Über den Vektor

Autor(en): **Wilker, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 2

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20318

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Donc, *on peut déterminer sur le plan un nombre fini quelconque de points dont aucuns trois ne sont pas situés sur une même droite et tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux est entière.*

Cette proposition a été démontrée pour la première fois (par une voie un peu différente) en 1945 par W. H. ANNING et P. ERDÖS[1]). Les mêmes auteurs ont démontré[1]) que si l'on a sur le plan un ensemble infini de points dont tous deux ont une distance entière, tous ces points sont situés sur la même droite[2]). W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Über den Vektor

1. Jeder Mathematiker lernt im Laufe seiner Ausbildung den Begriff des Vektors in den verschiedensten Gestalten kennen. Da wird anfänglich der Vektor als eine gerichtete Strecke (Pfeil) eingeführt, mit der gewisse einfache Operationen ausgeführt werden können. Der Physiker neigt vielleicht dazu, den Vektor als ein Gebilde zu betrachten, das eine Grösse und eine Richtung besitzt, manche Mathematiker definieren ihn lieber als das Symbol einer Translation des Raumes. Bei der Definition durch den Pfeil unterscheidet man gewöhnlich zwischen dem gebundenen Vektor, der in einem ganz bestimmten Punkt angreift, und dem freien Vektor, der im Raum herumgleiten kann. Dem Vektor gegenübergestellt wird dann der Skalar, der keine Richtung, sondern nur Grösse besitzt oder einfach eine Zahl schlechthin bedeutet.

Im Anschluss an die einfachen algebraischen Rechenoperationen mit Vektoren treten die Produkte auf, in erster Linie das Skalarprodukt, das Vektorprodukt und das Volumprodukt, die der Reihe nach einen Skalar, einen Vektor und wieder einen Skalar liefern.

In einer etwas höheren Stufe tritt vor allem die Physik mit einer neuen Unterscheidung hervor, mit der Unterscheidung von polaren und axialen Vektoren. Die letzteren sind nicht durch einen Richtungs-, sondern durch einen Schraubungssinn gekennzeichnet. Beispiele liefern etwa der Gradient eines Skalarfeldes, der ein polarer, und die Rotation eines Vektorfeldes, die ein axialer Vektor ist. Rückblickend erkennt man, dass das Vektorprodukt unter Umständen als ein axialer Vektor aufgefasst werden muss. Manchmal wird folgerichtig die nämliche Unterscheidung bei den Skalaren vorgenommen. Das Skalarprodukt würde dann einer Art «polarem», das Volumprodukt einem «axialen» Skalar entsprechen.

Bei der weitergehenden Analyse des Vektorbegriffs tritt ein neuer Gesichtspunkt hinzu: das Verhalten der Skalare und Vektoren bei Koordinatentransformationen und die sich daraus ergebende Unterscheidung von kontravarianten und kovarianten Vektoren. Manchmal werden nicht die Vektoren, sondern ihre Komponenten unterschieden, und man spricht von kovarianten oder kontravarianten Komponenten ein und desselben Vektors. Es zeigt sich, dass axiale Vektoren gar keine richtigen Vektoren, «axiale» Skalare keine eigentlichen Skalare sind. Die neu gewonnenen Methoden führen dann zu den Tensoren, als deren Spezialfälle Skalare und Vektoren erscheinen.

---

[1]) W. H. ANNING et P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 598–600 (1945). Voir aussi H. HADWIGER, El. Math. *13*, 85 (1958), où se trouve la littérature ultérieure.

[2]) Voir aussi P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 996 (1945), et E. TROST, El. Math. *6*, 59-60 (1951).

2. Aus dieser Aufzählung ergibt sich, dass im Vektorbegriff mehr zu stecken scheint, als der einfache Pfeil der Elementargeometrie vermuten lassen könnte. Die folgenden Ausführungen erheben nicht den Anspruch, dem Begriff des Vektors voll gerecht zu werden, sondern sollen einen Beitrag zu seinem Verständnis darstellen, von einer ganz bestimmten Warte aus gesehen.

Zu dieser Warte führt die Erläuterung des Begriffs «Unabhängigkeit vom Koordinatensystem». Diese Unabhängigkeit wird für gewöhnlich als ein bedeutender Vorzug der Vektorrechnung hingestellt, doch darf ihr Sinn nicht missverstanden werden. Man kann freilich rein elementargeometrisch eine Vektorrechnung aufbauen, ohne Koordinatensysteme, also ohne die Hilfsmittel der analytischen Geometrie in Anspruch nehmen zu müssen, doch sollte man dann besser von einer «Pfeilrechnung» sprechen. Die Sachlage ändert sich bei Verwendung analytisch-geometrischer Methoden. Zwar pflegt man auch dann eine geeignete Symbolik zu schaffen, die es gestattet, die Operationen der Vektorrechnung anzuschreiben, ohne explizite von Koordinaten zu sprechen. Darin spiegelt sich aber nur der mit Vektoren mögliche algebraische Kalkül. Bei der eigentlichen Definition des Vektors kommt man um die Wahl von Koordinatensystemen nicht herum. Dies zeigt sich besonders bei der Übertragung der Vektorrechnung auf allgemeinere (krummlinige) Koordinaten, wo die Definition durch den Pfeil sinnlos wird und durch eine auf Koordinaten Bezug nehmende Definition ersetzt werden muss. Tensoren können kaum elementargeometrisch eingeführt werden, da ihnen keine einfachen Bilder im Raum zukommen; ein Vektor ist aber der Spezialfall eines Tensors.

