Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 1

Artikel: Bestimmung des Flächeninhalts eines Ellipsen- und Hyperbelsektors auf abbildungsgeometrischer Grundlage

Autor: Reuschel, Arnulf

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13567

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band III Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 15. Januar 1948

Bestimmung des Flächeninhalts eines Ellipsen- und Hyperbelsektors auf abbildungsgeometrischer Grundlage

1. *Einleitung*

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die Formeln für den Flächeninhalt eines Ellipsen- und Hyperbelsektors auf abbildungsgeometrischem Wege ohne jede Zwischenrechnung herleiten kann, wenn man beachtet, daß jede Ellipse als affines Bild des Einheitskreises und jede Hyperbel als affines Bild der gleichseitigen Einheitshyperbel aufgefaßt werden kann. Während sich nun diese Auffassung bei der Ellipse allgemein eingebürgert hat[1]), ist dies bei der Hyperbel nicht der Fall.

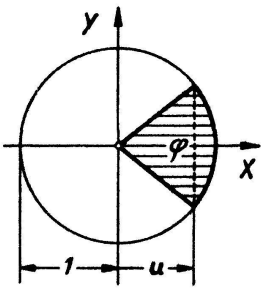

Abb. 1

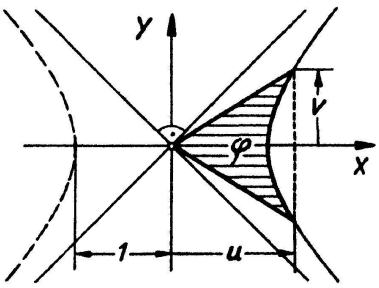

Abb. 2

Abb. 1. Geometrische Veranschaulichung der Funktionen Kosinus und Arkuskosinus: $u = \cos\varphi$ und $\varphi = \arccos u$.

Abb. 2. Geometrische Veranschaulichung der Funktionen Cosinus hyperbolicus und Areacosinus hyperbolicus: $u = \cosh\varphi$ und $\varphi = \operatorname{arcosh} u$.

Um die Herleitung der gewünschten Formeln möglichst geschlossen darstellen zu können, erschien es wünschenswert, einleitend an die gemeinsame Auffassung der Kreis- und Hyperbelfunktionen als Flächenfunktionen zu erinnern. Diese Betrachtungen werden aber nur in dem Ausmaß durchgeführt, das für den angestrebten Zweck erforderlich ist. Im übrigen wird ein Hauptaugenmerk darauf gerichtet, die Gleichartigkeit des Vorgangs zur Auffindung der beiden in Rede stehenden Flächeninhalte möglichst deutlich in Erscheinung treten zu lassen.

[1]) In einer sehr ansprechenden Weise findet sich diese Idee durchgeführt in A. Hess, Planimetrie, 6. Aufl., Berlin 1941, §§ 18 und 19, und A. Hess, Analytische Geometrie, 2. Aufl., Berlin 1939, Abschn. VII.

2. *Die Kreis- und Hyperbelfunktionen als Flächenfunktionen*

Der Abstand u einer Sehne des Einheitskreises von seinem Mittelpunkt ist eine Funktion der zugehörigen Sektorfläche φ. Diese besondere Funktion ist die Kosinusfunktion: $u = \cos \varphi$. Eine Zahl φ und ihr zugehöriger Kosinuswert $u = \cos \varphi$ können demnach am Einheitskreis durch einen Sektor vom Flächeninhalt φ und durch den Mittelpunktsabstand u der zugehörigen Kreissehne geometrisch veranschaulicht werden[1]) (Abb. 1).

Aber auch die Flächenmaßzahl φ eines Sektors des Einheitskreises ist eine Funktion des Mittelpunktsabstandes u der zum Kreissektor gehörigen Sehne. Diese Funktion heißt Arkuskosinus: $\varphi = \arccos u$ (Umkehrungsfunktion oder inverse Funktion des Kosinus). Der Arkuskosinus einer Zahl u stimmt demnach mit der Flächenmaßzahl desjenigen Sektors des Einheitskreises überein, dessen zugehörige Sehne vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand u hat[2]). Mit anderen Worten:

Der Flächeninhalt eines Sektors des Einheitskreises ist der Arkuskosinus der Maßzahl des Mittelpunktsabstandes der zugehörigen Sehne.

