

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Prozessen.
Autor: Zassenhaus, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19200>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen

Herrn E. Artin zum 50. Geburtstag gewidmet

Von HANS ZASSENHAUS, Hamburg

Nach Verteilung der natürlichen Zahlen auf die Restklassen nach einem Modul $m \geq 1$ bilden die in einer Restklasse gelegenen natürlichen Zahlen eine arithmetische Progression

$$a, a + m, a + 2m, \dots$$

mit der Differenz m und dem kleinsten positiven Rest a als Anfangsglied. Wenn a mit m einen Teiler $d > 1$ gemeinsam hat, so geht d auch in allen übrigen Zahlen der Progression auf und dann kann höchstens a eine Primzahl sein. Wenn dagegen a und m teilerfremd sind, so bilden die zu a modulo m kongruenten ganzen Zahlen eine prime Restklasse, die aus lauter zu m teilerfremden Zahlen besteht. Die Anzahl der primen Restklassen ist

$$\varphi(m) = m \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

wobei die Produktbildung über die Primteiler von m zu erstrecken ist.

Fragen wir uns, ob Primzahlen in primen Restklassen enthalten seien, so steht dem jedenfalls keine allgemeine Teilbarkeitseigenschaft entgegen. Statistische Untersuchungen für die kleinsten Moduln ergeben, daß sogar die nicht in m aufgehenden Primzahlen sich annähernd gleich häufig auf die $\varphi(m)$ primen Restklassen modulo m verteilen. Da es aber, wie bereits von *Euklid* gezeigt worden ist, sicher unbegrenzt viele Primzahlen gibt, so liegt die Vermutung nahe, daß es auch in jeder arithmetischen Progression, die aus den in einer primen Restklasse modulo m enthaltenen natürlichen Zahlen gebildet wird, unbegrenzt viele Primzahlen gibt.

Diese Vermutung, die von *Legendre* zuerst ausgesprochen wurde und von ihm als Hilfsmittel zum Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes verwendet wurde, ist von *Dirichlet* (2) 1840 mit den Hilfsmitteln der höheren Analysis bewiesen worden.

Nun ist aber das Problem selbst ein Problem der *elementaren Zahlentheorie* (Zahlentheorie im Bereiche der natürlichen Zahlen).

Schon seit langer Zeit ist die Frage gestellt worden¹⁾, ob es nicht möglich ist, einen finiten Beweis für die Existenz unbegrenzt vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen, deren Differenz teilerfremd zu ihren Gliedern ist, zu führen.

Ich werde zeigen :

Zu beliebig vorgegebener Anzahl ξ läßt sich vermöge endlich vieler Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und zahlentheoretischer Rekursionen, kurz gesagt, in endlich vielen Schritten eine natürliche Zahl N so bestimmen, daß in jeder der $\varphi(m)$ primen Restklassen modulo m durch das bekannte Siebverfahren mindestens ξ Primzahlen zwischen 1 und N gefunden werden. Um dies einzusehen, sind nur Abschätzungen notwendig, die sich auf endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, zahlentheoretische Rekursionen und Anwendungen der Monotonieregeln im Bereiche der ganzen rationalen Zahlen stützen.

Es wird also weder das Auswahlpostulat der Mengenlehre, noch das tertium non datur der mathematischen Logik, noch der Reduzibilitätssatz der Logistik zu der Einsicht, daß durch das Siebverfahren in jeder arithmetischen Progression mit gegebener Differenz $m \geq 1$ und gegebenem zu m teilerfremdem Anfangsgliede a unbegrenzt viele Primzahlen gefunden werden, gebraucht.

Der Weg zu dieser Einsicht besteht in der konsequenten Ersetzung der Grenzwerte der analytischen Zahlentheorie durch ihre Näherungswerte. Mit den Näherungswerten werden im wesentlichen die analogen Operationen ausgeführt, wie sie in dem von Dirichlet-Dedekind (1) geführten Beweise, s. a. (3), mit den Grenzwerten selbst ausgeführt werden.

Mit den algebraischen Zahlen wird bei der Beweisführung unbedenklich so wie gewohnt gerechnet. Es ist nämlich in der Dissertation von *Hollkott* (4) gezeigt worden, daß die Anordnung bzw. die Bewertung durch Absolutbetrag sowie die Ausführung der vier Rechenoperationen im Körper der reell algebraischen Zahlen bzw. im Körper der komplexen algebraischen Zahlen sich finit ausführen läßt unter der alleinigen Voraussetzung, daß sich die entsprechenden Prozesse im Bereiche der ganzen rationalen Zahlen finit ausführen lassen. Somit bedeutet z. B. das Zeichen

n^s (n eine natürliche Zahl, $s = \frac{p}{q}$ rational) im Sinne der Arbeit von *Hollkott* das dem Polynome

¹⁾ Zum Beispiel von E. Artin in der Vorlesung über Zahlentheorie.

$$x^q - n^p$$

eindeutig zugeordnete positiv reelle Wurzelsymbol usf.

Die finite Ausführbarkeit der zahlentheoretischen Prozesse im Bereiche der ganzen rationalen Zahlen wollen wir als ein dem menschlichen Geiste innewohnendes Vermögen voraussetzen.

Es möge bemerkt werden, daß sich in der Beantwortung der Frage, was ein elementarer Beweis eines zahlentheoretischen oder algebraischen Satzes sei, seit den Zeiten *Kroneckers*, *Mertens* und *Schurs* bis heute durch die in die Zwischenzeit fallenden Grundlagenuntersuchungen eine Wandlung vollzogen hat.

So spricht *Mertens* (7) in der Einleitung einer seiner Arbeiten über die Primzahlen der arithmetischen Progressionen davon, daß er das Nichtverschwinden der L -Reihen in $s = 1$ elementar beweisen würde und versteht darunter die Beschränkung auf die Sätze der reellen Differential- und Integralrechnung, während die Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel *Mertens* offenbar als nicht elementar erscheint.

Vom finiten Standpunkt erscheint die Heranziehung der reellen Differential- und Integralrechnung ebenso fragwürdig wie die Verwendung der Analysis im Bereiche der komplexen Zahlen.

Kronecker (5), wohl der erste Intuitionist, hat in seinen zahlentheoretischen Vorlesungen den Dirichletschen Beweis so abgeändert, daß der vorhin formulierte scharfe Satz, der ja über die unbestimmt formulierte Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen noch hinausgeht, bewiesen wird. Er verwendet dabei auch analytische Grenzwerte. Immerhin ist es möglich, daß *Kronecker* sich unter den von ihm verwendeten Grenzwerten nicht die Limeszahlen, sondern Näherungswerte, welche die Limeszahlen mit einer im Geiste stets mitgegebenen Genauigkeit approximieren, vorgestellt hat.

Den schärferen Ansprüchen der Finitisten wird aber erst genügt, wenn einmal rechnerisch dargetan wird: Es geht auch in endlich vielen Schritten.

Sachlich ist zu bemerken, daß von mir eine *ungleichmäßige Asymptotik rechts von 1* angewendet wird, mit deren Hilfe der Ausdruck

$$\sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

abgeschätzt wird.

Kronecker dagegen schätzt den Ausdruck

$$\sum_{p \leq N} \frac{\chi(p) \log p}{p^s}$$

zunächst noch mit analytischen Hilfsmitteln ab. Aber im Anschluß an

einen von mir im Mathematischen Seminar Hamburg gehaltenen Vortrag zeigte *E. Witt*, daß sich die Kroneckerschen Abschätzungen auch auf elementarem Wege erhalten lassen. Dieser Weg hat den Vorteil, daß die im § 8 dieser Arbeit auftretende Schwierigkeit, die analytische Fortsetzung des Logarithmus einer komplexen Funktion längs eines Stückes der reellen Achse elementar arithmetisch durchzuführen, vermeidet. Dafür steckt allerdings in der Formulierung des Ergebnisses selbst noch eine Reihe von Grenzwerten. Es muß erst noch $\log p$ durch einen genügend genauen Näherungswert ersetzt werden.

Zu wünschen wäre die Auffindung einer gleichmäßigen Asymptotik rechts von 1 etwa so, daß die Summation und Restabschätzung der Dirichlet-Reihen für $L(s, \chi)$ sowie die Ausmultiplikation und Restabschätzung der Eulerschen Produktentwicklung von $L(s, \chi)$ so ausgeführt wird, daß gleichmäßige Konvergenz in einem Intervall $1 \leq s \leq s_0 > 1$ eintritt.

Vielleicht wäre es dann möglich, den Schauplatz in $s = 1$ zu verlegen, so daß am Schluß eine Abschätzung für

$$\sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p}$$

sowie für

$$\varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv a(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p}$$

erhalten würde. Mir ist dies auf elementarem Wege nicht gelungen.

