Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 14 (1959)

Heft: 1

Artikel: Über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte in einem regelmässigen n-Eck

Autor: Schneider, Z. / Stankovitsch, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20315

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

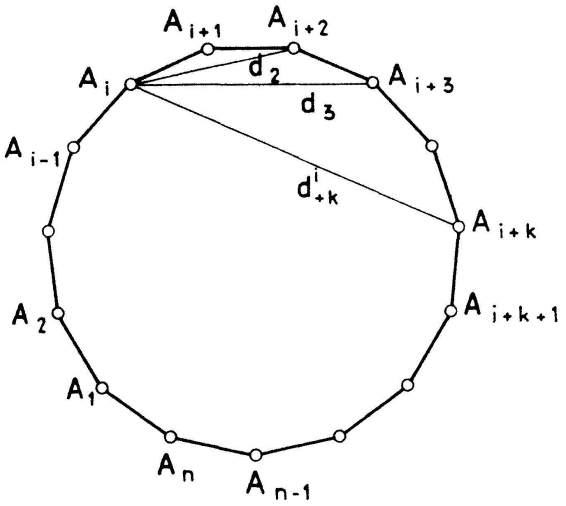
Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

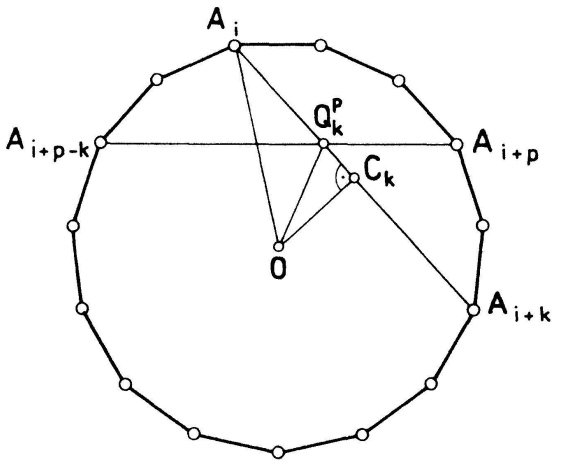
Über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte in einem regelmässigen n-Eck

Angeregt durch ein in dieser Zeitschrift erschienenes Bild[1]) eines regelmässigen 48-Eckes, in welchem alle Diagonalen eingezeichnet waren, sind wir zu einigen Eigenschaften über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte gekommen.

Wir hoffen, dieser Artikel gebe den Anstoss zu weiterer Arbeit an diesem interessanten Problem.



Figur 1



Figur 2

Der Übersichtlichkeit wegen führen wir folgende Bezeichnungen ein: Mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezeichnen wir die Ecken in ihrer Reihenfolge, mit ϱ und O den Halbmesser und den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, mit $d^i_{\pm k}$ die Diagonale, welche die Ecke A_i mit der Ecke $A_{i \pm k}$ verbindet. Den Index i wie auch das Zeichen $\pm$ lassen wir weg, wenn nicht hervorgehoben werden muss, welche Ecken durch diese Diagonale verbunden sind (Figur 1). Der Index k nimmt die Werte $2 \leqq k \leqq [n/2]$ an. Mit c_k bezeichnen wir den Abstand der Diagonalen d_k vom Mittelpunkt O.

Hilfssatz 1: *Der Abstand des Schnittes Q^p_k zweier Diagonalen d^i_{+k}* und *d^{i+p}_{-k} vom Mittelpunkt O ist*

$$r^p_k = \varrho \frac{\cos k\, \pi/n}{\cos (k-p)\, \pi/n}.$$

Beweis: Es soll mit C_k der Schnitt der Diagonalen d^i_{+k} und der Normalen aus O auf d^i_{+k} bezeichnet werden (Figur 2).

Aus ΔOC_kA_i folgt

$$OC_k = \varrho \cos k \frac{\pi}{n} = c_k,$$

[1]) El. Math. 9, 93 (1954).

demnach aus $\Delta OC_kQ_k^p$:

$$Q_k^p O = \frac{c_k}{\cos(k-p)\,\pi/n} = \varrho\,\frac{\cos k\,\pi/n}{\cos(k-p)\,\pi/n} = r_k^p.$$

Man sieht, dass r_k^p seinen grössten Wert für $p = 1$ annimmt. Darum befinden sich alle Schnitte, die auf den Diagonalen d_k und nicht gleichzeitig auf einer Diagonalen d_q, $q < k$, gelegen sind, in einem Kreis des Halbmessers r_k^1. Ausserdem sind die Schnitte aller Diagonalen in dem Ring

$$r_2^1,\ r_{[n/2]}^{[n/2]-1}$$

angeordnet.

