# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 3

PDF erstellt am: **02.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

et, généralement

$$\varliminf_{n=\infty} \frac{\overbrace{\sigma\,\sigma\ldots\sigma}^{k\text{ fois}}(n)}{n} < +\infty .$$

Je ne connais pas la réponse à ce problème, mais je pense qu'elle est positive.

A. SCHINZEL

# Kleine Mitteilungen

## Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des $n$-dimensionalen Simplex

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt $P$ des $n$-dimensionalen Simplex $A_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in $B_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Bezeichnen wir mit $R_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Strecke $\overline{PA_i}$, mit $d_i$ die Strecke $\overline{PB_i}$, so gilt bekanntlich[1]) die Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geqq \frac{n\,(x_1 \cdots x_{i-1}\, x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i},$$

wenn man die entsprechenden baryzentrischen Koordinaten von $P$ bezüglich der Simplexeckpunkte mit $x_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ bezeichnet. Nach einfacher Umformung folgt aus obiger Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geqq \frac{n\left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{1/n}}{x_i^{(n+1)/n}}. \tag{1}$$

Sei nun

$$S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{1_i} \cdots d_{i_k}} \qquad (i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n+1), \tag{2}$$

dann gilt die folgende Ungleichung:

$$S_k \geqq \binom{n+1}{k} n^k. \tag{3}$$

*Beweis:* Wendet man die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf (2) an, so folgt, dass

$$S_k \geqq \binom{n+1}{k} \left( \prod_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{1_i} \cdots d_{i_k}} \right)^{1/\binom{n+1}{k}}, \qquad (i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n+1), \tag{4}$$

da die Gliederanzahl von $S_k$ sich als die Anzahl der Kombinationen $k$-ter Ordnung aus $n+1$ Elementen ergibt.

Aus (1) folgt, dass

$$\frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \geqq \frac{n^k \left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{k/n}}{\left(\prod\limits_{i=i_1}^{i_k} x_i\right)^{(n+1)/n}}. \tag{5}$$

---

[1]) J. SCHOPP, *Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalen Raum*, El. Math. *13*, 106–107 (1958).

Setzt man (5) in (4) ein, so erhält man

$$S_k \geqq \binom{n+1}{k} n^k \left[ \frac{\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\binom{n+1}{k} k/n}}{\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\binom{n}{k-1} (n+1)/n}} \right]^{1/\binom{n+1}{k}},$$

da im Nenner der Faktor $x_i^{(n+1)/n}$ $\binom{n}{k-1}$-mal – als die Anzahl der Kombinationen $(k-1)$-ter Ordnung aus $n$ Elementen – vorkommt. Der in der Eckklammer befindliche Ausdruck ist aber gleich eins, womit (3) bewiesen ist.

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn sämtliche $x_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ gleich sind, also wenn $P$ der Schwerpunkt des Simplex ist. Die Ungleichung (3) ist für den Fall $k = n+1$ bekannt[1]). Für $k = 1$ gab unlängst THÉBAULT in den Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ einen einfachen geometrischen Beweis und vermutet für beliebige Dimensionen die oben bewiesene Tatsache, dass $S_1 \geqq n\,(n+1)$ [2]).

Bezeichnen wir mit $r_i$ den Abstand des inneren Punktes $P$ vom der Simplexspitze $A_i$ gegenüberliegenden Grenzsimplex, so gilt $r_i \leqq d_i$.