Schließlich bleibt noch die Frage offen, ob es nicht noch viel einfachere elementar arithmetische Beweise für die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen gibt, etwa ein dem *Euklidschen* Beweisverfahren für die Existenz beliebig vieler Primzahlen verwandtes Verfahren.

Wenn wir den zu beweisenden Satz für einen Modul m gezeigt haben, so folgt seine Gültigkeit offensichtlich für alle Teiler von m . Wir wollen und können annehmen, daß m durch 4 teilbar ist. Dann ist $\varphi(m)$ eine grade Zahl.

K sei der m -te Kreiskörper, ζ eine in K enthaltene primitive m -te Einheitswurzel.

In dieser Arbeit wird gesetzt:

$$C_1 = (4\varphi(m))^{\varphi(m)}$$

$$C_2 = 2C_1 - 1 + \varphi(m)(3 + m)$$

$$C_3 = C_2 + \frac{1}{2}\varphi(m)$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= 3^{C_3} \varphi(m)^{(\varphi(m)-2)} \\
C_5 &= 6 C_4 \varphi(m) \\
s_0 &= 1 + \frac{1}{C_5} .
\end{aligned}$$

Ferner sei k eine natürliche Zahl, die den Ungleichungen

$$k \geq C_5 \quad (1)$$

$$k \geq 18 \cdot 3^{\left(\frac{1}{3} \varphi(m) (\xi+18) + \sum_{p|m} \frac{1}{p}\right)+1} \quad (2)$$

genügt, z. B.

$$k = C_5 + 18 \cdot 3^{\varphi(m) (\xi+6) + m}$$

und es sei

$$s_1 = 1 + \frac{1}{k} .$$

Schließlich sei N eine natürliche Zahl, die den Ungleichungen

$$\frac{k+1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{13}{28} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{1}{2} , \quad (3a)$$

$$\frac{k+1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{4}{7} \varphi(m) , \quad (4)$$

$$\frac{k+1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{1}{9 C_4} , \quad (5)$$

$$\frac{C_5}{(N+1)^{\frac{1}{C_5}}} \leq \frac{1}{3} \quad (6)$$

genügt, z. B.

$$N = (9(k+1) C_4)^k .$$

Mit Hilfe der Zahl N wird berechnet :

$$L = \left[\frac{N(s_0 - s_1)}{2\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{N_0}} - 1\right)} \right] + 1 \geq \frac{N(s_0 - s_1)}{2\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{N_0}} - 1\right)} > N(s_0 - s_1)$$

$$M = \prod_{p \leq N} p^{\varphi(m)(N+4)} > N$$

N_0 = Anzahl der Primzahlen $\leq N$, die nicht in m aufgehen

$$N_1 = (\varphi(m) - 1) \cdot N_0$$

N_2 = Anzahl der Primzahlen $\leq N$

N_3 = Anzahl der Primideale aus K , die in Primzahlen $\leq N$ aufgehen vermehrt um N_2 .

§ 1. Herleitung einer unteren Schranke für die Anzahl der ganzen Ideale beschränkter Norm im m -ten Kreiskörper nach Dedekind

t sei eine natürliche Zahl. Die Anzahl der ganzzahligen Lösungen des Systemes der $\varphi(m)$ Ungleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\varphi(m)} \sqrt[t]{t} &< x_0 - \frac{3}{4} \sqrt[t]{t} \leq \frac{1}{4\varphi(m)} \sqrt[t]{t}, \\ -\frac{1}{4\varphi(m)} \sqrt[t]{t} &< x_i \leq \frac{1}{4\varphi(m)} \sqrt[t]{t}. \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \dots, \varphi(m) - 1)$$

ist mindestens gleich

$$\left[\frac{\sqrt[t]{t}}{2\varphi(m)} \right]^{\varphi(m)}.$$

Jeder Lösung dieser Ungleichungen ordnen wir die ganze Kreiskörperzahl

$$\xi = \xi(x_0, x_1, \dots, x_{\varphi(m)-1}) = \sum_{i=0}^{\varphi(m)-1} x_i \zeta^i$$

zu. Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig, da ja die Zahlen $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{\varphi(m)-1}$ eine Basis von K über dem Körper R der rationalen Zahlen bilden. Die Norm dieser Kreiskörperzahlen ist höchstens t , weil ja

$$\begin{aligned} 0 \leq N_{K/R}(\xi) &= \prod_{\substack{0 < \nu < m \\ (\nu, m)=1}}^{\varphi(m)-1} x_i \zeta^{\nu i} = \prod_{\substack{0 < \nu < m \\ (\nu, m)=1}}^{\varphi(m)-1} |x_i \zeta^{\nu i}| \leq \prod_{\substack{0 < \nu < m \\ (\nu, m)=1}}^{\varphi(m)-1} |x_i \zeta^{\nu i}| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\varphi(m)-1} |x_i| \right)^{\varphi(m)} \leq \left(\sqrt[t]{t} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4\varphi(m)} + \frac{\varphi(m)-1}{4\varphi(m)} \right) \right)^{\varphi(m)} \\ &\leq t \end{aligned}$$

ist. Die Zahlen ξ sind von Null verschieden, weil

$$\begin{aligned} |\xi| &= \left| \sum_{i=0}^{\varphi(m)-1} x_i \zeta^i \right| \geq |x_0| - \sum_{i=1}^{\varphi(m)-1} |x_i| > \sqrt[t]{t} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4\varphi(m)} - \frac{\varphi(m)-1}{4\varphi(m)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[t]{t} > 0 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Zwei von diesen Kreiskörperzahlen, etwa

$$\xi = \xi(x_0, x_1, \dots, x_{\varphi(m)-1})$$

und

$$\xi' = \xi(x'_0, x'_1, \dots, x'_{\varphi(m)-1})$$

sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleich sind, denn es ist

$$\begin{aligned} 0 \leq N_{K/R} \left(\frac{\xi}{\xi'} - 1 \right) &= \frac{N_{K/R}(\xi - \xi')}{N_{K/R}(\xi')} = \frac{|N_{K/R}(\xi - \xi')|}{|N_{K/R}(\xi')|} \\ &= \prod_{\substack{0 \leq \nu < m \\ (\nu, m)=1}} \frac{\left| \sum_0^{\varphi(m)-1} (x_i - x'_i) \zeta^{\nu i} \right|}{\left| \sum_0^{\varphi(m)-1} x'_i \zeta^{\nu i} \right|} \leq \prod_{\substack{0 \leq \nu < m \\ (\nu, m)=1}} \frac{\sum_0^{\varphi(m)-1} |x_i - x'_i|}{|x_0| - \sum_1^{\varphi(m)-1} |x_i|} \\ &< \frac{\left(\varphi(m) \sqrt[t]{t} \cdot \frac{1}{2 \varphi(m)} \right)^{\varphi(m)}}{\left(\frac{1}{2} \sqrt[t]{t} \right)^{\varphi(m)}} = 1, \end{aligned}$$

wenn also der Quotient $\frac{\xi}{\xi'}$ ganz algebraisch ist, so ist die Norm $N_{K/R} \left(\frac{\xi}{\xi'} - 1 \right)$ ganz rational, wegen der eben hergeleiteten Ungleichung Null, mithin ist $\frac{\xi}{\xi'} - 1 = 0$, $\xi = \xi'$.

So finden wir für die Anzahl $A(t)$ der ganzen Ideale $\neq 0$ von K , deren Norm nicht größer als t ist, die Abschätzung

$$A(t) \geq \left[\frac{\sqrt[t]{t}}{2 \varphi(m)} \right]^{\varphi(m)}.$$

Wenn aber $1 \leq t \leq (4 \varphi(m))^{\varphi(m)}$ ist, dann ist $A(t) \geq 1 \geq \frac{t}{(4 \varphi(m))^{\varphi(m)}}$, da ja $N_{K/R}(1) = 1$ ist. Wenn dagegen $t > (4 \varphi(m))^{\varphi(m)}$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} A(t) &\geq \left[\frac{\sqrt[t]{t}}{2 \varphi(m)} \right]^{\varphi(m)} \geq \left(\frac{\sqrt[t]{t}}{2 \varphi(m)} - 1 \right)^{\varphi(m)} \\ &\geq \left(\frac{\sqrt[t]{t}}{4 \varphi(m)} + \left(\frac{\sqrt[t]{t}}{4 \varphi(m)} - 1 \right) \right)^{\varphi(m)} > \frac{t}{(4 \varphi(m))^{\varphi(m)}}. \end{aligned}$$

