \left\{\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^n + \left(2\cos\frac{4\pi}{5}\right)^n\right\}.$$

On the other hand

$$\begin{aligned} 5\,S(n, 5, r) &= 2^n + 2^n \sum_{t=1}^{4} \cos\left\{(n-2r)\frac{t\pi}{5}\right\} \left(\cos\frac{t\pi}{5}\right)^n \\ &= 2^n + 2\cos\left\{(n-2r)\frac{2\pi}{5}\right\} \left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^n \\ &\quad + 2\cos\left\{(n-2r)\frac{4\pi}{5}\right\} \left(2\cos\frac{4\pi}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

Hence, we get

$$5\,S(n, 5, r) = \begin{cases} 2^n + (-1)^n\, 2\, v_n & \text{for } n \equiv 2r \pmod{5}, \\ 2^n - (-1)^n\, v_{n+1} & \text{for } n \equiv 2r \pm 1 \pmod{5}, \\ 2^n + (-1)^n\, v_{n-1} & \text{for } n \equiv 2r \pm 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

L. Carlitz, Durham, N. C. (USA)

L. Carlitz bemerkt, dass eine zur Schlussformel in Lösung 1 ähnliche Formel im Amer. math. Monthly *53*, 344–346 (1946), erschienen ist und dass allgemeinere Formeln dieser Art in den R. C. Mat. [V] *16*, 74–95 (1957), zu finden sind. J. Cigler beweist die Aussage in Lösung 2 mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 321. Dans un tétraèdre, si l'on prolonge les arêtes issues d'un même sommet de k fois leurs longueurs au-delà des faces opposées, k étant un nombre entier, le rapport de la somme des puissances de chacun des douze points obtenus par rapport à la sphère décrite sur l'arête opposée à celle sur laquelle il est situé, comme diamètre, et de la somme des carrés des arêtes, est une somme de deux carrés consécutifs.

V. Thebault, Tennie, Sarthe (France)

Solution: Let $VABC$ be the given tetrahedron with edges VA, VB, VC, BC, CA, AB of lengths a, b, c; u, v, w respectively; M is the midpoint of BC, MN of length x is perpendicular to VA. $\overline{VM} = p$ and $\overline{AM} = q$ are the medians of ΔVBC and ΔABC respectively. The points P and Q are on the extension of the edge VA: $\overline{QA} = k\,a$, $\overline{QV} = (k+1)\,a$, $\overline{PV} = k\,a$, $\overline{PA} = (k+1)\,a$. Then, by PYTHAGORAS, $\overline{VN} = \sqrt{p^2 - x^2}$, $\overline{AN} = \sqrt{q^2 - x^2}$ and so $\sqrt{p^2 - x^2} + \sqrt{q^2 - x^2} = a$.

Therefore the sum S_a of the powers of P and Q with respect to the sphere on BC as diameter is

$$S_a = \left[\overline{PN}^2 + \overline{NM}^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2\right] + \left[\overline{QN}^2 + \overline{NM}^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]$$

$$= [k\,a + \sqrt{p^2 - x^2}]^2 + x^2 - \frac{u^2}{4} + [k\,a + \sqrt{q^2 - x^2}]^2 + x^2 - \frac{u^2}{4}$$

$$= 2\,k^2\,a^2 + 2\,k\,a^2 + p^2 + q^2 - \frac{u^2}{2}.$$

But from ΔVBC and ΔABC we have

$$b^2 + c^2 = 2\,p^2 + \frac{u^2}{2}, \qquad v^2 + w^2 = 2\,q^2 + \frac{u^2}{2},$$

hence

$$S_a = 2\,k^2\,a^2 + 2\,k\,a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - u^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}.$$

By cyclic permutation of a, b, c and u, v, w we get

$$S_a + S_b + S_c = (2\,k^2 + 2\,k + 1)\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$S_u + S_v + S_w = (2\,k^2 + 2\,k + 1)\,(u^2 + v^2 + w^2).$$

Hence the required ratio is

$$2\,k^2 + 2\,k + 1 = (k+1)^2 + k^2.$$

R. WHITEHEAD, St. Ives, Cornwall (England)

Weitere Lösungen sandten J. BREJCHA (Brno) und R. LAUFFER (Graz).