Da bei unseren Flächenberechnungen stets nur der absolute Wert der Flächenmaßzahlen interessiert, werden wir nur positive Flächenmaßzahlen benutzen. Weiter werden wir in dieser Arbeit nur solche Sektoren des Einheitskreises betrachten, die höchstens die ganze Kreisfläche bedecken, deren Flächeninhalt φ also die Flächenmaßzahl π des Einheitskreises nicht übersteigt ($\varphi \leqq \pi$). Wir legen ferner fest, daß wir den Mittelpunktsabstand der zu einem Kreissektor gehörigen Sehne positiv oder negativ rechnen wollen, je nachdem diese Sehne ganz innerhalb oder ganz außerhalb der Sektorfläche verläuft. Mit den eben getroffenen Vereinbarungen ist dann durch den mit einem Vorzeichen versehenen Mittelpunktsabstand einer Sehne des Einheitskreises der Flächeninhalt des zugehörigen Sektors eindeutig bestimmt.

Wenn wir es hier vorziehen, die Kreisfunktionen nicht als Winkelfunktionen, sondern als Flächenfunktionen einzuführen, so geschieht dies, um gewisse Gleichartigkeiten mit den Hyperbelfunktionen besser hervortreten zu lassen.

Der Kreis läßt sich als Ellipse mit gleich langer Haupt- und Nebenachse auffassen. Die Hyperbeln mit gleich langer Haupt- und Nebenachse (gleichseitige Hyperbeln) nehmen daher unter den Hyperbeln eine ähnliche ausgezeichnete Stellung ein wie die Kreise unter den Ellipsen. Als Gegenstück zum Einheitskreis betrachten wir nun einen Ast einer gleichseitigen Hyperbel mit der Halbachsenlänge 1, die wir gleichseitige Einheitshyperbel nennen wollen.

Der Abstand u einer zur Hauptachse normalen Sehne der gleichseitigen Einheitshyperbel von ihrem Mittelpunkt ist eine Funktion des Flächeninhalts φ des zugehörigen Hyperbelsektors. Diese Funktion ist der hyperbolische Kosinus (cosinus hyperbolicus): $u = \cosh \varphi$. Eine Zahl φ und ihr hyperbolischer Kosinuswert $u = \cosh \varphi$

---

[1]) Bei einem Sektor des Einheitskreises von der Flächenmaßzahl φ hat bekanntlich der halbe zum Sektor gehörige Kreisbogen die Länge (Längenmaßzahl) φ, und damit hat auch der halbe zum Sektor gehörige Mittelpunktswinkel das Bogenmaß φ. Die vorhin gegebene Definition des Kosinus als Flächenfunktion stimmt demnach mit der üblichen Definition als Kreisbogen- oder Winkelfunktion überein, bei der der Kosinus durch die Abszisse desjenigen Punktes des Einheitskreises veranschaulicht wird, zu dem in einem Polarkoordinatensystem mit dem Kreismittelpunkt als Pol der Polarwinkel φ gehört.

[2]) Der hier verwendeten geometrischen Deutung würde es entsprechen, die Umkehrungsfunktion des Kosinus, analog den Umkehrungen der Hyperbelfunktionen, mit Areakosinus zu bezeichnen und durch arcos abzukürzen.

lassen sich somit an der gleichseitigen Einheitshyperbel durch einen zur Hauptachse symmetrischen Hyperbelsektor vom Flächeninhalt φ und durch den Mittelpunktsabstand u der zugehörigen Hyperbelsehne geometrisch veranschaulichen[1]) (Abb. 2). Für reelle Werte von φ ist $u \geqq 1$.

Es ist aber auch die Flächenmaßzahl φ eines zur Hauptachse symmetrischen Sektors der gleichseitigen Einheitshyperbel eine Funktion des Mittelpunktsabstandes u der zum Hyperbelsektor gehörigen Sehne. Diese Funktion heißt Areacosinus hyperbolicus: $\varphi = \operatorname{arcosh} u$ (Umkehrungsfunktion oder inverse Funktion des hyperbolischen Kosinus). Der Areacosinus hyperbolicus einer Zahl u stimmt demnach mit der Flächenmaßzahl desjenigen zur Hauptachse symmetrischen Sektors der gleichseitigen

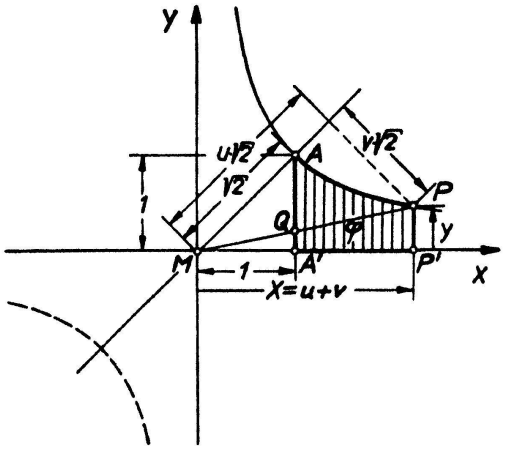

Abb. 3. Darstellung der Funktion Areacosinus hyperbolicus durch die logarithmische Funktion.