Unabhängigkeit vom Koordinatensystem kann also nicht bedeuten, dass man Koordinaten überhaupt nicht zu erwähnen brauchte oder dass die zu behandelnden Grössen mit Koordinaten gar nichts zu tun hätten. Diese gehen ja schon in ihre Definition ein (vgl. dazu auch [1][1]), 1. Teil, Seiten 5ff.). Viel näher an den eigentlichen Tatbestand führt eine andere Art der Unabhängigkeit vom Koordinatensystem. Ein grundlegender Satz der Vektorrechnung besagt, dass, falls ein bestimmter Ausdruck aus Vektoren gleich dem Nullvektor ist, dies für jedes Koordinatensystem gilt. «Unabhängig vom Koordinatensystem» bedeutet hier: «In gleicher Weise für alle Koordinatensysteme.» In dieser (noch genauer zu umschreibenden) Gleichartigkeit liegt das eigentliche Wesen der analytischen Methode in der Geometrie: Alles, was den Raum betrifft, wird über Koordinatensysteme der Rechnung zugeführt – eine Eigenschaft des Raumes aber hat geometrische Bedeutung, wenn sie gilt, ganz gleich welches Koordinatensystem zu ihrer Begründung verwendet wurde.

Gestützt auf diese Erkenntnisse, lässt sich eine leistungsfähige, im übrigen wohlbekannte Begründung des Vektorbegriffs geben, die im folgenden kurz angedeutet werden soll.

3. Den nachstehenden Ausführungen liege der elementare affine Raum von n Dimensionen zugrunde, also der euklidische Raum unter Nichtbeachtung der Metrik, der *geometrischer Raum* heissen möge. Er soll vorderhand als bekannt vorausgesetzt werden; auf die Frage seiner Grundlegung wird noch einzugehen sein (Abschnitt 13). Daneben werde der *arithmetische Raum* R^n betrachtet, das heisst die Menge aller geordneten n-tupel reeller Zahlen $(x^1, \ldots, x^n)$.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 37.

Die Beziehung zwischen den beiden Räumen wird durch Koordinatensysteme hergestellt. Ein *Koordinatensystem* (K'system) ist eine eineindeutige Abbildung einer gewissen Punktmenge des geometrischen Raumes auf eine Menge des arithmetischen Raumes. Die erste der beiden Mengen heisst geometrischer, die zweite arithmetischer Bereich des K'systems. Haben zwei K'systeme denselben geometrischen Bereich, so vermitteln sie in leicht erkenntlicher Weise eine eineindeutige Abbildung ihrer arithmetischen Bereiche aufeinander, welche die *Transformation* zwischen den beiden Systemen heisst.

Unter allen möglichen K'systemen sind aber nur die Mitglieder einer gewissen Klasse zugelassen, die es genau zu umschreiben gilt. Es ist das Verdienst VEBLENS und WHITEHEADS [5], hierbei durch die Begründung der «Koordinatengeometrie» klare Verhältnisse geschaffen zu haben. Diese Disziplin stellt K'systeme in den Mittelpunkt ihrer Betrachtungen und definiert geradezu den Charakter einer geometrischen Theorie durch die Wahl einer Klasse «*ausgezeichneter*» K'systeme, eine Wahl, die auf axiomatischem Wege erfolgt. So ist die hier interessierende affine Geometrie dadurch gekennzeichnet, dass ihre ausgezeichneten K'systeme erstens je den vollen geometrischen auf den vollen arithmetischen Raum abbilden und dass diese zweitens untereinander durch die Gruppe aller linearen Transformationen des R^n auf sich verknüpft sind. Es handelt sich natürlich um die üblichen (schiefwinkligen) K'systeme des affinen Raumes, die in der Folge selbst «*affin*» genannt werden sollen.

Nach der Wahl der ausgezeichneten können allgemein die zulässigen K'systeme definiert werden. Während die ersteren die zu behandelnde Geometrie kennzeichnen, dienen die sie umfassenden zulässigen K'systeme zur vollen Ausschöpfung der analytischen Methode (Arithmetisierung geometrischer Gebilde und Eigenschaften).