Sei nun

$$S_k^* = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{r_{i_1} \cdots r_{i_k}} \qquad (i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n+1), \tag{6}$$

so folgt aus (3) unmittelbar, dass auch

$$S_k^* \geqq \binom{n+1}{k} n^k. \tag{7}$$

J. SCHOPP, Budapest

## Bemerkungen zur Arbeit von F. Leuenberger über «Einige Dreiecksungleichungen» [1])

Ein Dreieck mit den Seiten $a_i$ und den zugehörigen Höhen $h_i$ $(i = 1, 2, 3)$ habe den Inkreisradius $\varrho$. Dann gilt nach LEUENBERGER:

**Lemma 1:**

$$9\,\varrho \leqq \sum_{i=1}^{3} h_i.$$

Eine Verfeinerung dieses Lemmas ist das folgende

**Lemma 1*:**

$$3\,\varrho \leqq \left(\prod_{i=1}^{3} h_i\right)^{1/3}.$$

Setzen wir

$$G(h_i) = \left(\prod_{i=1}^{3} h_i\right)^{1/3}$$

und

$$A(h_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} h_i$$

---

[2]) V. THÉBAULT, *Notes de géometrie élémentaire*, Suppl. à Mathesis Nos 9–10, 1–4 (1958).

[1]) El. Math. *13*, 121–126 (1958).

so folgt Lemma 1 aus Lemma 1*:

$$3\,\varrho \leqq G(h_i) \leqq A(h_i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} h_i$$

*Beweis des Lemmas 1*:* Ist $r_i$ der Abstand eines beliebigen inneren Punktes $O$ von $a_i$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{r_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i r_i}{a_i h_i} = 1, \qquad \frac{1}{3} = A\left(\frac{r_i}{h_i}\right) \geqq G\left(\frac{r_i}{h_i}\right) = \left(\prod_{i=1}^{3}\frac{r_i}{h_i}\right)^{1/3}.$$

Für $r_1 = r_2 = r_3 = \varrho$ ergibt sich $3\,\varrho \leqq G(h_i)$.

Das Gleichheitszeichen ist nur für das gleichseitige Dreieck gültig.

Ist $m_i$ die Halbierende der Seite $a_i$ und $r$ der Umkreisradius, so ist nach LEUENBERGER:

**Lemma 2:**

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq \frac{9\,r}{2}.$$

Ein einfacherer Beweis gibt folgende Verfeinerung:

**Lemma 2*:**

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq 3\,r\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i} \leqq \frac{9}{2}\,r.$$

Bekanntlich gilt:

$$4\,m_i^2 = 2\,(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) - a_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und

$$\sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 3\,r^2\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i. \tag{1}$$

Ferner ist

$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3$$
$$= 2 - \left[\cos\alpha_1 - \frac{1}{2}\cos(\alpha_2 - \alpha_3)\right]^2 + \frac{1}{4}\cos^2(\alpha_2 - \alpha_3) \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi).$$

Aus dieser Identität kann man sehen, dass das Maximum von

$$\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_1$$

erreicht wird für

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = 1, \qquad \cos\alpha_1 = \frac{1}{2}\cos(\alpha_2 - \alpha_3),$$

das heisst für

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 = 60°.$$

Der Maximumswert ist $2 + 1/4 = 9/4$.

Andererseits haben wir nach der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} m_i^2}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt Lemma 2*.

Nach Lemma 1* und 2* haben wir den verfeinerten zentralen Satz:

$$9\,\varrho \leqq 3\left(\prod_{i=1}^{3} h_i\right)^{1/3} \leqq \sum_{i=1}^{3} h_i \leqq 3\,r\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i} \leqq \frac{9}{2}\,r.$$

Anstelle von $\Sigma h_i$, $\Pi h_i$ darf $\Sigma m_i$, $\Pi m_i$ oder $\Sigma w_i$, $\Pi w_i$ gesetzt werden ($w_i$ ist die Halbierende des Winkels $\alpha_i$).

Gleichheit herrscht in jedem Falle im regulären Dreieck und nur in diesem.