Berichtigung zur Lösung der Aufgabe 308 [El. Math. *14*, 39–40 (1959)]:
Der Aufgabensteller teilt uns mit, dass der Ausdruck

$$\sum_{r>n} \frac{\{1, 2, \ldots, n\}}{\{1, 2, \ldots, r\}}$$

für allgemeines n nicht nach Null strebt. Hingegen verschwindet der Grenzwert, wenn man sich auf die Zahlen $n = p - 1$ (p Primzahl) beschränkt. Das genügt für den Beweis des behaupteten Satzes, wie die folgende Lösung des Aufgabenstellers zeigt:

Es seien a und b ganze Zahlen und

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{1, 2, \ldots, n\}}. \tag{*}$$

Wir benützen, dass $\liminf p_{k+1}/p_k = 1$ und $p_{r+1} - p_r < p_r$, wo p_k die k-te Primzahl bedeutet. Für ein genügend grosses p_k gilt $p_{k+1} < p_k + p_k/2\,b$. Multiplizieren wir beide Seiten von (*) mit $\{1, 2, \ldots, p_k - 1\} \cdot b$, dann ergibt sich links eine ganze Zahl G, und

man hat

$$G = \sum_{n=p_k}^{\infty} \frac{b\{1, 2, \dots, p_k - 1\}}{\{1, 2, \dots, n\}} < b\left[\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k} + \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_k p_{k+1}} + \frac{p_{k+3} - p_{k+2}}{p_k p_{k+1} p_{k+2}} + \cdots\right]$$

$$< b\left[\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k} + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k p_{k+1}} + \cdots\right] < \frac{1}{2} + b\left[\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k p_{k+1}} + \cdots\right] < \frac{1}{2} + \frac{b}{p_k - 1}.$$

Für $p_k > 2b + 1$ wird also $G < 1$, und aus diesem Widerspruch folgt, dass die rechte Seite von (*) eine irrationale Zahl darstellt.

Neue Aufgaben

358. Man berechne

$$S_n = \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n)^n,$$

wo $a_1, a_2, \dots, a_n$ Grössen eines kommutativen Ringes sind und $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ alle 2^n verschiedenen Variationen mit Wiederholung zur n-ten Klasse der Zahlen $+1, -1$ durchläuft. RUDOLF STEUERWALD, Alzing (Deutschland)

359. Find the number of solutions of the congruence

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) \cdots \left(x^2 - \frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

where p is an odd prime. L. CARLITZ, Durham, N. C. (USA)

360. Es sei e die Eckenanzahl und r der Umkugelradius eines regulären oder halbregulären Polyeders P_e, ferner sei S_e die Quadratsumme sämtlicher Kanten und Diagonalen von P_e. Man beweise, dass

$$S_e = e^2 r^2.$$

J. SCHOPP, Budapest

361. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und dem Höhenschnittpunkt H. Wir bezeichnen seine Höhenfusspunkte mit H_a, H_b, H_c, die Fusspunkte der aus diesen Punkten auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit $H_{ab}, H_{ac}, H_{bc}, H_{ba}, H_{ca}, H_{cb}$ und die 12 Fusspunkte der aus diesen Punkten erneut auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit H_{pqr}. Hier gibt H_{pq} $(p, q = a, b, c)$ jeweils den Ausgangspunkt an; r bezeichnet die Dreiecksseite, auf die das Lot gefällt wurde. Es soll gezeigt werden:

1. *Die Quadrupel $H_{cab} H_{cba} H_{aba} H_{bab}$ usw. sind jeweils die Ecken von Kreisvierecken, deren Mittelpunkte A^*, B^*, C^* seien.*
2. *Die Höhen des Dreiecks $A^*B^*C^*$ gehen bzw. durch die Ausgangspunkte A, B, C.*

KARL WANKA, Wien

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Wenn sich beim Verkauf einer Ware ein Gewinn von $p\%$ des *Ankaufs* oder von $q\%$ des *Verkaufs* ergibt, so gilt stets

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{100}.$$

2. Die Zahl $xy243z$ mit den drei zu bestimmenden Ziffern x, y und z soll ohne Rest durch 396 teilbar sein.

▶ 432432; 392436.