Satz 1: *Für jeden Wert von k und $n \geqq 4$ ist $c_{k-1} - r_k^{k-1} > 0$, und für jeden Wert von k ist $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{k-1} - r_k^{k-1}) = 0$. Für jeden Wert von k und $n \geqq 4$ ist $c_{k-1} - r_k^1 > -\varrho/2$; in speziellen Fällen für $n \leqq 11$ ist $c_{k-1} - r_k^1 > 0$, und für $k = (n+2)/3$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{(n-1)/3} - r_{(n+2)/3}^1) = -\varrho/2$.*

Beweis: Nach dem Hilfssatz 1 ist

$$c_{k-1} - r_k^{k-1} = \varrho\cos\frac{k-1}{n}\pi - \varrho\,\frac{\cos\frac{k}{n}\pi}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Da $\cos(\pi/n) > 0$ ist für $n > 2$, hängt das Zeichen der Differenz $c_{k-1} - r_k^{k-1}$ vom Zeichen der Funktion $f(x)$ ab, wo

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{x-1}{n}\pi - \cos\frac{x\,\pi}{n}.$$

Aus ihrer ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{\pi}{n}\cos\frac{x-1}{n}\pi\sin\frac{\pi}{n}$$

sieht man, dass immer $f'(x) > 0$ ist, wenn $1 < x < n/2$, weil dann $\cos(x-1)\,\pi/n > 0$. Das heisst, dass in diesem Intervall die Funktion $f(x)$ wächst. Weil $f(2) > 0$ ist, schliessen wir, dass für jedes $1 < x < n/2$ $f(x) > 0$ bzw. $c_{k-1} - r_k^{k-1} > 0$ ist.

Wenn wir noch die Differenz in der Form

$$c_{k-1} - r_k^{k-1} = \frac{\varrho}{2\cos\frac{\pi}{n}}\left[\cos\frac{k}{n}\pi\left(\cos\frac{2\,\pi}{n} - 1\right) + \sin\frac{k\,\pi}{n}\sin\frac{2\,\pi}{n}\right]$$

schreiben, folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{k-1} - r_k^{k-1}) = 0$ für jedes k.

Wir werden jetzt den zweiten Teil dieses Satzes beweisen. Das Zeichen der Differenz

$$c_{k-1} - r_k^1 = \varrho\cos\frac{k-1}{n}\pi - \varrho\,\frac{\cos\frac{k\,\pi}{n}}{\cos\frac{k-1}{n}\pi}$$

hängt vom Zeichen der Funktion $f(x)$ ab, wo

$$f(x) = \cos^2\frac{x}{n}\pi - \cos\frac{x+1}{n}\pi.$$

In der Ableitung dieser Funktion

$$f'(x) = -2\,\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\,x+1}{2\,n}\,\pi\sin\frac{x-1}{2\,n}\,\pi$$

bleibt

$$\sin\frac{x-1}{2\,n}\,\pi$$

immer positiv für $n \geqq 4$ und $1 < x \leqq n/2$, während aber

$$\cos\frac{3\,x+1}{2\,n}\,\pi = 0$$

ist für $x = (n-1)/3$. Die Funktion $f(x)$ hat ihr Minimum für $x = (n-1)/3$, und sie wächst für $x > (n-1)/3$. Die Funktion

$$f\left(\frac{n-1}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\,n}\right)\pi - \cos\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\,n}\right)\pi$$

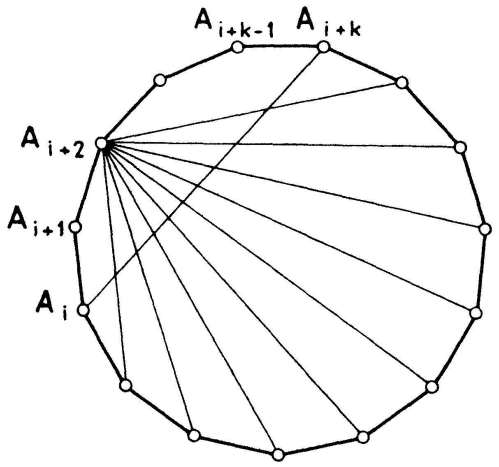
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos\frac{2\,\pi}{3\,n} + \frac{3}{4}\sqrt{3}\sin\frac{2\,\pi}{3\,n}$$

ist gleich Null, wenn

$$\cos\frac{2\,\pi}{3\,n} = \frac{1+\sqrt{24}}{6}$$

ist, woraus folgt, dass $n \approx 12$.