Also gilt für jede natürliche Zahl t bis N die Ungleichung

$$A(t) \geq \frac{t}{C_1} \tag{7}$$

mit

$$C_1 = (4 \varphi(m))^{\varphi(m)}.$$

§ 2. Einige elementare Ungleichungen

a) Man hat für natürliche Zahlen l, n die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{l(n+1)}\right)^l &= 1 + \frac{1}{n+1} + \left(1 - \frac{1}{l}\right) \frac{1}{n+1} + \dots \\ &+ \left(1 - \frac{1}{l}\right) \dots \left(1 - \frac{l-1}{l}\right) \frac{1}{(n+1)^l} \leq 1 + \frac{1}{n+1} \\ &+ \frac{1}{(n+1)^2} \dots + \frac{1}{(n+1)^l} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

also mit

$$s = 1 + \frac{1}{l}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{s-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{s-1}} &< 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{s-1}{n+1} &< \frac{(n+1)^{s-1}}{n^{s-1}} \\ \frac{1}{(n+1)^{s-1}} + \frac{s-1}{(n+1)^s} &< \frac{1}{n^{s-1}} \\ n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) &< \frac{s}{s-1} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Die Ungleichung (8) wird zur Abschätzung von ζ -Ausschnitten verwendet, nämlich: wenn A, B ganze Zahlen, die in der Beziehung $B > A \geq 0$ stehen, sind, so gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{A+1}^B \frac{1}{n^s} &= \sum_{A+1}^B \frac{n - (n-1)}{n^s} = \frac{-A}{(A+1)^s} + \frac{B}{(B+1)^s} + \sum_{A+1}^B n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ &\leq \frac{B}{(B+1)^s} + \frac{s}{s-1} \sum_{A+1}^B \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{(B+1)^{s-1}} + (l+1) \left(\frac{1}{(A+1)^{s-1}} - \frac{1}{(B+1)^{s-1}} \right) \leq \frac{l+1}{(A+1)^{\frac{1}{l}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

b) Nach *Cauchy* läßt sich elementar beweisen, daß das arithmetische Mittel nicht negativer Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist. Also gilt für reell algebraische Zahlen $a_i \geq -1$ ($i=1, 2, \dots, n$) die Ungleichung

$$\prod_1^n (1 + a_i) \leq \left(1 + \frac{1}{n} \sum_1^n a_i\right)^n. \quad (10)$$

Für natürliche Zahlen n, l gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{1}{3!} + \dots \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{l}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \dots \left(\frac{1 + \frac{l}{n}}{1 + \frac{l-1}{n}}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \dots \left(1 + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{l-1}{n}}\right)^n \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nl} < 3^l. \end{aligned}$$

Also gilt für natürliche Zahlen p, q, n die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{p}{nq}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{p}{qn}\right)^{qn}\right)^{\frac{1}{q}} \leq 3^{\frac{p}{q}} \quad (11)$$

§ 3. Abschätzung des Quotienten zweier ζ -Partialsummen

Von nun an möge s irgendeine der $L + 1$ rationalen Zahlen

$$s_1, s_1 + \frac{1}{L}, s_1 + \frac{2}{L}, \dots, s_1 + \frac{L-1}{L}, s_0$$

bedeuten. Man setze

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(s) &= \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\ \hat{\Pi}_K(s) &= \prod_{p \leq N} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^g}, \end{aligned}$$

wobei die Produktbildung jeweils über die Primzahlen, die nicht größer als N sind, zu erstrecken ist und ferner für eine Primzahl p jeweils die Zerlegung

$$p = p_1^e p_2^e \dots p_g^e$$

in Primideale von K angesetzt worden ist, so daß die Normenbeziehung

$$N_{K/R}(\mathfrak{p}_i) = p^f$$

und die Zahlbedingung

$$e f g = \varphi(m)$$

besteht. Es handelt sich bei den beiden Produkten offenbar um Partialprodukte der Eulerschen Produktentwicklung der Riemannschen ζ -Funktion bzw. der zu K gehörigen ζ -Funktion der Analysis.

Wir bemerken, daß das spezielle Zerlegungsgesetz des m -ten Kreiskörpers lautet

$$\begin{aligned} e = f = 1 & \text{ ist mit } p \equiv 1(m) \text{ gleichwertig,} \\ e \neq 1 & \text{ ist mit } p/m \text{ gleichwertig.} \end{aligned}$$

Die Zahlen e lassen sich für die Primteiler von m leicht explicit angeben. Desgleichen lassen sich die Grade f für zu m teilerfremde Primzahlen allgemein als die Ordnung der zu p gehörigen primen Restklasse modulo m in der Gruppe der $\varphi(m)$ primen Restklassen modulo m charakterisieren, so daß sich die drei Zahlen e, f, g in jedem Falle leicht berechnen lassen.

Wir bestimmen für jede Primzahl $p \leq N$ einen Exponenten $\nu_p \geq 5$, für den

$$\nu_p \equiv 0(\varphi(m))$$

und

$$p^{\nu_p} > N$$

ist, z. B.

$$\nu_p = \varphi(m)(N + 4) .$$

Nun setzen wir

$$F(s) = \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^{s\nu_p}} \right)$$

und finden die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 1 \geq F(s) &\geq 1 - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s\nu_p}} \geq 1 - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^5} \geq 1 - \sum_2^N \frac{1}{n^5} \\ &\geq 1 - \left(2 \cdot \frac{1}{2^5} + 4 \cdot \frac{1}{4^5} + \dots + 2^N \cdot \frac{1}{2^{5N}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{(2^4)^2} + \dots + \frac{1}{(2^4)^{N-1}} \right) > 1 - \frac{1}{15} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(s) F(s) &= \prod_{p \leq N} \frac{1 - \frac{1}{p^{s\nu_p}}}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p \leq N} \sum_{i=0}^{\nu_p-1} \frac{1}{p^{is}} = \sum_{\substack{\lambda p < \nu_p \\ p \leq N}} \frac{1}{(\prod p^{\lambda p})^s} \\ &\leq \sum_1^M \frac{1}{n^s} , \quad \text{wobei} \quad M = \prod_{p \leq N} p^{\nu_p} > N \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}_K(s) &\geq \prod_{p \leq N} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^{s/\nu p}}}{1 - \frac{1}{p^{ts}}} \right)^g = \prod_{p \leq N} \prod_{j=1}^g \frac{1 - \frac{1}{(N(p_j))^{s\nu p}}}{1 - \frac{1}{N(p_j)^s}} = \prod_{p \leq N} \prod_{j=1}^g \sum_{i=0}^{\nu p-1} \frac{1}{N(p_j)^{is}} \\
 &= \sum_{\substack{p \leq N \\ \lambda_{p,j} < \nu p}} \frac{1}{N(\prod_{j=1}^g p_j^{\lambda_{p,j}})^s} \geq \sum_{\substack{\alpha \text{ ganzes Ideal} \\ N(\alpha) \leq N}} \frac{1}{N(\alpha)^s} \\
 &= \sum_1^N \frac{A(n) - A(n-1)}{n^s} = \frac{A(N)}{(N+1)^s} + \sum_1^N A(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\
 &\geq \frac{1}{C_1} \left(\frac{N}{(N+1)^s} + \sum_1^N n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right) = \frac{1}{C_1} \sum_1^N \frac{1}{n^s}.
 \end{aligned}$$

Für den Quotienten von $\hat{\Pi}_K(s)$ mit $\hat{\Pi}(s)$ ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\Pi}_K(s)}{\hat{\Pi}(s)} &= \frac{\hat{\Pi}_K(s) F(s)}{\hat{\Pi}(s) F(s)} \geq \frac{\frac{1}{C_1} \sum_1^N \frac{1}{n^s} \cdot \frac{14}{15}}{\sum_1^M \frac{1}{n^s}} = \frac{14}{15 C_1} \left(1 - \frac{\sum_{N+1}^M \frac{1}{n^s}}{\sum_1^M \frac{1}{n^s}} \right) \\
 &\geq \frac{14}{15 C_1} \left(1 - \frac{\sum_{N+1}^M \frac{1}{n^{s_1}}}{1} \right) \geq \frac{14}{15 C_1} \left(1 - \frac{k+1}{(N+1) \frac{1}{k}} \right) \\
 &\geq \frac{14}{15 C_1} \left(1 - \frac{13}{28} \right) = \frac{1}{2 C_1}. \quad (\text{vgl. (3) !})
 \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\Pi}_K(s)}{\hat{\Pi}(s)} &= \prod_{p \leq N} \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{\left(1 - \frac{1}{p^{fs}} \right)^g} \leq \left(1 + \frac{1}{N_3} \sum_{p \leq N} \left(g \frac{1}{p^{fs}} + \frac{g \frac{1}{p^{2fs}}}{1 - \frac{1}{p^{fs}}} - \frac{1}{p^s} \right) \right)^{N_3} \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{N_3} \left(\varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^s} + \varphi(m) \sum_{\substack{p \not\equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^{2s}} + \varphi(m) \sum_{p|m} \frac{1}{p} + \varphi(m) \frac{\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{2s}}}{1 - \frac{1}{2}} - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^s} \right) \right)^{N_3} \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{N_3} \left(\varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^s} + 3 \varphi(m) \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^2} + \varphi(m) m \right) \right)^{N_3}, \\
 \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^2} &\leq \sum_2^N \frac{1}{n^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + \dots + 2^N \cdot \frac{1}{(2^N)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2N} < 1.
 \end{aligned}$$