Einheitshyperbel überein, dessen zugehörige Sehne vom Mittelpunkt der Hyperbel den Abstand u hat. Oder anders ausgedrückt:

Der Flächeninhalt eines zur Hauptachse symmetrischen Sektors der gleichseitigen Einheitshyperbel ist der Areacosinus hyperbolicus der Maßzahl des Mittelpunktsabstandes der zugehörigen Hyperbelsehne.

Durch den (immer positiv genommenen) Mittelpunktsabstand einer zur Hauptachse normalen Sehne des betrachteten Astes der gleichseitigen Einheitshyperbel ist der Flächeninhalt des zugehörigen Hyperbelsektors dem absoluten Zahlenwert nach eindeutig bestimmt.

Es soll nun in anschaulicher Weise gezeigt werden, daß sich der Areacosinus hyperbolicus mit Hilfe des Logarithmus ausdrücken läßt. Damit erhalten wir zugleich eine andere Gestalt für die Flächeninhaltsformel eines zur Hauptachse symmetrischen Sektors der gleichseitigen Einheitshyperbel.

Wir üben dazu auf die gleichseitige Einheitshyperbel eine $\sqrt{2}$fache Vergrößerung aus. Die in Abb. 3 gleichzeitig durchgeführte Achteldrehung nach links dient nur dazu, ein übersichtlicheres Bild zu erzielen. Die halbe Hauptachse der vergrößerten Hyperbel hat die Länge $\sqrt{2}$. Die zur Hauptachse normale Sehne, die der vorhin betrachteten in der vergrößerten Figur entspricht, hat vom Hyperbelmittelpunkt M

[1]) Während sich der Arkuskosinus am Einheitskreis außer als Flächeninhalt eines Kreissektors auch noch als Länge eines Kreisbogens deuten läßt, kann der Areacosinus hyperbolicus an der gleichseitigen Einheitshyperbel nur als Flächeninhalt eines Hyperbelsektors, dagegen aber nicht auch als Länge eines Hyperbelbogens veranschaulicht werden.

den Abstand $u\sqrt{2}$ und ihre halbe Länge beträgt $v\sqrt{2}$. Die Normalprojektion MP' des aus diesen beiden Streckenlängen gebildeten rechtwinkligen Hakens auf die waagrechte Asymptote hat demnach die Länge $X = u + v$.

Da sich bei dieser Vergrößerung die Flächeninhalte verdoppeln, so hat in der vergrößerten Figur der von der Hauptachse begrenzte Hyperbelsektor MPA ebenfalls den Flächeninhalt $\varphi = \operatorname{arcosh} u$. Benutzt man in Abb. 3 die Asymptoten als Koordinatenachsen, so hat die dort dargestellte gleichseitige Hyperbel die Gleichung $XY = 1$. Daraus liest man unmittelbar ab, daß die beiden Dreiecke $MA'A$ und $MP'P$ flächengleich sind. Fügt man nun an den Hyperbelsektor MPA das Dreieck $MP'P$ an und trennt dann von der zusammengesetzten Figur das mit dem früheren flächengleiche Dreieck $MA'A$ ab, so erhält man das an dem Hyperbelbogen AP anliegende Flächenstück $A'P'PA$, das somit denselben Flächeninhalt φ hat, wie der Hyperbelsektor MPA.

Für den Inhalt des Flächenstücks $A'P'PA$ findet man aber auch den Wert

$$\varphi = \int_1^X Y\,dX = \int_1^X \frac{dX}{X} = \ln X = \ln(u + v).$$

Damit ergeben sich also für den Flächeninhalt φ die beiden gleichwertigen Ausdrücke

$$\varphi = \operatorname{arcosh} u = \ln(u + v).$$

Dies besagt:

Der Inhalt eines zur Hauptachse der gleichseitigen Einheitshyperbel symmetrischen Sektors ist auch gleich dem natürlichen Logarithmus der Summe aus der Maßzahl des Mittelpunktsabstandes der zum Hyperbelsektor gehörigen Sehne und der Maßzahl der halben Hyperbelsehne.

