Sur les ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 10. März 1959

Sur les ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle

Le but de cette note est de résoudre le problème suivant:

Combien de points peut avoir un ensemble E de points situé sur un cercle au rayon donné r et tel que tous deux points de E ont une distance rationnelle?

Soit C un cercle au rayon r et P un point quelconque situé sur ce cercle. Si r' est un nombre rationnel $\leqq 2r$, le cercle au centre en P et au rayon r' rencontre le cercle C dans un point au moins. Si Q est un de ces points, la distance de P à Q est égale à r', donc rationnelle. Ainsi pour tout point P d'un cercle quelconque il existe sur ce cercle une infinité de points Q tels que la distance de P à Q est rationnelle.

Soit maintenant C un cercle au rayon r et supposons qu'il existe sur le cercle C trois points distincts tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux est rationnelle. Le cercle C est donc circonscrit à un triangle aux côtés rationnels, soient a, b et c. Comme on sait de la géométrie élémentaire, on a alors entre les nombres a, b et c la relation $r = a\,b\,c/4\,s$, où s est la surface du triangle aux côtés a, b, c, ou bien, ce qui revient au même:

$$r = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{4\,a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}\,.$$

Il en résulte que s'il existe sur le cercle C de rayon r trois points distincts tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux est rationnelle, r^2 est un nombre rationnel. Il s'en suit que par exemple sur un cercle de rayon $\sqrt[3]{2}$ il n'existe aucun ensemble formé de trois points distincts dont les distances sont toutes rationnelles.

Nous prouverons maintenant que *si C est un cercle de rayon r, ou r^2 est un nombre rationnel, il existe sur le cercle C un ensemble dense de points dont tous deux ont une distance rationnelle.*

Soit donc C un cercle de rayon r, où $r^2 = l/m$, où l et m sont des nombres naturels. On aura donc $m\,r = \sqrt{l\,m} \geqq 1$, d'où $4\,l\,m + 1 - 4\,m\,r = (2\,m\,r - 1)^2 \geqq 1$, donc

$$0 < \frac{4\,m\,r}{4\,l\,m + 1} < 1\,.$$

Il existe donc un angle α tel que $0 < \alpha < \pi/2$ et

$$\sin\alpha = \frac{4\,m\,r}{4\,l\,m + 1}\,, \qquad \text{d'où} \quad \cos\alpha = \frac{4\,l\,m - 1}{4\,l\,m + 1}\,. \tag{1}$$

Nous prouverons que

$$\sin k\,\alpha \neq 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

On déduit sans peine des formules connues de la trigonométrie l'identité

$$\sin(k+2)\,\alpha = 2\sin(k+1)\,\alpha\cos\alpha - \sin k\,\alpha \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Posons

$$t_k = (4\,l\,m+1)^k\,r\sin k\,\alpha \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

D'après (4), (1), $m\,r^2 = l$ et $m^2\,r^2 = l\,m$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= (4\,l\,m+1)\,r\sin\alpha = 4\,m\,r^2 = 4\,l, \\ t_2 &= (4\,l\,m+1)^2\,r\sin 2\,\alpha = 2\,(4\,l\,m+1)^2\,r\sin\alpha\cos\alpha = 8\,m\,r^2\,(4\,l\,m-1) \\ &= 8\,l\,(4\,m\,l-1) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

et les nombres t_1 et t_2 sont naturels. Il en résulte d'après (3) et (4) par l'induction que les nombres (4) sont tous entiers.

D'après (1), (3) et (4) on trouve sans peine

$$t_{k+2} = 2\,(4\,l\,m-1)\,t_{k+1} - (4\,l\,m+1)^2\,t_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Le nombre $h = 4\,l\,m+1$ est impair et premier avec 2, l et $4\,l\,m-1$: on a donc, d'après (5), $t_1 < h$, donc $(t_1, h) = 1$, et $(t_2, h) = 1$. Il en résulte tout de suite de (6) par l'induction que les nombres t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ne sont pas divisibles par h, donc sont $\neq 0$. D'après (4) on a donc les inégalités (2), ce qu'il fallait démontrer.

Prenons maintenant sur notre cercle C un point P_0 quelconque et déterminons sur C une suite infinie de points $P_1, P_2, \ldots$, tels que les angles $P_{k-1}OP_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, où O est le centre du cercle C, sont tous égaux à $2\,\alpha$. u et v étant deux indices entiers tels que $0 \leqq u < v$, l'angle P_uOP_v est évidemment égal à $2\,(v-u)\,\alpha$, d'où, r étant le rayon de notre cercle, on trouve que la distance entre les points P_u et P_v est $2\,r\,|\sin(v-u)\,\alpha|$. Or, d'après (4) (les nombres t_k étant entiers), les nombres $r\sin(v-u)\,\alpha$ sont rationnels et non nuls, d'après (2) et vu que $v-u$ est un nombre naturel. Les points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sont donc tous distincts et la distance entre deux quelconques d'entre eux est rationnelle.