Somit folgt die beiderseitige Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C_1} &\leq \frac{\hat{\Pi}_K(s)}{\Pi(s)} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{N_3} \left(\varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^s} + 3\varphi(m) + \varphi(m)m \right) \right)^{N_3}. \end{aligned}$$

Allgemein folgt aber aus dem Bestehen der Ungleichungen

$$0 < A \leq \left(1 + \frac{B}{n}\right)^n \quad (n \text{ natürliche Zahl})$$

entweder $B > 0$ oder $B < 0$ und

$$\frac{1}{A} \geq \frac{1}{\left(1 - \frac{|B|}{n}\right)^n} \geq \left(1 + \frac{|B|}{n}\right)^n \geq 1 + |B| = 1 - B,$$

also folgt in jedem Falle die Ungleichung

$$B \geq \min\left(1 - \frac{1}{A}, 0\right).$$

Da $C_1 \geq 2$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^s} &\geq 1 - 2C_1 - \varphi(m) \left(3 + \sum_{p|m} \frac{1}{p}\right) \\ &\geq 1 - 2C_1 - \varphi(m)(3 + m) = -C_2. \end{aligned} \quad (12)$$

§ 4. Charaktere modulo m

Zerlege m in das Potenzprodukt verschiedener Primzahlen $2, p_1, \dots, p_r$:

$$m = 2^{\nu_0+1} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r}$$

mit

$$2 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_r,$$

$$\nu_i > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Suche eine primitive Kongruenzwurzel g_i modulo $p_i^{\nu_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), ferner für $i = 0, 1, 2, \dots, r$ eine primitive $\varphi(p_i^{\nu_i})$ -te Einheitswurzel ζ_i . Dann ist für jede zu m teilerfremde Zahl n das System der Kongruenzen

$$n \equiv g_i^{a_{i,n}} (p_i^{\nu_i}) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$n \equiv (-1)^{a_n} 5^{a_{0,n}} (2^{\nu_0+1})$$

lösbar, wobei die Exponenten $a_{i,n}$ modulo $\varphi(p_i^{v_i})$ eindeutig bestimmt sind. Wir definieren *Charaktere modulo m* durch die Festsetzung

$$\chi_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r}(n) = (-1)^{a_n \mu} \zeta_0^{a_0, n \mu_0} \zeta_1^{a_1, n \mu_1} \dots \zeta_r^{a_r, n \mu_r}$$

$$0 \leq \mu < 2, \quad 0 \leq \mu_i < \varphi(p_i^{v_i}) = p_i^{v_i-1}(p_i - 1)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, r$$

dagegen soll

$$\chi_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r}(n) = 0$$

gesetzt werden, sobald n und m einen gemeinsamen Teiler > 1 haben. Die Anzahl der untereinander verschiedenen Charaktere modulo m ist

$$2 \cdot \varphi(2^{v_0}) \varphi(p_1^{v_1}) \dots \varphi(p_r^{v_r}) = \varphi(m) .$$

Sie haben die Eigenschaften

- I. $\chi(n) = \chi(n'),$ wenn $n \equiv n' (m),$
- II. $\chi(nn') = \chi(n) \cdot \chi(n'),$
- III. $\chi(1) = 1 .$

IV. Mit χ ist auch die konjugiert komplexe Funktion χ^* ein Charakter:

$$\chi_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r}^* = \chi_{\mu, -\mu_0, -\mu_1, \dots, -\mu_r} ,$$

wobei die Indizes μ_i bzw. $-\mu_i$ modulo $\varphi(p_i^{v_i})$ abgeändert werden dürfen.

Das Produkt eines Charakters mit seinem konjugiert komplexen Werte ist stets der *Hauptcharakter*, der durch die Formel

$$\chi_1(n) = \chi_{00 \dots 0}(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (n, m) = 1 \\ 0 & \text{wenn } (n, m) > 1 \end{cases}$$

erklärt wird. Wenn $\chi = \chi^*$ ist, so ist χ ein *reeller Charakter*.

V. Für jeden Nichthauptcharakter χ ist

$$\sum_1^m \chi(n) = 0 .$$

Denn eine der m Zahlen $1, 2, \dots, m$ hat die Eigenschaft $\chi(n') \neq 1, 0,$ so daß n' zu m teilerfremd sein muß. Andererseits ist

$$\chi(n') \cdot \sum_1^m \chi(n) = \sum_1^m \chi(n') \chi(n) = \sum_1^m \chi(n' n) = \sum_1^m \chi(n) ,$$

denn mit n durchläuft auch $n' n$ ein Vertretersystem der Restklassen modulo m . Da nun in der Gleichung

$$(\chi(n') - 1) \cdot \sum_1^m \chi(n) = 0$$

durch den ersten Faktor links dividiert werden darf, so folgt die behauptete Relation.

VI. Das Produkt zweier Charaktere ist wieder ein Charakter:

$$\chi_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r} \chi_{\mu'_0 \mu'_1 \dots \mu'_r} = \chi_{\mu+\mu', \mu_0+\mu'_0, \mu_1+\mu'_1, \dots, \mu_r+\mu'_r},$$

wobei rechts die Indizes zu reduzieren sind:

$$(\mu + \mu') \bmod 2, \quad (\mu_i + \mu'_i) \bmod \varphi(p_i^{\nu_i}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r) .$$

VII. Es ist

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{wenn } n \equiv 1(m) \\ 0, & \text{wenn } n \not\equiv 1(m) . \end{cases}$$

Vorstehende Relation ist sicher richtig, wenn $n \equiv 1(m)$ oder wenn $(n, m) > 0$. Wenn aber $n \not\equiv 1(m)$ und $(n, m) = 1$ ist, so finden wir durch höchstens $r + 1$ Proben eine Primzahl p_i , für die $n \equiv 1(p_i^{\nu_i})$ ist, also entweder $a_{i,n} \not\equiv 0(\varphi(p_i^{\nu_i}))$ oder $n \equiv -1(2^{\nu_0+1})$, mithin ist wenigstens einer der Charakterwerte

$$\chi_{100 \dots 0}(n), \quad \chi_{010 \dots 0}(n), \dots, \chi_{000 \dots 01}(n)$$

von 1 verschieden. Sei also für einen Charakter χ' die Zahl $\chi'(n) - 1$ von Null verschieden, dann ist

$$\begin{aligned} (\chi'(n) - 1) \sum_{\chi} \chi(n) &= \sum_{\chi} (\chi'(n) \chi(n) - \chi(n)) \\ &= \sum_{\chi} \chi' \chi(n) - \sum_{\chi} \chi(n) = \sum_{\chi} \chi(n) - \sum_{\chi} \chi(n) = 0, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{\chi} \chi(n) = 0 ,$$

wobei zu beachten ist, daß wegen IV, VI mit χ auch $\chi' \chi$ die $\varphi(m)$ Charaktere modulo m , nur in anderer Reihenfolge, durchläuft.

§ 5. $L(1, \chi) \neq 0$ elementar arithmetisch

Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ modulo m erkläre man

$$\begin{aligned} \hat{H}(s, \chi) &= \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\ \hat{L}(s, \chi) &= \sum_1^N \frac{\chi(n)}{n^s} . \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um Partialprodukte der Eulerschen Produktentwicklung bzw. um Partialsummen der Dirichletschen Reihenentwicklung der L -Reihen der Analysis. Man hat wegen $\nu_p \equiv 0 (\varphi(m))$

$$1 \geq F_1(s) = \prod_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \left(1 - \frac{1}{p^{\nu_p s}}\right) = \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{\nu_p s}}\right) \geq \frac{14}{15} \quad \text{wie in § 3,}$$

$$F_1(s) \hat{\Pi}(s, \chi) = \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{\chi(p)^{\nu_p}}{p^{\nu_p s}}\right) \bigg/ \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \prod_{p \leq N} \sum_{i=0}^{\nu_p-1} \frac{\chi(p)^i}{p^{is}} = \sum_{\substack{n = \prod_{p \leq N} p^{\lambda_p} \\ \lambda_p < \nu_p}} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$|F_1(s) \hat{\Pi}(s, \chi) - \hat{L}(s, \chi)|$$

$$= \left| \sum_{\substack{n = \prod_{p \leq N} p^{\lambda_p} \\ \lambda_p < \nu_p}} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^{s_1}} \leq \frac{k+1}{(N+1)^{1/k}} \leq \frac{4}{7} \varphi(m). \quad (\text{vgl. (4)!})$$