3. *Flächeninhaltsformeln für einen zur Hauptachse einer Ellipse oder Hyperbel symmetrischen Sektor*

Von einer Ellipse mit den Halbachsen a und b soll nun ein Sektor betrachtet werden, der von zwei zur Hauptachse symmetrischen Halbmessern der Ellipse und dem dazwischenliegenden Ellipsenbogen begrenzt wird (Abb. 4).

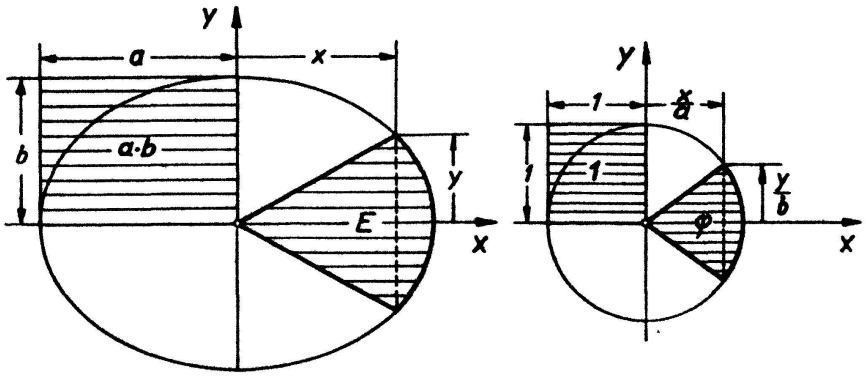

Abb. 4. Die Ellipse als affines Bild des Einheitskreises.

Um den Flächeninhalt E dieses Ellipsensektors zu bestimmen, ist es am einfachsten, wenn man sich die Ellipse durch eine affine Transformation aus dem Einheitskreis

hervorgegangen denkt. Bei dieser affinen Umformung des Einheitskreises werden seine von links nach rechts verlaufenden Abmessungen auf das a-fache gestreckt und zugleich seine Abmessungen in der dazu senkrechten Richtung auf das b-fache verzerrt. Die zum betrachteten Ellipsensektor gehörige Ellipsensehne möge vom Mittelpunkt der Ellipse den Abstand x haben. Sie geht demnach bei dieser Affinität aus jener Kreissehne hervor, die vom Mittelpunkt des Kreises die Entfernung $\frac{x}{a}$ besitzt.

Jedes Flächenstück in der Ebene des Einheitskreises wird durch die Affinität in ein Flächenstück der Ellipsenebene mit dem $(a\,b)$-fachen Flächeninhalt umgewandelt, wie man an einer von zwei solchen zueinander normalen Halbmessern des Einheits-

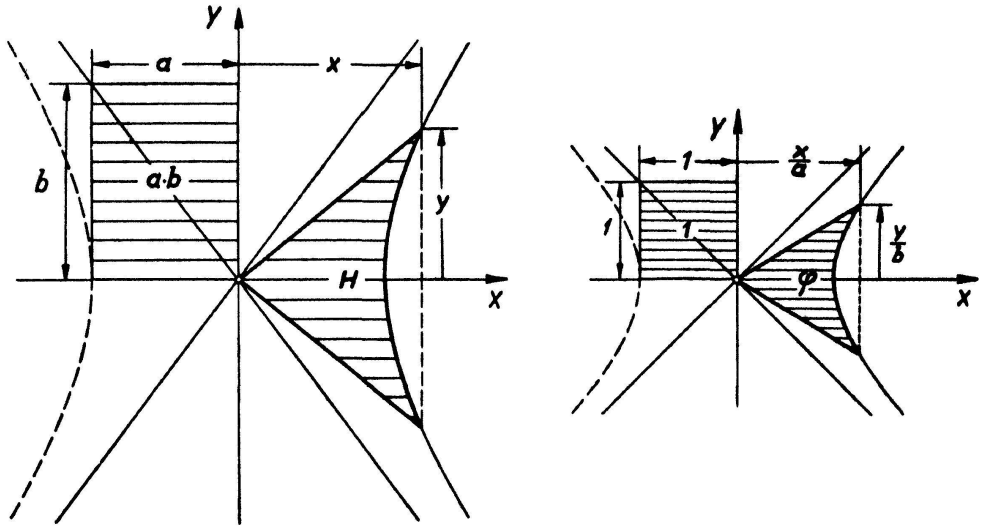

Abb. 5. Die allgemeine Hyperbel als affines Bild der gleichseitigen Einheitshyperbel.