Vu qu'il y a sur notre cercle une infinité de points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ et que la distance entre deux points consécutifs de cette suite est constante ($= 2\,r\sin\alpha$) on en déduit sans peine que ces points sont denses sur notre cercle. La proposition désirée se trouve ainsi démontrée.

Prenons maintenant sur notre cercle C un nombre fini quelconque n de points P_0, $P_1, \ldots, P_{n-1}$ dont tous deux ont une distance rationnelle. Soit S le dénominateur commun de tous les $n\,(n-1)/2$ nombres rationnels $\overline{P_uP_v}$, où $0 \leqq u < v < n$. Il est clair qu'en augmentant S fois le rayon de notre cercle, on obtiendra au lieu des points $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, sur le cercle augmenté les points $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux sera entière. Nos points étant situés sur le même cercle, aucuns trois d'entre eux ne sont pas situés sur une même droite.

Donc, *on peut déterminer sur le plan un nombre fini quelconque de points dont aucuns trois ne sont pas situés sur une même droite et tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux est entière.*

Cette proposition a été démontrée pour la première fois (par une voie un peu différente) en 1945 par W. H. ANNING et P. ERDÖS[1]). Les mêmes auteurs ont démontré[1]) que si l'on a sur le plan un ensemble infini de points dont tous deux ont une distance entière, tous ces points sont situés sur la même droite[2]). W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

Über den Vektor

1. Jeder Mathematiker lernt im Laufe seiner Ausbildung den Begriff des Vektors in den verschiedensten Gestalten kennen. Da wird anfänglich der Vektor als eine gerichtete Strecke (Pfeil) eingeführt, mit der gewisse einfache Operationen ausgeführt werden können. Der Physiker neigt vielleicht dazu, den Vektor als ein Gebilde zu betrachten, das eine Grösse und eine Richtung besitzt, manche Mathematiker definieren ihn lieber als das Symbol einer Translation des Raumes. Bei der Definition durch den Pfeil unterscheidet man gewöhnlich zwischen dem gebundenen Vektor, der in einem ganz bestimmten Punkt angreift, und dem freien Vektor, der im Raum herumgleiten kann. Dem Vektor gegenübergestellt wird dann der Skalar, der keine Richtung, sondern nur Grösse besitzt oder einfach eine Zahl schlechthin bedeutet.

Im Anschluss an die einfachen algebraischen Rechenoperationen mit Vektoren treten die Produkte auf, in erster Linie das Skalarprodukt, das Vektorprodukt und das Volumprodukt, die der Reihe nach einen Skalar, einen Vektor und wieder einen Skalar liefern.

In einer etwas höheren Stufe tritt vor allem die Physik mit einer neuen Unterscheidung hervor, mit der Unterscheidung von polaren und axialen Vektoren. Die letzteren sind nicht durch einen Richtungs-, sondern durch einen Schraubungssinn gekennzeichnet. Beispiele liefern etwa der Gradient eines Skalarfeldes, der ein polarer, und die Rotation eines Vektorfeldes, die ein axialer Vektor ist. Rückblickend erkennt man, dass das Vektorprodukt unter Umständen als ein axialer Vektor aufgefasst werden muss. Manchmal wird folgerichtig die nämliche Unterscheidung bei den Skalaren vorgenommen. Das Skalarprodukt würde dann einer Art «polarem», das Volumprodukt einem «axialen» Skalar entsprechen.

Bei der weitergehenden Analyse des Vektorbegriffs tritt ein neuer Gesichtspunkt hinzu: das Verhalten der Skalare und Vektoren bei Koordinatentransformationen und die sich daraus ergebende Unterscheidung von kontravarianten und kovarianten Vektoren. Manchmal werden nicht die Vektoren, sondern ihre Komponenten unterschieden, und man spricht von kovarianten oder kontravarianten Komponenten ein und desselben Vektors. Es zeigt sich, dass axiale Vektoren gar keine richtigen Vektoren, «axiale» Skalare keine eigentlichen Skalare sind. Die neu gewonnenen Methoden führen dann zu den Tensoren, als deren Spezialfälle Skalare und Vektoren erscheinen.

---

[1]) W. H. ANNING et P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 598–600 (1945). Voir aussi H. HADWIGER, El. Math. *13*, 85 (1958), où se trouve la littérature ultérieure.

[2]) Voir aussi P. ERDÖS, *Integral Distances*, Bull. Amer. Math. Soc. *51*, 996 (1945), et E. TROST, El. Math. *6*, 59–60 (1951).