Um $\hat{L}(s, \chi)$ nach oben abzuschätzen, wird die summatorische Funktion

$$S(n, \chi) = \sum_{\nu=1}^n \chi(\nu)$$

eingeführt. Wegen Eigenschaft V der Charaktere ist

$$S(m, \chi) = 0$$

und wegen Eigenschaft I ist

$$S(lm, \chi) = 0$$

für alle natürlichen Zahlen l ; für $l=0$ wird $S(0, \chi) = 0$ auf definitorischem Wege erreicht. Da nun die Summanden $\chi(\nu)$ in jedem Intervall $lm+1, lm+2, \dots, (l+1)m$ genau $\varphi(m)$ -mal den Betrag 1 haben, aber sonst dort verschwinden, so folgt

$$|S(n, \chi)| \leq \frac{1}{2} \varphi(m),$$

also ist

$$\begin{aligned} |\hat{L}(s, \chi)| &= \left| \sum_1^N \frac{S(n, \chi) - S(n-1, \chi)}{n^s} \right| \\ &= \left| \frac{S(N, \chi)}{(N+1)^s} + \sum_1^N S(n, \chi) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right| \\ &\leq \frac{\varphi(m)}{2} \left(\frac{1}{(N+1)^s} + \sum_1^N \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right) = \frac{1}{2} \varphi(m), \end{aligned}$$

mithin

$$|\hat{\Pi}(s, \chi)| = |F_1(s) \hat{\Pi}(s, \chi) - \hat{L}(s, \chi) + \hat{L}(s, \chi)| \cdot \frac{1}{F_1(s)} \leq \left(\frac{4}{7} \varphi(m) + \frac{1}{2} \varphi(m) \right) \cdot \frac{15}{14} = \varphi(m).$$

Um $|\hat{\Pi}(s, \chi)|$ auch nach unten abzuschätzen, bilden wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\left| \prod_{\chi' \neq \chi_1} \hat{\Pi}(s, \chi') \right|^2} &= \prod_{p \leq N} \prod_{\chi' \neq \chi_1} \left| 1 - \frac{\chi'(p)}{p^s} \right|^2 \\
 &= \prod_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \left(\prod_{\substack{\chi' \text{ reell} \\ \chi' \neq \chi_1}} \left(1 - \frac{\chi'(p)}{p^s} \right)^2 \cdot \prod_{\chi' \neq \chi} \left(1 - \frac{\chi'(p) + \chi'^*(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right) \right) \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{2N_1} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \left(- \sum_{\substack{\chi' = \chi'^* \\ \chi' \neq \chi_1}} \frac{2\chi'(p)}{p^s} - \sum_{\chi' \neq \chi^*} \frac{\chi'(p) + \chi'^*(p)}{p^s} + \sum_{\chi' \neq \chi'^*} \frac{1}{p^{2s}} \right) \right)^{2N_1} \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{2N_1} \sum_{p \leq N} \left(- \sum_{\chi' \neq \chi_1} \frac{2\chi'(p)}{p^s} + \varphi(m) \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^2} \right) \right)^{2N_1} \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{N_1} \left(\sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \frac{1}{p^s} - \varphi(m) \sum_{\substack{p \equiv 1(m) \\ p \leq N}} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \varphi(m) \right) \right)^{2N_1} \quad (\text{vgl. VII.}) \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{N_1} \left(C_2 + \frac{1}{2} \varphi(m) \right) \right)^{2N_1} = \left(1 + \frac{C_3}{N_1} \right)^{2N_1} \quad (\text{vgl. (12)!}) \\
 &\leq 3^{2C_3} . \quad (\text{vgl. (11)!})
 \end{aligned}$$

$$|\hat{\Pi}(s, \chi)| = \frac{\left| \prod_{\chi' \neq \chi_1} \hat{\Pi}(s, \chi') \right|}{\prod_{\substack{\chi' \neq \chi \\ \chi' \neq \chi_1}} |\hat{\Pi}(s, \chi')|} \geq \frac{1}{3^{C_3} \varphi(m)^{(\varphi(m)-2)}} = \frac{1}{C_4} . \quad (13)$$

§ 6. Stetigkeit von $L(s, \chi)$ elementar arithmetisch

Sei ϱ rational > 1 , also $\varrho = \frac{p}{q}$ mit $p > q > 0$, p, q ganz rational, ferner x rational und $0 < |x| < 1$, so daß $-1 < y = (1+x)^\varrho - 1 < 1$ und $y \neq 0$ ist. Setze

$$F(\eta) = (1+\eta)^p - \left(1 + \frac{p}{q} ((1+\eta)^\varrho - 1) \right),$$

dann ist

$$F(0) = 0 .$$

Nach Hollkott (4) läßt sich finit eine reell algebraische Zahl η_1 konstruieren, für die

$$\frac{F(y)}{y} = \frac{F(y) - F(0)}{y - 0} = F'(\eta_1)$$

mit $0 < \frac{\eta_1}{y} < 1$ ist. Nun ist

$$F'(\eta) = p((1 + \eta)^{p-1} - (1 + \eta)^{q-1}) = p(1 + \eta)^{q-1}((1 + \eta)^{p-q} - 1) ,$$

$$F'(\eta_1) \eta_1 > 0 ,$$

$$F(y) = F'(\eta_1) \eta_1 \cdot \frac{y}{\eta_1} > 0 .$$

Die Einsetzung von x und ϱ ergibt

$$(1 + x)^e > 1 + \varrho x .$$

Für $0 < x < 1$ folgt

$$\frac{1}{(1 - x)^e} = \left(1 + \frac{x}{1 - x}\right)^e > 1 + \frac{\varrho x}{1 - x}$$

$$(1 - x)^e < \frac{1}{1 + \frac{\varrho x}{1 - x}} .$$

Schließlich ergibt sich für $0 \leq x \leq 1$, $\varrho \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{\varrho x}{1 + (\varrho - 1)x} \leq 1 - (1 - x)^e \leq \varrho x .$$

Sei nun $1 < s_1 \leq s < s' \leq s_0 \leq 2$ und wie bisher s und s' rational, ferner setze

$$\frac{s'}{s} = 1 + \varepsilon$$

mit positiv rationalem ε . Dann ist

$$3^\varepsilon - (1 + \varepsilon) > 0 . \quad (\text{vgl. (11)!})$$

Schließlich sei n eine natürliche Zahl ≥ 3 . Man setze

$$l = \left[\frac{(n + 1)^{s'+2}}{n^{s'+2} s (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon))} \right] + 1 ,$$

dann gilt für die Zahl

$$q = \left(\frac{n + 1}{n} \right)^{\frac{1}{l}}$$

die Ungleichung

$$1 < q \leq \frac{n + 1}{n} ,$$

ferner

$$q^l = \frac{n + 1}{n} = (1 + (q - 1))^l \geq 1 + l(q - 1) ,$$

$$q - 1 \leq \frac{1}{n l} \leq \frac{n^{s'+1}}{(n + 1)^{s'+2} s (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon))} .$$

Weiter setze man

$$\frac{1}{q} = 1 - x, \quad \text{also} \quad 0 < x = 1 - \frac{1}{q} < 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{s \left(1 - \frac{1}{q}\right)}{1 - \frac{1}{q^s}} - \frac{s' \left(1 - \frac{1}{q}\right)}{1 - \frac{1}{q^{s'}}} &= \frac{s x}{1 - (1 - x)^s} - \frac{s' x}{1 - (1 - x)^{s'}} \\ &\leq \frac{s x}{\frac{s x}{1 + (s-1)x}} - \frac{s' x}{s' x} = (s-1)x \leq x = \frac{q-1}{q} < q-1, \end{aligned}$$

ferner für $0 \leq \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{s}{(n q^\lambda)^{s+1}} - \frac{s'}{(n q^\lambda)^{s'+1}} &= \frac{s}{(n q^\lambda)^{s'+1}} ((n q^\lambda)^s)^\varepsilon - (1 + \varepsilon) \\ &\geq \frac{s}{(n+1)^{s'+1}} (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{(n+1)^{s'+1}} (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)) &= \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{s}{(n+1)^{s'+1}} (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)) (n q^{\lambda+1} - n q^\lambda) \\ &\leq \sum_0^{l-1} \left(\frac{s}{(n q^\lambda)^{s+1}} - \frac{s'}{(n q^\lambda)^{s'+1}} \right) (n q^{\lambda+1} - n q^\lambda) \\ &= \frac{s(q-1)}{n^s} \sum_0^{l-1} \frac{1}{(q^s)^\lambda} - \frac{s'(q-1)}{n^{s'}} \sum_0^{l-1} \frac{1}{(q^{s'})^\lambda} \\ &= \frac{s(q-1)}{1 - \frac{1}{q^s}} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{s'(q-1)}{1 - \frac{1}{q^{s'}}} \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{s(q-1)}{1 - \frac{1}{q^s}} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right) \right) &\geq \\ \geq \frac{s}{(n+1)^{s'+1}} (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)) - q \left(\frac{s \left(1 - \frac{1}{q}\right)}{1 - \frac{1}{q^s}} - \frac{s' \left(1 - \frac{1}{q}\right)}{1 - \frac{1}{q^{s'}}} \right) \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right) \\ \geq \frac{s}{(n+1)^{s'+1}} (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)) - \frac{n+1}{n} \frac{n^{s'+1}}{(n+1)^{s'+2}} s (3^\varepsilon - (1 + \varepsilon)) \cdot \frac{1}{n^{s'}} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right) \geq 0.$$