Man kann leicht zeigen, dass die Funktion $f\big((n-1)/3\big)$ eine monoton abnehmende Funktion von n ist; für $n \approx 12$ nimmt sie den Wert 0 an, woraus folgt, dass



Figur 3

$f\big((n-1)/3\big) > 0$ und auch $c_{k-1} - r_k^1 > 0$ für $n \leqq 11$. Ausserdem ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_{(n-1)/3} - r^1_{(n+2)/3}\right) = -\frac{\varrho}{2}$$

und deshalb $c_{k-1} - r_k^1 > -\varrho/2$ für alle Werte von k.

Folgerung aus Satz 1: Für $n > 11$ sind neben den Schnitten, die auf den Diagonalen d_r, $r < k$, liegen, auch die Schnitte der Diagonalen d_q, $q \geqq k$, ausserhalb des Kreises mit dem Halbmesser c_k.

Hilfssatz 2: *Die Anzahl der Schnitte an allen Diagonalen d_k, welche nicht zu den Diagonalen $d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_2$ gehören, ist $n(k-1)(n-2k)$.*

Beweis: Die Diagonale d^i_{+k} wird von den Diagonalen aus den $k-1$ Ecken $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i+k-1}$ geschnitten (Figur 3). Aus jeder von diesen Ecken schneiden $n-k-1$ Diagonalen die Diagonale d^i_{+k}. Also ist die Gesamtanzahl der Diagonalen aus den $k-1$ Ecken, welche die Diagonale d^i_{+k} schneiden, $(k-1)(n-k-1)$. In dieser Zahl sind die $2(k-1)$ Schnitte der Diagonalen d_k inbegriffen. Bedenkt man, dass jeder von diesen Schnitten zu zwei Diagonalen d_k gehört und dass es in einem regelmässigen n-Eck n Diagonalen d_k gibt, so erhält man die totale Anzahl der Schnitte an allen Diagonalen d_k:

$$n(k-1)(n-k-1) - n(k-1) = n(k-1)(n-k-2).$$

Eine Diagonale d^i_{+k} wird von $(k-1)(k-2)$ Diagonalen $d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_2$ geschnitten, und darum ist die Anzahl der Schnitte an einer Diagonalen d^i_{+k}, welche diesen Diagonalen nicht angehören, gleich $(k-1)(n-2k+1)$. Die totale Anzahl der Schnitte an allen Diagonalen d_k, welche den Diagonalen $d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_2$ nicht angehören, ist demnach

$$n(k-1)(n-2k).$$

Satz 2: *Die Anzahl der Diagonalschnitte, die auf allen Diagonalen d_m, $m = 2, 3, \ldots, k$, liegen, ist*

$$\frac{n}{6}(k-1)(3kn - 4k^2 - 4k).$$

Beweis: Nach dem Hilfssatz 2 ist die Anzahl der Schnitte an allen Diagonalen $d_2, d_3, \ldots, d_k$ gleich

$$\sum_{m=2}^{k} n(m-1)(n-2m).$$

Verteilen wir diese Summe in drei Summen:

$$n^2 \sum_{m=2}^{k} m - 2n \sum_{m=2}^{k} m^2 - n \sum_{m=2}^{k} (n-2m).$$

Wenn man von $m^2 = 2\binom{m}{2} + m$ ausgeht, bekommt man

$$\sum_{m=2}^{k} m^2 = \frac{k-1}{6}(2k^2 + 5k + 6).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{m=2}^{k} n(m-1)(n-m) = \frac{n}{6}(k-1)(3kn - 4k^2 - 4k).$$

Folgerung aus Satz 2: Die Gesamtanzahl der Diagonalschnitte ist

$$\frac{n}{24}(n-1)(n-2)(n-3),$$

wenn n ungerade ist, und

$$\frac{n}{24} n(n-2)(n-4),$$

wenn n gerade ist.

Wir müssen hervorheben, dass dies nicht die Anzahl der Schnittpunkte ist, weil es vorkommen kann, dass sich zwei oder auch mehrere Diagonalschnitte in einem Punkte decken.

Satz 3: *Ausserhalb des Kreises, dessen Halbmesser r ist, $r_{k+1}^1 \leqq r < c_k$, gibt es*

$$\frac{n}{6}(k-1)(3kn-4k^2-4k)$$

Diagonalschnitte, wenn $n \leqq 11$ ist.

