Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper.

Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper

Von T. Szele, Szeged (Ungarn)

Zweck der folgenden Note ist eine wesentliche Verschärfung der beiden bekannten Sätze:

Ist R ein Ring ohne Nullteiler mit Minimalbedingung für Rechts- und Linksideale, so ist R ein Schiefkörper[1]).

In einem kommutativen Ring mit Minimalbedingung ist der Restklassenring nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal teilerlos[2]).

Nach *E. Artin* kann im ersten Satz die Minimalbedingung für Rechtsideale entbehrt werden[3]). Im folgenden soll gezeigt werden, daß man auch anstatt der Minimalbedingung für Linksideale durch bloße Forderung der Existenz *eines minimalen Linksideals* in R auskommt[4]). Es gelten nämlich die Sätze:

Besitzt ein Ring R ohne Nullteiler ein minimales Linksideal, so ist R ein Schiefkörper[5]).

Besitzt ein kommutativer Ring R ein minimales Ideal, so ist der Restklassenring von R nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal in R teilerlos.

Der zweite Satz ist eine unmittelbare Folge des ersten, denn der Restklassenring nach einem Primideal ist ein Integritätsbereich und hat auch (zugleich mit R) offenbar ein minimales Ideal.

---

[1]) Siehe *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra II (1940), S. 141.

[2]) Ebenda S. 142.

[3]) Siehe *E. Artin, C. J. Nesbitt, R. M. Thrall*, Rings with minimum condition (University of Michigan Publications in Mathematics Number 1), 1946, S. 59, Theorem 6.10A.

[4]) Unter einem *minimalen* (oder mit anderem Ausdruck: *einfachen*) Linksideal von R versteht man üblicherweise ein solches Linksideal in R, welches $\neq (0)$ ist und kein Linksideal von R außer sich selbst und (0) umfaßt. Im kommutativen Falle sprechen wir von einem minimalen Ideal schlechthin.

[5]) Daraus folgt: *Ein Ring ist dann und nur dann ein Schiefkörper, falls er nullteilerfrei ist und ein minimales Linksideal besitzt.* Das ist die im Titel angekündigte „kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper".

Der erste Satz läßt sich folgendermaßen beweisen. Sei $\mathfrak{l}$ ein minimales Linksideal in R und $c \neq 0$ ein Element von $\mathfrak{l}$. Dann ist $\mathfrak{l}\cdot c$ ein Linksideal von R, für welches nach Voraussetzung $\mathfrak{l}\cdot c \subseteqq \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\cdot c \neq (0)$, also $\mathfrak{l}\cdot c = \mathfrak{l}$ gilt. Jedes Element von $\mathfrak{l}$ ist demnach in der Gestalt $x\cdot c$ $(x \in \mathfrak{l})$ darstellbar, insbesondere auch c selbst: $ec = c$ $(e \in \mathfrak{l},\ c \neq 0)$. Daraus folgt für das beliebige Element $y \in R$:

$$(y\,e - y)\cdot c = y\,e\,c - y\,c = 0\ ,$$

d. h. $y\,e - y = 0$, da R keinen Nullteiler hat. Folglich ist e ein rechts-Einselement in R. Insbesondere ist $e^2 = e$. Dann gilt aber für das beliebige Element $y \in R$:

$$e(e\,y - y) = e^2\,y - e\,y = 0\ ,$$

d. h. $ey - y = 0$. *Somit ist* e auch zugleich ein links-Einselement, also *Einselement in* R.

Es muß noch gezeigt werden, daß irgendein Element $a \neq 0$ von R ein Linksinverses hat. Statt dessen werden wir mehr, nämlich die Lösbarkeit irgendeiner Gleichung $xa = b$ in R beweisen. Es gilt zunächst $\mathfrak{l} = R$, da wegen $e \in \mathfrak{l}$: $R = Re \subseteqq \mathfrak{l}$ ist. Folglich hat R nur die beiden (trivialen) Linksideale R und (0). Die Menge $R\cdot a$ aber ist ein Linksideal in R, d. h. wegen $a \neq 0$ ist $Ra = R$. Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

(Eingegangen den 20. Januar 1948.)