Vorerst einige Abkürzungen. Alle in der Folge auftretenden, lateinischen Indizes sind von 1 bis n laufend gedacht; kommen sie in der gleichen Formel doppelt vor, so ist über sie, wie üblich, zu summieren. Ist $\bar{x}^i = t^i(x^k)$ eine eineindeutige Transformation, welche arithmetische Elemente (x^i) in andere $(\bar{x}^i)$ überführt, und sind die Funktionen t^i differenzierbar, so werde

$$\frac{\partial t^i}{\partial x^k} = u^i_k, \qquad \frac{\partial^2 t^i}{\partial x^k \partial x^l} = u^i_{kl}$$

gesetzt. Für die nach Voraussetzung existierende Umkehrung $x^i = \bar{t}^i(\bar{x}^k)$ werde analog $\bar{u}^i_k$, $\bar{u}^i_{kl}$ definiert. u sei die Determinante det $\| u^i_k \|$, $\| v^i_k \|$ die inverse Matrix zu $\| u^i_k \|$ und v deren Determinante. Schliesslich bezeichne wie üblich δ^i_k oder δ_{ik} das Kronecker-Symbol.

Eine eineindeutige Abbildung im R^n, deren Abbildungsfunktionen mindestens einmal stetig differenzierbar sind und für die $u \neq 0$ im ganzen Definitionsbereich gilt, heisse *regulär*.

Nun kann die Klasse der «*zulässigen* K'systeme» durch zwei Angaben beschrieben werden: 1. Beschränkt man in einem ausgezeichneten (affinen) K'system den arithmetischen Bereich auf eine im üblichen Sinne offene Menge des R^n, so sei das entstehende K'system zulässig; 2. jede auf ein solches System angewandte, reguläre Koordinatentransformation führe wieder auf ein zulässiges K'system. Je nach der angestrebten Theorie muss dabei von den auftretenden Funktionen höhere als die

erste Ableitungsordnung verlangt werden. Im folgenden wird der Zusatz «zulässig» fortgelassen, da nur K'systeme dieser Art zur Verwendung kommen.

4. Neben die Punkte des geometrischen und die Elemente des arithmetischen Raumes treten nun noch die Elemente einer dritten Mannigfaltigkeit, welche mit den geometrischen Punkten einerseits und den K'systemen andererseits in Verbindung gebracht werden können. Sie heissen geometrische Objekte und genügen zwei Forderungen. Sei p ein geometrischer Punkt, K ein K'system über p. Ein «*geometrisches Objekt im Punkte p*» bestimmt in K ein geordnetes N-tupel reeller Zahlen $(a_1, \ldots, a_N)$, die «*Komponenten*» des Objekts bezüglich K. Dies gilt für jedes K'system über dem Punkt p (1. Forderung). Sei L ein anderes solches System und seien $(b_1, \ldots, b_N)$ die Komponenten des Objektes bezüglich L, dann sind die b_α Funktionen der a_α und der Ableitungen $u_k^i, u_{kl}^i, \ldots$ der Transformationsfunktionen von T bis zu einer gewissen Ordnung (2. Forderung):

$$b_\alpha = F_\alpha(a_1, \ldots, a_N;\ u_k^i, u_{kl}^i, \ldots) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N)\ ^{2)}. \tag{1}$$

Es ist von besonderer Wichtigkeit, darauf hinzuweisen, dass die Form der Funktionen F_α nicht von den K'systemen abhängt, sondern nur vom Objekt, was natürlich auch für die Zahl N zutrifft. So lauten zum Beispiel die Umkehrformeln zu (1): $a_\alpha = F_\alpha(b_1, \ldots, b_N;\ \bar{u}_k^i, \bar{u}_{kl}^i, \ldots)$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$. Die Gleichungen (1) sollen nachstehend die «*Verknüpfungsbeziehungen*» des geometrischen Objekts genannt werden. Die gegebene Definition erfüllt genau das im zweiten Abschnitt aufgestellte Programm: das geometrische Objekt wird in jedem K'system durch Zahlen festgelegt, und es wird gleichzeitig eine durchgängige Beziehung zwischen den einzelnen Festlegungen geschaffen, welche die Abhängigkeit von den K'systemen wieder ausschaltet. Die Koordinatenabhängigkeit spiegelt sich in den Komponenten, die Koordinatenunabhängigkeit in den universalen Funktionen F_α.

5. Nun können in der üblichen Weise die Vektoren eingeführt werden. Ein «*kontravarianter Vektor im Punkte p*» ist ein geometrisches Objekt mit $N = n$ Komponenten und mit den Verknüpfungsbeziehungen

$$\bar{r}^i = u_k^i\, r^k. \tag{2}$$

Dabei bedeuten die r^i die Komponenten des Vektors in einem K'system K über p, die $\bar{r}^i$ die entsprechenden Komponenten in einem andern K'system $\bar{K}$. Die Funktionen u_k^i sind für die Variablenwerte (p^i), die Koordinaten von p bei K, zu bilden.

Ganz analog wird der «*kovariante Vektor im Punkte p*» definiert. Er hat ebenfalls $N = n$ Komponenten, jedoch die Verknüpfungsbeziehungen

$$\bar{s}_i = v_i^k\, s_k. \tag{3}$$

Die Symbolik ist die gleiche wie bei (2).