Nun sei $1 < s_1 \leq s < s' \leq s_0 = 1 + \frac{1}{C_5}$ und $\chi \neq \chi_1$. Unter Beachtung der Tatsachen, daß $\chi(1) = 1$ ist und wegen 2/m ferner $\chi(2) = 0$ ist, finden wir

$$\begin{aligned}
 |\hat{L}(s, \chi) - \hat{L}(s', \chi)| &= \left| \sum_3^N \left(\frac{\chi(n)}{n^s} - \frac{\chi(n)}{n^{s'}} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_3^N (S(n, \chi) - S(n-1, \chi)) \cdot \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^{s'}} \right) \right| \\
 &= \left| -S(2, \chi) \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{3^{s'}} \right) + S(n, \chi) \left(\frac{1}{(N+1)^s} - \frac{1}{(N+1)^{s'}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=3}^N S(n, \chi) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right) \right) \right| \\
 &\leq \frac{\varphi(m)}{2} \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{3^{s'}} + \frac{1}{(N+1)^s} - \frac{1}{(N+1)^{s'}} \right) \\
 &\quad + \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \left(\frac{1}{n^{s'}} - \frac{1}{(n+1)^{s'}} \right) \right) = \varphi(m) \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{3^{s'}} \right) \\
 &\leq \varphi(m) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{s_0}} \right) = \varphi(m) \left(\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3} \right)^{s_0} \right) \leq \varphi(m) \left(\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2^{s_0}}{3} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{3} \varphi(m) (s_0 - 1) = \frac{1}{9C_4} \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\hat{\Pi}(s, \chi) - \hat{\Pi}(s', \chi)| &\leq |\hat{\Pi}(s, \chi) - F_1(s) \hat{\Pi}(s, \chi)| + |F_1(s) \hat{\Pi}(s, \chi) - \hat{L}(s, \chi)| \\
 &\quad + |\hat{L}(s, \chi) - \hat{L}(s', \chi)| + |\hat{L}(s', \chi) - F_1(s) \hat{\Pi}(s', \chi)| \\
 &\quad + |F_1(s) \hat{\Pi}(s', \chi) - \hat{\Pi}(s', \chi)| \\
 &\leq |\hat{\Pi}(s, \chi)| \cdot |1 - F_1(s)| + \frac{k+1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{9C_4} + \frac{k+1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} + |\hat{\Pi}(s', \chi)| \cdot |F_1(s) - 1| \\
 &\leq \frac{1}{15} |\hat{\Pi}(s, \chi)| + \frac{1}{3C_4} + \frac{1}{15} |\hat{\Pi}(s', \chi)| \leq \frac{2}{5} |\hat{\Pi}(s, \chi)| + \frac{|\hat{\Pi}(s', \chi)|}{15} \quad (\text{vgl. (5)!})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\hat{\Pi}(s', \chi)| &= |\hat{\Pi}(s, \chi) + (\hat{\Pi}(s', \chi) - \hat{\Pi}(s, \chi))| \\
 &\leq |\hat{\Pi}(s, \chi)| + |\hat{\Pi}(s, \chi) - \hat{\Pi}(s', \chi)| \leq \frac{7}{5} |\hat{\Pi}(s, \chi)| + \frac{|\hat{\Pi}(s', \chi)|}{15} \\
 |\hat{\Pi}(s', \chi)| &\leq \frac{3}{2} |\hat{\Pi}(s, \chi)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\hat{H}(s, \chi) - \hat{H}(s', \chi)| &\leq \frac{2}{5} |\hat{H}(s, \chi)| + \frac{1}{15} |\hat{H}(s', \chi)| \\
&\leq \frac{1}{2} |\hat{H}(s, \chi)|
\end{aligned} \tag{14}$$

§ 7. Der Logarithmus elementar arithmetisch

Für komplexe algebraische Zahlen z , die nicht negativ reell oder 0 sind, wird unter den zwei Lösungen der Gleichung

$$t^2 - z = 0$$

genau eine durch die Forderung der Positivität des Realteiles:

$$R(t) > 0$$

ausgezeichnet. Wir bezeichnen sie mit $\sqrt{z}$. Die Zahl $\sqrt{z}$ wird durch die Bedingungen

$$(\sqrt{z})^2 = z$$

$$R(\sqrt{z}) > 0$$

eindeutig gekennzeichnet.

Die Funktionalgleichung

$$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \tag{15}$$

ist allgemein nicht richtig, z. B. nicht für $z_1 = z_2 = -1 + i$. Aber sie gilt unter der zusätzlichen Bedingung

$$R(z_1) > 0, \quad R(z_2) > 0. \tag{16}$$

Setzen wir nämlich

$$\sqrt{z_j} = \alpha_j + i \beta_j \quad (j = 1, 2; \alpha_j, \beta_j \text{ reell}),$$

so folgt

$$\alpha_j^2 - \beta_j^2 = R(z_j) > 0, \quad \alpha_j = |\alpha_j| > |\beta_j|,$$

$$\begin{aligned}
R(\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2}) &= \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| - \beta_1 \beta_2 \\
&\geq |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| - |\beta_1| \cdot |\beta_2| > 0.
\end{aligned}$$

Da aber $(\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2})^2 = \sqrt{z_1}^2 \cdot \sqrt{z_2}^2 = z_1 z_2$ ist, so ergibt sich (15).

Definition:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\sqrt{z}}$$

Durch diese Festsetzung ist $\sqrt[n]{z}$ für komplexe algebraische Zahlen z , die nicht negativ reell oder 0 sind, eindeutig erklärt. Es gilt

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{z})^{2^n} &= z \\ (\sqrt[n]{z})^{2^\nu} &= \sqrt[n-\nu]{z} \quad (0 \leq \nu < n) \end{aligned}$$

$$R(\sqrt[n]{z}) > 0 \quad \text{für } n > 0 .$$

Wenn $R(z_1) > 0$, $R(z_2) > 0$, so gilt überdies die Funktionalgleichung

$$\sqrt[n]{z_1 z_2} = \sqrt[n]{z_1} \cdot \sqrt[n]{z_2} .$$

Zwischenbetrachtung: Sei $|z| < 1$, dann ist

$$R(1+z) > 0$$

$$R(\sqrt{1+z}) > 0 ,$$

setze $u = \sqrt{1+z} - 1$, dann ist

$$Ru = R\sqrt{1+z} - 1 > -1$$

$$2 + Ru > 1$$

$$|u| \cdot |2+u| \geq |u| \cdot R(2+u) = |u| \cdot (2+Ru) \geq -Ru(2+Ru)$$

$$1 - |u| \cdot |2+u| \leq (1+Ru)^2$$

$$\sqrt{1 - |u| \cdot |2+u|} \leq 1 + Ru = R(1+u)$$

$$\sqrt{1 - |z|} \leq R(\sqrt{1+z}) \quad (17)$$

$$|u| = \frac{|z|}{|1 + \sqrt{1+z}|} \leq \frac{|z|}{R(1 + \sqrt{1+z})} = \frac{|z|}{1 + R(\sqrt{1+z})} < |z| \leq 1$$

$$|2+u| \geq 2 - |u|$$

$$1 - |u| \cdot |2+u| \leq (1 - |u|)^2$$

$$\sqrt{1 - |u| \cdot |2+u|} \leq 1 - |u|$$

$$|u| \leq 1 - \sqrt{1 - |u| \cdot |2+u|}$$

$$|u| = |\sqrt{1+z} - 1| \leq 1 - \sqrt{1 - |z|} . \quad (18)$$

Behauptung :

$$R(\sqrt[2^n]{1+z}) \geq \sqrt[2^n]{1-|z|} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Beweis für $n = 0$ trivial, für $n = 1$ geht (19) in (17) über, sei also $n > 1$ und die Behauptung bis $n - 1$ einschließlich bewiesen. Es ist

$$R(\sqrt[2^n]{1+z}) = R(\sqrt[2^{n-1}]{1+u}) \geq \sqrt[2^{n-1}]{1-|u|} \geq \sqrt[2^{n-1}]{1-(1-\sqrt[2^{n-1}]{1-|z|})} = \sqrt[2^n]{1-|z|},$$

womit der Beweis auch für den Exponenten n erbracht ist. Wie früher bewiesen wurde, ist

$$\sqrt[2^n]{1-|z|} \geq 1 - \frac{|z|}{2^n}.$$

Also gilt für $|z| < 1$ die Ungleichung

$$R(\sqrt[2^n]{1+z}) \geq 1 - \frac{|z|}{2^n}. \quad (20)$$

Wir definieren nun für algebraische Zahlen z , die nicht negativ reell oder Null sind, als arithmetischen Ersatz für den Logarithmus :