J. BERKES, Szeged

## Rekursive Definition der Determinante

Die Determinante einer Matrix kann bekanntlich auf verschiedene Arten erklärt werden. In der einschlägigen Literatur werden vor allem zwei Definitionen bevorzugt. Die eine, auf LEIBNIZ und CRAMER zurückgehende, erklärt die Determinante als eine Summe von kombinatorisch zu bildenden Produkten aus Matrixelementen; die andere, die im wesentlichen von GRASSMANN und WEIERSTRASS stammt, setzt die Determinante als eine gewisse Funktion der Zeilenvektoren der Matrix an. Die letztere Definition ist unzweifelhaft die mathematisch tiefer gehende, setzt aber zu ihrem Verständnis eine einigermassen entwickelte Theorie der Vektorräume voraus. Die Leibnizsche Definition ist ganz elementar.

Eine der wichtigsten elementaren Formeln der Determinantenlehre ist diejenige, welche die Entwicklung der Determinante nach einer Reihe (Zeile oder Spalte) ausdrückt und durch welche die Berechnung einer Determinante $n$-ter Ordnung auf die von Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung zurückgeführt wird. Es liegt nun sehr nahe, diese Formel direkt zu einer rekursiven Definition der Determinante zu benützen. In einigen wenigen Werken findet sich tatsächlich eine solche Definition; die betreffenden Autoren schwenken jedoch sofort in die eine oder andere der beiden erstgenannten Erklärungen ein, ohne die Entwicklungsformel konsequent auszunützen (vgl. etwa v. MANGOLDT-KNOPP, *Einführung in die höhere Mathematik*, 11. Aufl. [1958], Bd. I, S. 65 ff.).

Es möge daher hier eine rekursive Definition der Determinante Platz finden. Sie hat den Vorteil, wie die Leibnizsche völlig elementar zu sein, zudem aber noch ohne kombinatorische Hilfsmittel auszukommen. Die Beweise der wichtigsten elementaren Sätze werden recht übersichtlich. Da es sich um ganz einfache Dinge handelt, mögen kurze Andeutungen genügen.

Sei $\|a_{rs}\|$ eine Matrix $n$-ter Ordnung; ihre Determinante $|a_{rs}|$ wird rekursiv nach $n$ folgendermassen erklärt:

$$n=1:\ |a_{11}| = a_{11}; \qquad n>1:\ |a_{rs}| = A_i = \sum_k (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, A_{i,k}$$

(Summationen von 1 bis $n$). Dabei ist $A_{i,k}$ die Determinante derjenigen Matrix $(n-1)$-ter Ordnung, die wie üblich aus $\|a_{rs}\|$ durch Streichung der $i$-ten Zeile und der $k$-ten Spalte hervorgeht. Die Vorzeichenfolge entspricht dem bekannten »Schachbrettmuster».

Damit diese Definition überhaupt einen Sinn hat, ist zu zeigen, dass die Zahlen $A_i$ vom Index $i$ unabhängig sind, das heisst, dass gilt:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n.$$

*Beweis:* Es wird vollständige Induktion nach $n$ angewendet. Für $n=1$ und für $n=2$ ist die Behauptung evident; sie sei bis $(n-1)$ als bewiesen angenommen und es werde nun gezeigt:

$$\sum_p (-1)^{1+p}\, a_{1p}\, A_{1,p} = \sum_k (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, A_{i,k} \qquad (i=2,3,\ldots,n). \tag{*}$$

Nach Induktionsannahme lässt sich entwickeln:

$$A_{i,k} = \sum_{p<k} (-1)^{1+p} a_{1p} B_{i1,kp} - \sum_{p>k} (-1)^{1+p} a_{1p} B_{i1,kp}.$$

Die $B_{i1,kp}$ bedeuten offenbar Determinanten von Matrizen $(n-2)$-ter Ordnung, denen die Zeilen $i$, 1 und die Spalten $k$, $p$ der ursprünglichen Matrix fehlen. Der Vorzeichenwechsel im zweiten Summanden rechts kommt dadurch zustande, dass sich infolge der fehlenden $k$-ten Spalte das «Schachbrettmuster» daselbst um ein Vorzeichen verschiebt.