Aus diesen Definitionen lassen sich bereits einige Erkenntnisse über die elementare Vektorrechnung gewinnen. Einmal ist ein Vektor stets an einen Punkt gebunden,

---

[2]) Für allgemeinere Definitionen des geometrischen Objekts vgl. [2, 3].

da in die Verknüpfungsbeziehungen die Koordinaten des Punktes vermöge der u_k^i oder der v_k^i eingehen. «Freie» Vektoren gibt es also vorderhand nicht. Operationen an verschiedenen Vektoren oder überhaupt an verschiedenen geometrischen Objekten können nur im gleichen Punkt vorgenommen werden, was in Zukunft stillschweigend Beachtung finden soll.

In der elementaren Theorie pflegt man zu zeigen, dass die Differenzen der Koordinaten zweier geordneter Punkte des Raumes die Komponenten eines kontravarianten Vektors bilden; daraus folgert man die Darstellung eines solchen Vektors durch einen Pfeil. So fruchtbar diese Darstellung auch ist, so gilt sie doch nur bei Verwendung affiner K'systeme, bei welchen die u_k^i konstant sind. In einem beliebigen zulässigen K'system ist dies im allgemeinen nicht mehr der Fall, ganz abgesehen davon, dass ein solches zwei gegebene Punkte des Raumes gar nicht gleichzeitig zu erfassen braucht. Bei der hier gewählten Bedeutung des Begriffs «Koordinatensystem» erweist sich also die übliche Darstellung des Vektors durch einen Pfeil als koordinaten*abhängig*.

Entsprechendes gilt für den kovarianten Vektor. Für ihn ist schon in der elementaren Theorie eine Darstellung durch den Pfeil nur möglich, falls man die affinen K'systeme zu den orthonormierten einschränkt (vgl. Abschnitt 8). Bei Verwendung affiner Koordinaten bilden nicht die Differenzen der Koordinaten zweier Punkte, wohl aber diejenigen zweier $(n-1)$-dimensionaler Ebenen ein Zahlen-n-tupel, das sich wie die Komponenten eines kovarianten Vektors verhält. Ein solcher ist also durch ein geordnetes Ebenenpaar darzustellen; für allgemeine K'systeme versagt diese Darstellung wieder.

6. Die einfachsten geometrischen Objekte sind die *Skalare*. Für sie ist $N = 1$, und ihre Verknüpfungsbeziehung lautet

$$\bar{t} = t, \tag{4}$$

so dass sie durch eine einzige Zahl beschrieben werden können. Man darf jedoch das geometrische Objekt Skalar keineswegs mit einer Zahl schlechthin verwechseln. Dies tritt deutlich in Erscheinung, wenn Skalare durch geeignete Operationen aus gegebenen geometrischen Objekten gewonnen werden. Als Beispiel diene die *Überschiebung* eines kontravarianten Vektors (r^i) und eines kovarianten Vektors (s_i), natürlich im gleichen Punkt, die eine Zahl

$$t = r^i s_i$$

liefert. t erweist sich auf Grund von (2) und (3) als Komponente eines Skalars. Hingegen entsteht bei der Überschiebung zweier gleichvarianter Vektoren zwar eine Zahl in jedem K'system, jedoch kein Skalar (vgl. Abschnitt 8).

Nur kurz erwähnt seien die *Tensoren*, die als geometrische Objekte höherer Art erklärt werden und als deren Spezialfälle Skalare und Vektoren erscheinen. Die einfachsten Tensoren sind solche mit $N = n^2$ Komponenten und den Verknüpfungsbeziehungen

$$\bar{t}^{ik} = u_r^i u_s^k t^{rs}; \quad \bar{t}_{ik} = v_i^r v_k^s t_{rs}; \quad \bar{t}_k^i = u_r^i v_k^s t_s^r, \tag{5}$$

welche der Reihe nach den kontravarianten, den kovarianten und den gemischten Tensor *zweiter Stufe* definieren.

7 [3]). Wird jedem Punkt des geometrischen Raumes oder einer seiner Teilmengen ein geometrisches Objekt derselben Natur, das heisst mit gleichem N und gleichen F_α zugeordnet, so spricht man von einem Objektfeld. Die Komponenten der Objekte sind dann Funktionen der Koordinaten der Punkte, in denen sie definiert sind. Von diesen Funktionen soll im weiteren stets Differenzierbarkeit vorausgesetzt werden.