$$l_n(z) = 2^n(\sqrt[2^n]{z} - 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für $n > 0$, $|z| \leq \frac{1}{2}$ ist unter Verwendung von (20)

$$\begin{aligned} |l_n(1+z) - z| &= |2^n(\sqrt[2^n]{1+z} - 1) - z| \\ &= \frac{|(2^n \sqrt[2^n]{1+z} - (2^n + z)) (2^n \sqrt[2^n]{1+z} + (2^n + z))|}{|2^n \sqrt[2^n]{1+z} + 2^n + z|} \\ &\leq \frac{|4^n \sqrt[2^{n-1}]{1+z} - 4^n - 2^{n+1}z - z^2|}{|R(2^n \sqrt[2^n]{1+z} + 2^n + z)|} = \frac{2^{n+1} \left| l_{n-1}(1+z) - z - \frac{z^2}{2^{n+1}} \right|}{2^{n+1} R\left(\frac{1}{2} \sqrt[2^n]{1+z}\right) + \frac{1}{2} + \frac{R(z)}{2^{n+1}}} \\ &\leq \frac{|l_{n-1}(1+z) - z| + \frac{1}{2^{n+1}} |z|^2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{|l_{n-1}(1+z) - z| + \frac{|z|^2}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere:

$$l_0(1+z) - z = 0$$

$$|l_1(1+z) - z| \leq \frac{\frac{|z|^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{|z|^2}{2}$$

$$|l_2(1+z) - z| \leq \frac{\frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^2}{8}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{5}{6} |z|^2 .$$

Behauptung: Für $n = 2, 3, \dots$ gilt

$$|l_n(1+z) - z| \leq \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) |z|^2 .$$

Das ist für $n = 2$ bereits gezeigt. Sei $n > 2$ und bis $n - 1$ bereits der Nachweis erbracht. Dann folgt

$$\begin{aligned} |l_n(1+z) - z| &\leq \frac{5}{3} \left(\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) |z|^2 + \frac{|z|^2}{2^{n-1}} \right) / \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leq \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) |z|^2 . \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für n ebenfalls. Allgemein gilt:

$$|l_n(1+z) - z| \leq \frac{5}{3} |z|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) . \quad (21)$$

An die Stelle der Funktionalgleichung des Logarithmus treten Ungleichungen.

Voraussetzung: $R(z_1) > 0, R(z_1 z_2) > 0, \dots, R(z_1 z_2 \dots z_l) > 0$.

$$l_n(z_i) \leq M < \frac{2^{n-1}}{l} \quad (i = 1, 2, \dots, l) .$$

Dann ist

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 z_2},$$

$$\sqrt{z_1 z_2} \cdot \sqrt{z_3} = \sqrt{z_1 z_2 z_3}, \dots, \sqrt{z_1 z_2 \dots z_{l-1}} \cdot \sqrt{z_l} = \sqrt{z_1 z_2 \dots z_l} ,$$

also

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \dots \sqrt{z_l} = \sqrt{z_1 z_2 \dots z_l}$$

$$\sqrt[2^n]{z_1} \cdot \sqrt[2^n]{z_2} \dots \sqrt[2^n]{z_l} = \sqrt[2^n]{z_1 z_2 \dots z_l} .$$

Setzen wir noch

$$u_i = \sqrt[2^n]{z_i} - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, l) ,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
l_n(z_1 z_2 \dots z_l) &= 2^n (\sqrt[2^n]{z_1 z_2 \dots z_l} - 1) = 2^n (\sqrt[2^n]{z_1} \cdot \sqrt[2^n]{z_2} \dots \sqrt[2^n]{z_l} - 1) \\
&= 2^n ((1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_l) - 1) \\
|l_n(z_1 z_2 \dots z_l) - \sum_1^l l_n(z_i)| &= |2^n (\prod_1^l (1 + u_i) - 1) - \sum_1^l u_i| \\
&= 2^n \left| \sum_{r=2}^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq l} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_r} \right| \leq 2^n \sum_{r=2}^l \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_r \leq l} |u_{i_1}| \cdot |u_{i_2}| \dots |u_{i_r}| \\
&\leq 2^n \sum_2^l \binom{l}{r} \frac{M^r}{2^{nr}} \leq 2^n \sum_2^l \frac{l^r}{2} \frac{M^r}{2^{nr}} \leq 2^{n-1} \left(\frac{lM}{2^n} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{lM}{2^n}} \leq \frac{l^2 M^2}{2^n}, \\
|l_n(z_1 z_2 \dots z_l) - \sum_1^l l_n(z_i)| &\leq \frac{l^2 M^2}{2^n}, \tag{22}
\end{aligned}$$

insbesondere im Falle, daß $z_2 = z_1^{-1}$ und $n = 2$

$$|l_n(z_1^{-1}) + l_n(z_1)| \leq \frac{4M^2}{2^n}. \tag{23}$$

§ 8. Die Gleichverteilung der Primzahlen in den primen Restklassen modulo m

Die nicht in m aufgehenden Primzahlen $\leq N$ seien $p_1 < p_2 < \dots < p_{N_0}$, wobei $2 < p_1$, $p_{N_0} \leq N$ ist. Die Zahlen $s_1, s_2, \dots, s_{L-1}, s_L$ wurden bereits durch äquidistante Teilung des Intervalles $s_1 \dots s_0$ erhalten, wobei noch der rechte Endpunkt s_0 des Intervalles auch durch s_{L+1} bezeichnet werden möge.

Setze

$$\alpha_{iN_0+\nu} = \frac{1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i+1}}}{1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i+2}}} - 1 \quad \begin{aligned} &(i = 0, 1, 2, \dots, L-1; \\ &\nu = 1, 2, \dots, N_0). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
|\alpha_{iN_0+\nu}| &= \frac{\left| \frac{1}{p_\nu^{s_i+1}} - \frac{1}{p_\nu^{s_i+2}} \right|}{\left| 1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i+2}} \right|} \leq \frac{1}{p_\nu^{s_i+1}} \frac{\left| 1 - \frac{1}{p_\nu^{s_i+2-s_i+1}} \right|}{1 - \frac{1}{3}} \\
&\leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{N^{(s_0-s_1)/L}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - N \left(1 - \frac{N-1}{N} \right)^{1+\frac{s_0-s_1}{L}} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - N \left(1 - \left(1 + \frac{s_0-s_1}{L} \right) \left(\frac{N-1}{N} \right) \right) \right) = \frac{N-1}{2} \frac{s_0-s_1}{L} < \frac{N(s_0-s_1)}{2L} \\
&< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ferner

$$\prod_{j=1}^{iN_0} (1 + \alpha_j) = \prod_{j=1}^i \prod_{p \leq N} \frac{1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_j}}}{1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_{j+1}}}} = \prod_{j=1}^i \frac{\hat{\Pi}(s_{j+1}, \chi)}{\hat{\Pi}(s_j, \chi)} = \frac{\hat{\Pi}(s_{i+1}, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)},$$

und

$$\begin{aligned} | -1 + \prod_{j=1}^{\nu} (1 + \alpha_{iN_0+j}) | &= | \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq \nu} \alpha_{iN_0+i_1} \alpha_{iN_0+i_2} \dots \alpha_{iN_0+i_j} | \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq \nu} | \alpha_{iN_0+i_1} | | \alpha_{iN_0+i_2} | \dots | \alpha_{iN_0+i_j} | < \left(1 + \frac{N(s_0 - s_1)}{2L} \right)^{\nu} - 1 \\ &\leq \left(1 + \frac{N(s_0 - s_1)}{N(s_0 - s_1)} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{N_0}} - 1 \right) \right)^{N_0} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | -1 + \prod_{j=1}^{iN_0+\nu} (1 + \alpha_j) | &= | -1 + \prod_{j=1}^{iN_0} (1 + \alpha_j) + \prod_{j=1}^{iN_0} (1 + \alpha_j) (-1 + \prod_{j=1}^{\nu} (1 + \alpha_{iN_0+j}) | \\ &\leq \left| -1 + \frac{\hat{\Pi}(s_{i+1}, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right| + \left| \frac{\hat{\Pi}(s_{i+1}, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right| \cdot | -1 + \prod_{j=1}^{\nu} (1 + \alpha_{iN_0+j}) | \\ &< \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1, \end{aligned}$$

$$R\left(\prod_{j=1}^{iN_0+\nu} (1 + \alpha_j)\right) = 1 + R\left(-1 + \prod_{j=1}^{iN_0+\nu} (1 + \alpha_j)\right) \geq 1 - | -1 + \prod_{j=1}^{iN_0+\nu} (1 + \alpha_j) | > 0.$$