Analog gilt

$$A_{1,p} = -\sum_{k<p} (-1)^{i+k} a_{ik} B_{1i,pk} + \sum_{k>p} (-1)^{i+k} a_{ik} B_{1i,pk}.$$

Man setze nun die beiden Entwicklungen in (*) ein und bestimme sowohl links als auch rechts den Koeffizienten eines festen $B$, zum Beispiel von $B_{i1,rs} = B_{1i,sr}$ $(r < s)$. Er ergibt sich auf beiden Seiten übereinstimmend zu

$$(-1)^{1+i+r+s} (a_{1r} a_{is} - a_{ir} a_{1s}).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen und die Definition der Determinante vollzogen. Ganz genau gleich lässt sich zeigen, dass auch die analoge Entwicklung nach einer der Spalten stets auf dasselbe Resultat führt.

Bei den Beweisen zweier wichtiger Sätze der elementaren Determinantenlehre wird meistens bis auf die Definition zurückgegangen: beim Laplaceschen Entwicklungssatz und beim Multiplikationssatz. Es seien deshalb ihre Beweise im Rahmen der hier gegebenen Definition kurz beschrieben.

Der Laplacesche Entwicklungssatz (Entwicklung einer Determinante nach $k$ Reihen) lässt sich mit derselben Methode beweisen wie sein soeben behandelter Spezialfall $k = 1$ (bei dessen Beweis übrigens der Fall $k = 2$ miterledigt wurde). Soll man etwa für eine Determinante $n$-ter Ordnung die Entwicklung nach $k+1$ gegebenen Zeilen nachweisen, so entwickle man sie zuerst nach der untersten dieser Zeilen. Die dabei auftretenden Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung können dann auf Grund einer Induktionsannahme nach den restlichen $k$ Zeilen entwickelt werden. Dadurch kommen Minoren $(n-k-1)$-ter Ordnung ins Spiel; deren Koeffizienten in der Gesamtentwicklung lassen sich – wieder unter Beachtung des «Schachbrettmusters» mit dem Sprung bei der fehlenden Spalte – leicht ermitteln und ergeben sich gemäss dem Laplaceschen Satze.

Der Multiplikationssatz erfordert ein etwas anderes Vorgehen. Gestützt auf die Entwicklungsformeln, lässt sich wie üblich das Verhalten der Determinante bei elementaren Umformungen der Matrix (Vertauschung und Linearkombination von Reihen) angeben. Der Matrizenrechnung entnimmt man nun den

**Satz:** *Jede Matrix lässt sich durch geeignete Vertauschung ihrer Spalten und Linearkombination ihrer Zeilen entweder in eine Matrix mit mindestens einer, aus lauter Nullen bestehenden Zeile oder in eine Diagonalmatrix mit von Null verschiedenen Diagonalgliedern überführen. Ihre Determinante wechselt dabei höchstens das Vorzeichen.*

Ist nun ein Matrizenprodukt $AB = C$ gegeben, so wende man das Verfahren des soeben formulierten Satzes auf $A$ an, wobei die nötigen Vertauschungen der Spalten von $A$ durch entsprechende Vertauschungen der Zeilen von $B$ kompensiert werden. Entstehen dadurch die Matrizen $A'$ und $B'$ mit dem Produkt $A'B' = C'$, so sieht man leicht ein, dass $\det C' = \det C$. Der Multiplikationssatz der Determinantenlehre folgt nun unmittelbar aus der Form von $A'$ und den Entwicklungsformeln. P. Wilker, Bern

# Aufgaben

**Aufgabe 313.** Man suche jene zu einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel $h$ konzentrischen Ellipsen $e$, die durch das Polarsystem von $h$ in sich übergehen. Charakterisiere eine solche Ellipse $e$; zeige ferner, dass die genannten Ellipsen eine einparametrige Mannigfaltigkeit bilden, und bestimme ihr Hüllgebilde. R. Bereis und H. Brauner, Wien