3. Welches ist die Summe aller Zahlen, die sich durch Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen?
   ▶ Jede Ziffer steht sechsmal an jeder Stelle, also ist die Summe gleich 66660.

4. a) Die letzte Ziffer der neunten Potenz irgendeiner Zahl ist gleich der letzten Ziffer dieser Zahl.
   b) Welches sind die zwei letzten Ziffern von 2^{999} und von 3^{999}?
   ▶ 88 und 67. Die zwei letzten Ziffern aufeinanderfolgender Potenzen von 2 und von 3 weisen je eine Periode von 20 Gliedern auf.

5. m und n sind zwei teilerfremde Zahlen. Eine Strecke $AB = a$ wird in m gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte werden mit Nullen bezeichnet. Dann wird dieselbe Strecke in n gleiche Teile geteilt, die Teilpunkte bezeichnet man mit Kreuzen. Welches ist der kürzeste Abstand einer Null von einem Kreuz (abgesehen vom Abstand 0 in den Endpunkten)?
   ▶ $a/m\,n$.

Literaturüberschau

R. P. Boas jun. et R. Creighton Buck:
Polynomial Expansions of Analytic Functions
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, nouvelle série, volume 19.
Springer Verlag, Berlin, Göttingen et Heidelberg 1958

I. *Introduction.* II. *Représentation de fonctions entières.* III. *Représentation de fonctions régulières à l'origine.* IV. *Applications. Bibliographie. Index.*

Les polynomes définis par des fonctions génératrices possèdent des propriétés qui rendent leur étude à la fois intéressante et féconde; quoique ancienne, cette théorie a donné lieu, dans ces dernières années, à de nombreuses recherches dont ce petit ouvrage donne un excellent aperçu: on y trouvera notamment de nombreuses suggestions pour des recherches nouvelles. Ch. Blanc

Fumitomo Maeda: *Kontinuierliche Geometrien*
Übersetzt und für die deutsche Ausgabe bearbeitet von: Sibylla Crampe, Günter Pickert und Rudolf Schauffler. X + 244 Seiten. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 95. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958

Der Begriff «Geometrie» hat sich im Laufe der Entwicklung der Mathematik immer mehr erweitert. Einerseits ergaben sich viele Ausdehnungen des Begriffes als Folge der axiomatischen Methode, indem man nämlich nicht nur versuchte, für das, was man ursprünglich unter Geometrie verstand, ein vollständiges Axiomensystem aufzustellen, sondern auch solche mathematische Systeme untersuchte, welche nur einem Teil der betrachteten Axiome genügen; also indem man gewisse Axiome fallen liess oder allenfalls durch andere ersetzte, wodurch man «allgemeinere Geometrien» erhielt, bzw. Systeme, welche dem der Geometrie verwandt sind und daher auch «Geometrien» genannt wurden.

Anderseits fand man Beziehungen der Geometrie zu anderen, selbständigen Gebieten der Mathematik. Als man zum Beispiel entdeckte, dass es in einer beliebigen projektiven Geometrie Konstruktionen gibt, welche aus den Punkten einer Geraden einen Körper machen, gelangte man zur Erkenntnis, dass man jeder projektiven Geometrie einen Körper zuordnen kann und dass umgekehrt jede projektive Geometrie (bestimmter Dimension) durch den zugehörigen Körper vollständig bestimmt ist, wodurch ein enger Zusammenhang zwischen Körpertheorie und projektiver Geometrie offenbar wurde.

Ein ähnlicher Zusammenhang, bestehend zwischen projektiver Geometrie und Verbandstheorie, ist grundlegend für den Inhalt des vorliegenden Buches. Ordnet man nämlich die Gesamtheit der linearen Teilräume einer projektiven Geometrie durch die mengen-