Zum Studium der Objektfelder und ganz allgemein zur Weiterentwicklung der Theorie ist die Erklärung eines neuen geometrischen Objekts, der «*affinen Struktur*» (des «affinen Zusammenhangs») in jedem Punkt des geometrischen Raumes unerlässlich. Für dieses Objekt ist $N = n^3$, seine Komponenten werden gewöhnlich mit Γ^i_{kl} bezeichnet, und es wird festgesetzt: In den affinen und in denjenigen zulässigen K'systemen, die aus affinen durch Einschränkung des arithmetischen Bereichs entstehen, sind alle $\Gamma^i_{kl} = 0$. Sonst gelten die Verknüpfungsbeziehungen:

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = u^i_r\, v^s_k\, v^t_l\, \Gamma^r_{st} - v^r_k\, v^s_l\, u^i_{rs}.$$

Da beim Übergang zwischen affinen K'systemen die $u^i_{rs} = 0$ werden, sind die beiden Festsetzungen miteinander verträglich.

Mit Hilfe der affinen Struktur können in Vektorfeldern Ableitungsoperationen erklärt werden. Die «kovariante Ableitung» eines kontravarianten Vektorfelds $\left(r^i(x)\right)$ zum Beispiel lautet

$$\partial_k r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\, r^l.$$

Wie leicht nachzuprüfen, sind die $\partial_k r^i$ die Komponenten eines gemischten Tensors zweiter Stufe.

Von Bedeutung ist der Fall $\partial_k r^i \equiv 0$. Gilt er, so soll $\left(r^i(x)\right)$ ein konstantes Vektorfeld heissen, wobei zu beachten ist, dass selbstverständlich die Komponenten $r^i(x)$ selber im Raum nicht konstant zu sein brauchen. Hingegen gilt die Beziehung $\partial_k r^i \equiv 0$ als Tensorgleichung gleichzeitig für alle K'systeme, wie aus (5) sofort folgt.

Liegt nun ein im ganzen geometrischen Raum definiertes, überall konstantes kontravariantes Vektorfeld vor, so zeigt sich sofort, dass in einem affinen K'system jeder Vektor des Felds die gleiche Komponentenskala besitzt. Die Beschreibung der einzelnen Feldvektoren ist also nicht mehr an die Punkte gebunden, zu denen sie gehören, und man kann sich die Vorstellung bilden, die Vektoren seien frei im Raum verschiebbar. Ein «*freier Vektor*» ist somit ein im ganzen Raum erklärtes, konstantes kontravariantes Vektorfeld. Das Analoge gilt im kovarianten Fall.

8. Obwohl der affine Raum zur Definition geometrischer Objekte ausreicht, kommen zahlreiche ihrer in der elementaren Theorie verwendeten Eigenschaften erst durch die Einführung einer Metrik zum Vorschein. Wie die affine wird auch die «*metrische Struktur*» des Raumes durch ein in jedem seiner Punkte erklärtes geometrisches Objekt zum Ausdruck gebracht, nämlich durch einen kovarianten Tensor 2. Stufe g_{ik}, an den noch gewisse Forderungen (Symmetrie, Konstanz, positive Definitheit) gestellt werden. Diese Forderungen laufen darauf hinaus, dass man affine K'systeme finden kann, in welchen die Komponenten g_{ik} des metrischen Tensors

[3]) Für alle Einzelheiten der beiden folgenden Abschnitte vgl. die einschlägigen Werke über Tensoranalysis, zum Beispiel [4].

gleich δ_{ik} werden (*orthonormierte* K'systeme). Die zur Matrix $\| g_{ik} \|$ inverse Matrix $\| g^{ik} \|$ liefert, wie leicht nachzuprüfen, einen kontravarianten Tensor 2. Stufe.

Mit Hilfe der metrischen Struktur kann man nun das *Skalarprodukt* definieren. Für zwei kontravariante Vektoren (r^i) und (s^i) lautet es

$$g_{ik}\, r^i\, s^k,$$

für zwei kovariante Vektoren (p_i) und (q_i) hingegen

$$g^{ik}\, p_i\, q_k.$$

Beide sich dabei ergebenden Zahlen sind Komponenten von Skalaren.

Ein sehr oft verwendeter Prozess ist die Überschiebung des metrischen Tensors mit einem (zum Beispiel kontravarianten) Vektor (r^i):

$$r_i = g_{ik}\, r^k. \tag{6}$$

Die r_i sind die Komponenten eines kovarianten Vektors. Auf diese Weise kann jedem kontravarianten Vektor ein kovarianter zugeordnet werden (wie, unter Verwendung der g^{ik}, auch umgekehrt). Es wird nun sehr oft die Redeweise benützt, die r_i seien die «kovarianten», die r^i die «kontravarianten Komponenten» ein und desselben «Vektors». Diese Auffassung ist jedoch von dem hier eingenommenen Standpunkte aus unzulässig. Ein geometrisches Objekt ist durch seine Verknüpfungsbeziehungen definiert, und Objekte mit verschiedenen Verknüpfungen müssen als verschieden betrachtet werden. Gleichung (6) bedeutet also eine Zuordnung, nicht aber eine Identifikation von Vektoren. Man müsste schon die Definition des geometrischen Objekts erweitern, um dem andern Standpunkt gerecht werden zu können.