Beweis: Im Satz 1 haben wir bewiesen, dass $c_k - r_{k+1} > 0$ ist für $n \leqq 11$. Wir wissen, dass ausserhalb des Kreises mit dem Halbmesser r_{k+1}^1 keine Schnitte von Diagonalen d_q, $q < k+1$ liegen; ausserhalb des Kreises mit dem Halbmesser c_k liegen alle Diagonalen d_m, $m \leqq k$. Nach Satz 2 ist die Anzahl der Schnitte an diesen Diagonalen

$$\frac{n}{6}(k-1)(3kn-4k^2-4k).$$

Zuletzt wollen wir ein Bild von der Anordnung der Diagonalschnitte geben.

Satz 4: *Für $n \to \infty$ hat die Anzahl der in einem Ring mit den Radien ϱ und $\varrho\sqrt{2}/2$ liegenden Schnitte einen Grenzwert, der grösser oder gleich der Hälfte der totalen Anzahl der Schnitte ist.*

Beweis. Ausserhalb des Kreises mit dem Halbmesser $r = c_k$ gibt es, nach dem Satz 2, bestimmt mehr als

$$\frac{n}{6}(k-1)(3kn-4k^2-4k)$$

Schnitte. Das Verhältnis zur totalen Anzahl der Schnitte ist

$$N\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{4(k-1)(3kn-4k^2-4k)}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Wenn man in Betracht zieht, dass

$$\frac{2}{n} \leqq \frac{k}{n} \leqq \frac{1}{2}$$

ist, bekommt man

$$N\left(\frac{k}{n}\right) \sim 4\left(\frac{k}{n}\right)^2\left[3-4\left(\frac{k}{n}\right)\right] \qquad (n \to \infty)$$

und für $k/n = 1/4$:

$$N\left(\frac{1}{4}\right) \sim \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

Der Flächeninhalt des Kreisringes mit den Radien ϱ und $r = \varrho\cos(k/n)\pi$ ist für $k/n = 1/4$ gleich

$$\varrho^2\pi\left(1-\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\varrho^2\pi.$$

Ein klareres Bild der Anordnung der Schnitte auf einer Einheit des Flächeninhalts bekommt man, wenn man $k/n = 1/8$ setzt. Dann bekommen wir

$$N\left(\frac{1}{8}\right) \sim \frac{5}{32} \approx 0{,}156,$$

und der entsprechende Flächeninhalt ist

$$\varrho^2 \pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = \varrho^2 \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4}\right).$$

In bezug auf den totalen Flächeninhalt bekommen wir

$$1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} \approx 0{,}146.$$

Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, Beograd

Some Congruences Involving Binomial Coefficients

GLAISHER[1]) (p. 21) has proved that

$$\binom{n\,p-1}{p-1} \equiv 1 - \frac{1}{3}\, n\,(n-1)\, p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}, \tag{1}$$

where p is a prime >3 und B_m denotes the m-th Bernoulli number in the even suffix notation. It follows from (1) that

$$\binom{m\,p-1}{p-1} - \binom{n\,p-1}{p-1} \equiv -\frac{1}{3}\,(m-n)\,(m+n-1)\, p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}. \tag{2}$$

In view of (2) it may be of interest to examine the r-th difference

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n\,p+s\,p-1}{p-1}. \tag{3}$$

Indeed it is no more difficult to discuss

$$\Delta_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \binom{n\,w+s\,w-1}{p-1}, \tag{4}$$

where n is an arbitrary integer and

$$p^e \mid w \qquad (e \geqq 1). \tag{5}$$

Put

$$(x-1)\,(x-2)\cdots(x-p+1) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}. \tag{6}$$

Then GLAISHER[2]) has proved that for $p>3$, $1<2\,t<p-1$

$$\frac{1}{p} A_{2t} \equiv -\frac{1}{2\,t} B_{2t} \pmod{p}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{p^2} A_{2t+1} \equiv \frac{2\,t+1}{4\,t} B_{2t} \pmod{p}. \tag{8}$$

---

[1]) J. W. L. GLAISHER, *Congruences Relating to the Sum of Products of the First n Numbers and to Other Sums of Products*, Quart. J. Math. *31*, 1–35 (1900).

[2]) J. W. L. GLAISHER, *On the Residues of the Sums of Products of the First $p-1$ Numbers, and Their Powers, to Modulus p^2 or p^3*, Quart. J. Math. *31*, 321–353 (1900).