kreises aufgespannten quadratischen Flächeneinheit ohne weiteres erkennt, die durch die Affinität in ein von der halben Haupt- und Nebenachse gebildetes Rechteck umgewandelt wird. Da der Sektor des Einheitskreises, dessen zugehörige Sehne den Mittelpunktsabstand $\frac{x}{a}$ hat, den Flächeninhalt $\varphi = \arccos \frac{x}{a}$ besitzt, so hat der betrachtete Ellipsensektor die Fläche

$$\underline{E = a\,b\,\varphi = a\,b \arccos \frac{x}{a}}.$$

Für $a = b = r$ ergibt sich als Sonderfall, daß ein Kreissektor vom Halbmesser r, dessen zugehörige Sehne vom Mittelpunkt den Abstand x hat, den Flächeninhalt

$$K = r^2 \arccos \frac{x}{r}$$

besitzt. Die vorhin benutzte Affinität ist nun eine Ähnlichkeit mit r-facher linearer Verzerrung (r-fache Streckung).

Es sei nun eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b gegeben, und es soll von ihr der zur Hauptachse symmetrische Sektor betrachtet werden, dessen zugehörige Sehne vom Mittelpunkt der Hyperbel den Abstand x hat (Abb. 5).

Der Flächeninhalt H dieses Hyperbelsektors läßt sich unmittelbar angeben, wenn man die gegebene Hyperbel als affines Bild der gleichseitigen Einheitshyperbel auf-

faßt, und zwar sollen ihre Scheitel durch diese Affinität in die Scheitel der vorgelegten Hyperbel übergeführt werden. Die affine Transformation besteht dann darin, daß die Ebene der gleichseitigen Einheitshyperbel so verzerrt wird, daß jede zur Hauptachse parallele Strecke auf die a-fache Länge ausgedehnt und zugleich jede zur Nebenachse parallele Abmessung auf das b-fache gestreckt wird. Jede in der Ebene der gegebenen Hyperbel liegende Figur hat dann einen $(a\,b)$-mal so großen Flächeninhalt wie diejenige Figur, aus der sie durch die affine Transformation der Ebene der gleichseitigen Einheitshyperbel entstanden ist.

Die Sehne der gegebenen Hyperbel, die im Abstand x parallel zur Nebenachse gezogen wurde, geht sodann bei dieser affinen Verzerrung aus der im Abstand $\frac{x}{a}$ parallel zur Nebenachse verlaufenden Sehne der gleichseitigen Einheitshyperbel hervor. Hat die betrachtete Sehne der gegebenen Hyperbel die Länge $2\,y$, so ist $2\,\frac{y}{b}$ die Längenmaßzahl der entsprechenden Sehne der gleichseitigen Einheitshyperbel. Der zu dieser Sehne gehörige Sektor der gleichseitigen Einheitshyperbel, dessen Flächeninhalt

$$\varphi = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

beträgt, wird dann durch die benutzte affine Transformation in den ursprünglich gegebenen Hyperbelsektor übergeführt. Sein Inhalt ist demnach

$$\underline{H = a\,b\,\varphi = a\,b\,\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = a\,b\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}.$$

ARNULF REUSCHEL, Wien.

Zur Fadenkonstruktion von Graves

Wird um eine Ellipse E ein geschlossener Faden der festen Länge L gelegt und durch einen sich bewegenden Stift S gespannt, so beschreibt S eine zu E konfokale Ellipse E'. Für diese von GRAVES angegebene Verallgemeinerung der «Gärtnerkonstruktion» der Ellipse sind verschiedene Beweise angegeben worden[1]). Neben Ableitungen, die elliptische Integrale bzw. elliptische Koordinaten verwenden, gibt es anschauliche Beweise, die mit infinitesimalgeometrischen Methoden zeigen, daß die Normale in einem Punkt S von E' den Winkel der von S an E gezogenen Tangenten halbiert. Dadurch ist aber bekanntlich die zu E konfokale Ellipse durch S charakterisiert. Man erkennt sofort, daß die erwähnte Eigenschaft der Normalen in einem Punkt von E' bestehen bleibt, wenn man E durch allgemeinere geschlossene konvexe Kurven ersetzt. Wir geben für diese Tatsache einen analytischen Beweis für den Fall, daß E eine stetige Tangente und überall positive, stückweise stetige Krümmung hat, und zeigen, daß E' unter diesen Voraussetzungen eine Eilinie ist, das heißt, stetige Krümmung besitzt.

---

[1]) F. DINGELDEY, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Enzyklopädie der math. Wissenschaften III, 2., 1., S. 120–122. – F. KLEIN, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., S. 35. – J. L. COOLIDGE, History of the conic sections. Oxford 1945, S. 121.