In orthonormierten K'systemen geht Gleichung (6) in $r_i = r^i$ über. Die beiden einander entsprechenden Vektoren haben gleiche Komponenten, welche überhaupt nicht mehr unterschieden zu werden pflegen: die Varianz eines Vektors fällt dahin. Dieses Vorgehen hängt aber ausdrücklich von der Wahl spezieller K'systeme ab und hat daher keine eigentliche geometrische Bedeutung im hier erörterten Sinne.

9. Neben der affinen und der metrischen Struktur findet noch ein drittes geometrisches Objekt zur Bereicherung der Raumstruktur Verwendung, die «*Orientierung*». Es handelt sich dabei um ein Objekt mit einer Komponente σ, der Verknüpfungsbeziehung

$$\bar{\sigma} = (\operatorname{sign} u)\, \sigma \qquad \left(\operatorname{sign} u = \frac{u}{|u|},\ |u| = \text{Betrag von } u\right) \tag{7}$$

und der Forderung $\sigma^2 = 1$. Zudem soll das Objekt wieder in jedem Punkt des geometrischen Raumes erklärt und die Komponente σ eine stetige Funktion der jeweiligen Koordinaten sein.

Ist nun ein affines K'system K gegeben, so ist die Komponente der Orientierung bezüglich K entweder überall gleich $+1$ oder überall gleich -1. Jedes affine K'system erhält also als Ganzes entweder die Zahl $+1$ oder die Zahl -1 zugewiesen; dies entspricht, anschaulich gesehen, der Einführung eines «rechts-» oder eines «linkswen-

digen» Schraubungssinnes. (Für weitere Ausführungen über die Orientierung vgl. [2] und [5].)

10. Skalaren, Vektoren und Tensoren kann ein weiterer, wichtiger Typus geometrischer Objekte übergeordnet werden, der sich von den erstgenannten durch das zusätzliche Auftreten eines Faktors $|u|^{-g}$ in den Verknüpfungsbeziehungen unterscheidet. Objekte dieser Art werden (Skalar-, Vektor-, Tensor-) *Dichten* vom Gewicht g genannt. Natürlich sind Dichten vom Gewicht 0 wieder die ursprünglichen Objekte.

Weiter kann sowohl bei gewöhnlichen Tensoren als auch bei ihren Dichten noch der Faktor sign u auftreten, so dass Objekte entstehen, welche mit den ersteren alles bis auf ein Vorzeichen in den Verknüpfungsbeziehungen gemeinsam haben. Diese Objekte sollen hier[4]) durch das Vorwort «*Pseudo*» gekennzeichnet werden. Im folgenden wird eine Übersicht über verschiedene, in der elementaren Theorie verwendete geometrische Objekte dieser beiden neuen Klassen gegeben.

In der Orientierung σ war bereits ein Pseudo-Skalar aufgetreten, wie (7) erkennen lässt. Eine in der metrischen Theorie oft verwendete Bildung ist $\gamma = +\sqrt{|g|}$ ($g = \det \| g_{ik} \|$), welche der Beziehung

$$\bar{\gamma} = |v|\, \gamma$$

genügt und daher Komponente einer Skalardichte vom Gewicht $+1$ ist. Trägt der Raum ausser der Metrik noch eine Orientierung, so kann $\gamma_0 = \sigma \gamma$ gebildet werden, welche Grösse die Beziehung

$$\bar{\gamma}_0 = (\operatorname{sign} u)\, |v|\, \gamma_0$$

erfüllt und somit als Komponente einer Pseudo-Skalardichte vom Gewicht $+1$ erscheint.

11. Geometrische Objekte vom Charakter der Vektordichten treten bei der Definition der sogenannten Vektorprodukte auf, die jetzt in Angriff genommen werden soll.

Gegeben seien $n-1$ kontravariante Vektoren im gleichen geometrischen Punkt; $\binom{r^i}{\alpha}$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$) seien ihre Komponenten in einem K'system K. Die Zahlen

$$p_i = \det \begin{Vmatrix} \delta_i^1 & \ldots & \delta_i^n \\ \underset{1}{r^1} & \ldots & \underset{1}{r^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underset{n-1}{r^1} & \ldots & \underset{n-1}{r^n} \end{Vmatrix}$$

sollen als die Komponenten eines geometrischen Objekts im nämlichen Punkt und in K angesehen werden. Wie leicht nachzuprüfen ist, lauten die Verknüpfungsbeziehungen dieses Objekts auf Grund von (2):

$$\bar{p}_i = (\operatorname{sign} u)\, |u|\, v_i^k\, p_k,$$

[4]) Eine einheitliche und befriedigende Bezeichnung scheint sich noch nicht durchgesetzt zu haben.

so dass es eine Pseudo-Vektordichte, und zwar eine kovariante vom Gewicht -1, darstellt. Es soll «*affines Vektorprodukt*» der gegebenen $n-1$ Vektoren genannt werden.