Gemäß (21) ergibt sich

$$| l_n(1 + \alpha_j) | \leq | l_n(1 + \alpha_j) - \alpha_j | + | \alpha_j | \leq \frac{5}{3} | \alpha_j |^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1,$$

ebenso

$$\left| l_n \left(\frac{\hat{\Pi}(s_0, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right) \right| < 1.$$

Gemäß (22) folgt für natürliche Zahlen n , die der Ungleichung

$$2^{n-1} > \frac{1}{2} (LN_0)^2 \geq LN_0$$

genügen, wie z. B. für $n = (LN_0)^2$, die Abschätzung

$$\left| l_n \left(\frac{\hat{\Pi}(s_0, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right) - \sum_{j=1}^{LN_0} l_n(1 + \alpha_j) \right| \leq \frac{(LN_0)^2}{2^n} < 1,$$

und daraus

$$\left| \sum_{j=1}^{LN_0} l_n(1 + \alpha_j) \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{LN_0} l_n(1 + \alpha_j) - l_n \left(\frac{\hat{\Pi}(s_0, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right) \right| + \left| l_n \left(\frac{\hat{\Pi}(s_0, \chi)}{\hat{\Pi}(s_1, \chi)} \right) \right| < 1 + 1 = 2.$$

Ferner ist gemäß (21)

$$\left| l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_\mu}} \right) \right| < 1$$

also gemäß (22)

$$\left| l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i}} \right) - \left(l_n(1 + \alpha_{iN_0+\nu}) + l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_{i+1}}} \right) \right) \right| \leq \frac{4}{2^n},$$

also

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq N} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right) - l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^L \sum_{\nu=1}^{N_0} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i}} \right) - l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_{i+1}}} \right) \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{\nu=1}^{N_0} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_i}} \right) - \left(l_n(1 + \alpha_{iN_0+\nu}) + l_n \left(1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^{s_{i+1}}} \right) \right) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{\nu=1}^{N_0} l_n(1 + \alpha_{iN_0+\nu}) \right| \leq \frac{4}{2^n} \cdot L N_0 + 2 < 4 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right| &\leq \left| \sum_{p \leq N} \left(\frac{\chi(p)}{p^{s_1}} + l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right) \right) + \sum_{p \leq N} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) - l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p \leq N} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) + \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) + \sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right| \\ &\leq \sum_{p \leq N} \left| \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} + l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right) \right| + \left| \sum_{p \leq N} \left(l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right) - l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) \right) \right| \\ &\quad + \sum_{p \leq N} \left| l_n \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right) + \frac{\chi(p)}{p^{s_0}} \right| + \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_0}} \\ &\leq \sum_{p \leq N} \frac{5}{6} \frac{1}{p^{2s_1}} + 4 + \sum_{p \leq N} \frac{5}{6} \frac{1}{p^{2s_0}} + \sum_1^N \frac{1}{n^{s_0}} \quad (\text{vgl. (21)!}) \\ &\leq \frac{5}{6} \sum_2^N \frac{1}{n^2} + 4 + \frac{5}{6} \sum_2^N \frac{1}{n^2} + \frac{C_5 + 1}{(N+1)^{\frac{1}{C_5}}} \\ &\leq \frac{5}{6} + 4 + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 6. \quad (\text{vgl. (6)!}) \end{aligned}$$

Für zu m teilerfremde Zahlen a ist die Kongruenz $a b \equiv 1 \pmod{m}$ lösbar. Dann folgt

$$\sum_{\chi} \chi(b) \cdot \sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} = \sum_{p \leq N} \sum_{\chi} \frac{\chi(b) \chi(p)}{p^{s_1}} = \sum_{p \leq N} \frac{\sum_{\chi} \chi(b p)}{p^{s_1}} = \varphi(m) \sum_{p \equiv a(m)} \frac{1}{p^{s_1}},$$

$$\begin{aligned}
\left| \varphi(m) \sum_{p \equiv a} \frac{1}{p^{s_1}} - \sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \frac{1}{p^{s_1}} \right| &= \left| \sum_{\chi \neq \chi_1} \chi(b) \cdot \sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right| \\
&\leq \sum_{\chi \neq \chi_1} \left| \sum_{p \leq N} \frac{\chi(p)}{p^{s_1}} \right| < 6 \varphi(m) .
\end{aligned} \tag{24}$$

§ 9. Abschätzung der ζ -Partialsummen und Schluß

Man hat für natürliche Zahlen k, n und $s_1 = 1 + \frac{1}{k}$

$$\left(1 - \frac{1}{kn}\right)^k < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^k} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$1 - \frac{1}{kn} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$1 - \frac{s_1 - 1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{s_1 - 1}$$

$$\left(\frac{1}{s_1 - 1} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^{s_1 - 1}} < \frac{1}{s_1 - 1} \frac{1}{(n+1)^{s_1 - 1}} ,$$

$$(n+1) \left(\frac{1}{n^{s_1}} - \frac{1}{(n+1)^{s_1}} \right) > \frac{s_1}{s_1 - 1} \left(\frac{1}{n^{s_1 - 1}} - \frac{1}{(n+1)^{s_1 - 1}} \right) \tag{25}$$

$$\sum_1^N \frac{1}{n^{s_1}} = \sum_1^N \frac{(n+1) - n}{n^{s_1}} = -1 + \frac{1}{(n+1)^{s_1 - 1}} + \sum_1^N (n+1) \left(\frac{1}{n^{s_1}} - \frac{1}{(n+1)^{s_1}} \right)$$

$$> -1 + \frac{1}{(N+1)^{s_1 - 1}} + \frac{s_1}{s_1 - 1} \sum_1^N \left(\frac{1}{n^{s_1 - 1}} - \frac{1}{(n+1)^{s_1 - 1}} \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{(N+1)^{s_1 - 1}} + (k+1) \left(1 - \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \right) = k \left(1 - \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{k}}} \right)$$

$$\geq \frac{k}{2} , \quad (\text{vgl. (3 a)!})$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2} &\leq \sum_1^N \frac{1}{n^{s_1}} \leq \prod_{p \leq N} \frac{1 - \frac{1}{p^{\nu_p p^{s_1}}}}{1 - \frac{1}{p^{s_1}}} < \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s_1}}} \leq \left(1 + \frac{1}{N_2} \left(\sum_{p \leq N} \frac{\frac{1}{p^{s_1}}}{1 - \frac{1}{p^{s_1}}} \right) \right)^{N_2} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{N_2} \left(\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}} + 2 \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^2} \right) \right)^{N_2} \leq \left(1 + \frac{1}{N_2} \left(\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}} + 2 \right) \right)^{N_2}
\end{aligned}$$

$$\leq 3^{2+\left[\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}}\right]+1}, \quad 3^{\left[\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}}\right]} \geq \frac{k}{54} \geq 3^{\frac{\varphi(m)}{3}(\xi+18) + \sum_{p|m} \frac{1}{p}},$$

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}} \geq \frac{\varphi(m)}{3}(\xi+18) + \sum_{p|m} \frac{1}{p}.$$

Für die Anzahl $A(a, N)$ der Primzahlen

$$p \leq N \quad \text{und} \quad p \equiv a(m) \quad \text{mit} \quad (a, m) = 1$$

ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned} A(a, N) &\geq 3 \sum_{p \equiv a} \frac{1}{p^{s_1}} \geq \frac{3}{\varphi(m)} \sum_{\substack{p \leq N \\ p \nmid m}} \frac{1}{p^{s_1}} - 6 \cdot 3 \\ &\geq \frac{3}{\varphi(m)} \sum_{p \leq N} \frac{1}{p^{s_1}} - 18 - \frac{3}{\varphi(m)} \sum_{p|m} \frac{1}{p} \\ &\geq \xi + 18 + \frac{3}{\varphi(m)} \sum_{p|m} \frac{1}{p} - 18 - \frac{3}{\varphi(m)} \sum_{p|m} \frac{1}{p} = \xi, \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist!

LITERATUR

- (1) *P. G. Lejeune — Dirichlet — Dedekind*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Braunschweig 1894.
- (2) *P. G. Lejeune — Dirichlet*, Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitesimale à la théorie des nombres.
- (3) *E. Hecke*, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.
- (4) *A. Holzkott*, Finite Konstruktion geordneter algebraischer Erweiterungen, Dissertation Hamburg 1941, Hamb. Abh. 14.
- (5) *L. Kronecker*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, Leipzig 1901.
- (6) *Legendre*, Essai sur la théorie des nombres 1798.
- (7) *Mertens*, Über Dirichletsche Reihen. — Über das Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen mit reellen Gliedern, Wiener Berichte 104 (1895). — Über Multiplikation und Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen, Crelle 117 (1897).

(Eingegangen den 29. April 1948.)

Bemerkung bei der Korrektur: Wie ich unlängst erfuhr, hat Atle Selberg eine elementare Methode entwickelt, mit der er einen anderen elementaren Beweis für den Satz von Dirichlet führen kann.

Kopenhagen, September 1948.