Liegt im Raum eine metrische Struktur vor, so lässt sich durch den Ansatz

$$p^i = \gamma\, g^{ik}\, p_k$$

ein neues Objekt definieren, das «*metrische Vektorprodukt*» der gegebenen Vektoren. Der Ansatz bezweckt die Verwandlung der Kovarianz in Kontravarianz und eine gewisse Normierung. Die Verknüpfungsbeziehungen des metrischen Vektorprodukts lauten offenbar

$$\bar{p}^i = (\operatorname{sign} u)\, u^i_k\, p^k;$$

die p^i sind somit die Komponenten eines kontravarianten Pseudo-Vektors, der sich, wie erwähnt, von einem gewöhnlichen kontravarianten Vektor nur durch ein zusätzliches Vorzeichen unterscheidet.

Ist schliesslich auch noch eine Orientierung gegeben, so kann analog

$$p^i_0 = \gamma_0\, g^{ik}\, p_k$$

angesetzt werden. Diese n Zahlen sind die Komponenten eines gewöhnlichen kontravarianten Vektors, der «*orientiert-metrisches Vektorprodukt*» der gegebenen Vektoren heissen möge.

Für die Objekte, die bei der Definition der ersten beiden Vektorprodukte auftraten, kann man geeignete geometrische Darstellungen finden, die, obwohl wieder von der Wahl affiner K'systeme abhängig, den Unterschied zu den gewöhnlichen Vektoren deutlich in Erscheinung treten lassen.

Wie man leicht einsieht, lässt sich eine kovariante Vektordichte vom Gewicht -1 durch eine $(n-1)$-dimensionale Ebene darstellen. Bei der zugehörigen Pseudo-Dichte muss dieser Ebene – wegen des Faktors $\operatorname{sign} u$ – ein innerer Schraubungssinn zugeschrieben werden. Ein Gebilde dieser Art wird oft «Plangrösse» genannt. Beim affinen Vektorprodukt wird natürlich Ebene und Schraubungssinn durch die gegebenen $n-1$ (unabhängigen) Vektoren geliefert.

Wichtiger ist der kontravariante Pseudo-Vektor. Seine Darstellung ist eine Strecke mit einem um sie herumgeführten Schraubungssinn; man erkennt in diesem Gebilde den eingangs erwähnten *axialen Vektor*, der sich somit als kontravarianter Pseudo-Vektor herausstellt. Als geometrisches Objekt ist er dem gewöhnlichen («polaren») Vektor durchaus ebenbürtig, wie sein Auftreten etwa als Winkelgeschwindigkeit oder, für $n = 3$, als Rotation eines Vektorfeldes zeigt, wo der Einsatz des polaren Vektors sinnlos wäre.

In der elementaren Theorie, vor allem für $n = 3$, treten sowohl das metrische wie auch das orientiert-metrische Vektorprodukt von $k-1$ kontravarianten Vektoren auf, ohne dass freilich stets genau zwischen ihnen unterschieden wird[5]). Wie gezeigt wurde, ist das erstere ein axialer, das letztere ein gewöhnlicher Vektor. Je nach dem

[5]) Vergleiche etwa die Bemerkungen in [1], Fussnote von Seite 72f., mit denen sich der Verfasser allerdings nicht ganz einverstanden erklären kann.

angestrebten Ziel kann das eine oder das andere Produkt Verwendung finden, wobei natürlich zu beachten ist, dass das orientiert-metrische Vektorprodukt die Einführung einer zusätzlichen Struktur in den geometrischen Raum erheischte.

12. Die sogenannten Volum- oder gemischten Produkte von n kontravarianten Vektoren $\left(\underset{\alpha}{r^i}\right)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ können nun analog zu den Vektorprodukten gewonnen werden; dies sei hier nur kurz angedeutet. Die drei Zahlen

$$r = \det \left\| \underset{\alpha}{r^i} \right\|; \qquad s = \gamma\, r; \qquad s_0 = \gamma_0\, r$$

stellen die (einzigen) Komponenten je eines geometrischen Objekts dar, welche Objekte sich der Reihe nach als Pseudo-Skalardichte vom Gewicht -1, als Pseudo-Skalar und als gewöhnlicher Skalar herausstellen. Das erste der drei Objekte hat als Darstellung in einem affinen K'system das von den gegebenen n Vektoren aufgespannte Parallelotop mit einem innern Schraubungssinn. Das zweite Objekt, das sich von einem Skalar wieder nur durch ein zusätzliches Vorzeichen unterscheidet, hat als «Bild» (wenn man so sagen darf) eine Zahl und einen Schraubungssinn, entspricht also dem einleitend «axial» genannten skalaren Objekt.

Die Überlegungen der letzten beiden Abschnitte gingen stets von kontravarianten Vektoren aus. Man erhält entsprechende Resultate für kovariante Vektoren, worauf nicht mehr eingegangen werden soll.

13. Zum Schluss muss noch eine Frage aufgegriffen werden, die in Abschnitt 3 offengelassen wurde. Die affine Geometrie war dort im Sinne von VEBLEN und WHITEHEAD durch eine Klasse ausgezeichneter K'systeme – der affinen – gekennzeichnet worden, an die sich die zulässigen K'systeme anschlossen. In der ganzen Theorie steckt also noch eine Art Koordinatenabhängigkeit, nämlich diejenige von den ausgezeichneten Systemen, die explizite eingeführt werden und auf die letzten Endes alles bezogen erscheint (vgl. etwa die Definition der affinen Struktur in Abschnitt 7). Um auch diese Abhängigkeit auszuschalten, was zwecks Geschlossenheit der Theorie verlangt werden sollte, wählt man am besten den Weg über die allgemeinen Mannigfaltigkeiten mit zulässigen K'systemen, deren Theorie ebenfalls von VEBLEN und WHITEHEAD vorgezeichnet wurde [5].

Der Verfasser hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit eine invariante Begründung der affinen Geometrie mitgeteilt [6]. Sie erfolgt in drei Schritten. Im ersten werden die zulässigen K'systeme des geometrischen Raumes in axiomatischer Weise beschrieben, im zweiten wird die Art der Geometrie durch die Einführung einer affinen Struktur eingeengt, von der Torsions- und Krümmungsfreiheit verlangt wird (zu diesen Begriffen vergleiche etwa [4]). Eine dritte Gruppe von Axiomen charakterisiert dann in invarianter, das heisst in einer für alle zulässigen K'systeme gleichartigen Weise die elementare affine Geometrie. Der Hauptteil der Arbeit dient dem Nachweis, dass sich unter den getroffenen Voraussetzungen eine Klasse von K'systemen auszeichnen lässt, welche den an die Klasse der affinen K'systeme gestellten Forderungen genügt. Damit ist bei der Grundlegung des geometrischen Raumes die Abhängigkeit von irgendwelchen speziellen K'systemen verschwunden. Wegen aller Einzelheiten muss auf die Originalarbeit verwiesen werden.

PETER WILKER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. DUSCHEK und A. HOCHRAINER, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, 3 Teile (Springer-Verlag, Wien 1946–1955).
[2] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, 2. Aufl. (Springer Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954).
[3] J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES, *On the Theory of the Geometric Object*, Proc. London math. Soc. *42* (2), 356–376 (1937).
[4] O. VEBLEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms* ([Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 24] Cambridge University Press 1933).
[5] O. VEBLEN und J. H. C. WHITEHEAD, *The Foundations of Differential Geometry* ([Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 29] Cambridge University Press 1932; Wiederabdruck 1953).
[6] P. WILKER, *Invariante Grundlegung des affinen Raumes*, Math. Ann. *137*, 107–124 (1959).

Ungelöste Probleme

Nr. 28. Im dritten Band der *History of the Theory of Numbers* von L. E. DICKSON, Kapitel X, findet man Sätze von JACOBI, LIOUVILLE und anderen Autoren über die Anzahlen der Darstellungen einer ganzen Zahl n durch positive quaternäre quadratische Formen. LIOUVILLE hat immer nur ganz spezielle Formen, wie zum Beispiel

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

betrachtet. Es fragt sich, ob man diese Sätze verallgemeinern kann. HURWITZ hat den Satz von JACOBI über die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten mittels Quaternionen bewiesen (siehe A. HURWITZ, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin 1919, sowie DICKSON-BODEWIG, *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Kapitel IX). Diese Beweismethode lässt sich wahrscheinlich auf andere Formen übertragen, deren Diskriminante ein Quadrat ist. Einfache Ergebnisse sind allerdings nur dann zu erwarten, wenn die Idealklassenzahl der zugrunde gelegten Quaternionen-Ordnung gleich Eins ist. HUMBERT hat Sätze über binäre Hermitesche Formen bewiesen (siehe DICKSON, *History*..., Kapitel XV), aus denen man Sätze über quaternäre quadratische Formen gewinnen kann. Auch diese Beweismethode lässt sich nur auf solche quaternäre Formen anwenden, deren Diskriminante ein Quadrat ist. Eine allgemeinere Methode zur Auswertung von Darstellungszahlen durch quadratische Formen, die zu Gittern aus einem Idealkomplex gehören, findet man bei M. EICHLER, *Quadratische Formen*, Kapitel IV.

Bei quaternären Formen mit quadratischer Determinante lassen sich diese Dinge auch in der Sprache der Quaternionenalgebren formulieren und ausserdem vertiefen [vgl. M. EICHLER, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, J. reine angew. Math. *195* (1956)]. Alle diese Methoden sollten miteinander in Zusammenhang gebracht und auf einfache Beispiele angewandt werden. Ferner wäre es erwünscht, diese Untersuchungen auf quaternäre Formen mit nicht quadratischer Diskriminante auszudehnen und die von EICHLER definierten Anzahlmatrizen im Zusammenhang mit der Cliffordschen Algebra näher zu untersuchen.

B. L. VAN DER WAERDEN und M. EICHLER