Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles.

Autor(en): **Ostrowski, Alexandre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **15 (1942-1943)**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14886

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles

Par ALEXANDRE OSTROWSKI à Bâle

1. Soient $A_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $B_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $\nu=1,\ldots,n$, $2n$ fonctions des $x_1,\ldots,x_n$, continues et douées des dérivées continues du premier ordre au voisinage d'un point $P_0(a_1,\ldots,a_n)$.

Si une fonction $z(x_1,\ldots,x_n)$ continue et douée des dérivées continues du premier et du second ordre au voisinage de P_0, satisfait dans ce voisinage aux deux équations

$$X(z)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=0\ ,\quad Y(z)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}B_\nu\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=0\ , \tag{1}$$

elle satisfait aussi au voisinage de P_0 à l'équation

$$Z(z)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=0\ ,\ C_\nu=X(B_\nu)-Y(A_\nu)\ ,\ \nu=1,\ldots,n\ . \tag{2}$$

Ceci résulte évidemment de l'identité

$$Z(u)=X(Y(u))-Y(X(u)) \tag{3}$$

qu'on vérifie immédiatement au voisinage de P_0 pour chaque fonction $u(x_1,\ldots,x_n)$ dont les dérivées premières et secondes restent continues dans ce voisinage.

Ce n'est que tout récemment (1939) que M. *E. Schmidt*[1]) a réussi à démontrer que (2) est encore une conséquence de (1), si l'on suppose seulement que z possède des dérivées continues du *premier* ordre dans le voisinage de P_0. La démonstration de M. *Schmidt* repose sur une transformation assez délicate des intégrales n-ples et permet aussi une extension de la relation (3) au cas où $X(u)$, $Y(u)$ possèdent les dérivées continues du premier ordre.

Une autre démonstration donnée peu de temps après (1940) par M. *O. Perron*[2]) est plus „algébrique", mais encore assez compliquée.

[1]) *E. Schmidt*, Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 48 (1940), pp. 426—432.

[2]) *O. Perron*, Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme. Math. Annalen, Bd. 117 (1940/41), pp. 686—693.

Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration très simple et très élémentaire d'un théorème un peu plus général que celui de M. *Schmidt*. Cette démonstration n'emploie que les notions élémentaires du calcul différentiel, en particulier celle de la différentielle totale.

2. On dit qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une *différentielle totale*[3]) à l'origine $P_0(0, \ldots, 0)$ si l'on a au voisinage de P_0

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu + o(r) \quad , \quad r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \quad , \tag{4}$$

pour $r \to 0$, où $\alpha_\nu = f'_{x_\nu}(0, \ldots, 0)$ sont des constantes.

Nous aurons besoin de quelques lemmes sur les différentielles totales:

a) *Par une homographie régulière*

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\, y_\mu \, , \; y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a'_{\nu\mu}\, x_\mu \, , \quad \nu = 1, \ldots, n \, , \tag{5}$$

une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ douée d'une différentielle totale en P_0 se transforme en une fonction $g(y_1, \ldots, y_n)$ y possédant une différentielle totale, et l'on a en P_0

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y_\nu}\right]_{P_0} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right]_{P_0} \, . \tag{6}$$

On démontre a) en remplaçant les x_ν dans (4) par

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\, y_\mu \, .$$

b) *Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ s'annule en P_0 et y possède une différentielle totale, et si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction continue en P_0, fg possède une différentielle totale en P_0, et l'on a*

$$\left[\frac{\partial (fg)}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} = g_0 \left[\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} \, , \; g_0 = g(0, \ldots, 0) \, . \tag{7}$$

En effet, en posant $g(x_1, \ldots, x_n) = g_0 + \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, où $\sigma(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ avec $r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$, on obtient, en multipliant (4) par g

---

[3]) Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse Infinitésimal, t. 1, 3ème éd., 1914, pp. 140—146. — *I. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), p. 419. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 111—125.

$$fg = \sum_{\nu=1}^{n} g_0 \alpha_\nu x_\nu + o(r) \ . \tag{8}$$

c) *Soit* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *continue au voisinage de* P_0. *Si* $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$, $\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}$, $(\kappa \neq \lambda)$ *existent au voisinage de* P_0 *et possèdent des différentielles totales en* P_0, *on a en* P_0

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}\right) \ . \tag{9}$$

On trouve une démonstration, d'ailleurs très simple, de ce théorème dû à M. *W. H. Young*, dans les traités d'analyse[4]).

3. Voici l'énoncé exact de notre résultat:

Théorème. Soient A_ν, B_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $2n$ *fonctions de* $x_1, \ldots, x_n$, *continues dans le voisinage d'un point* P_0 $(a_1, \ldots, a_n)$ *et douées des différentielles totales en* P_0. *Soit* u *une fonction de* $x_1, \ldots, x_n$ *continue et douée des dérivées continues du premier ordre au voisinage de* P_0. *Alors, si les expressions*

$$X(u) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ , \quad Y(u) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{10}$$

possèdent au point P_0 *des différentielles totales, on a en* P_0

$$Z(u) = X(Y(u)) - Y(X(u)) \ , \tag{11}$$

où $Z(u)$ *est donné par*

$$Z(u) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ , \quad C_\nu = X(B_\nu) - Y(A_\nu) \ . \tag{12}$$

Dans la démonstration, on peut supposer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

4. *Démonstration du théorème.* Posons

$$\left.\begin{aligned} A_\nu^0 &= A_\nu(0, \ldots, 0) \ , & B_\nu^0 &= B_\nu(0, \ldots, 0) \\ A_\nu^* &= A_\nu - A_\nu^0 \ , & B_\nu^* &= B_\nu - B_\nu^0 \end{aligned}\right\} \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{13}$$

D'après l'hypothèse du théorème et le lemme b) du numéro 2, les expressions

[4]) Cf. *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 145—146. — *Hobson*, l. c. pp. 427—428. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., p. 125. Nous donnons un résultat plus général dans une communication: Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, qui paraît dans ce volume p. 222.

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{14}$$

possèdent des différentielles totales en P_0 et l'on a dans ce point

$$X\left[\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial B_\nu^*}{\partial x_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}\right] \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} X(B_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

De même, on a en P_0

$$Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} Y(A_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

Donc, on obtient, en retranchant et en utilisant (12), en P_0

$$X\left(\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) - Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{15}$$

De l'autre côté, puisque les expressions (10) et (14) possèdent en P_0 des différentielles totales, il en est de même, d'après (13), des expressions

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{16}$$

Il suffit maintenant de démontrer que l'on ait, en P_0, la relation

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0 \ , \tag{17}$$

pour en déduire, en y ajoutant (15), la relation (11).

5. Or, si les deux systèmes A_ν^0, B_ν^0 sont proportionnels, (17) est évident. Si ces deux systèmes ne sont pas proportionnels, posons pour $\nu = 1, \ldots, n$:

$$x_\nu = A_\nu^0 y_1 + B_\nu^0 y_2 + \sum_{\mu=3}^{n} a_{\nu\mu} y_\mu \ , \tag{18}$$

en choisissant les constantes $a_{\nu\mu}$ de façon que la transformation (18) soit une homographie non-singulière.

On obtient alors par la relation (6) du lemme a) du numéro 2, en désignant par v la transformée de u:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y_2} = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad ,$$

et ces deux expressions possèdent avec les expressions (16) des différentielles totales en P_0. On a donc en P_0, en appliquant (6) à $\frac{\partial v}{\partial y_2}$ et à $\frac{\partial v}{\partial y_1}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) ,$$

et la relation (17) devient

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \tag{19}$$

et résulte immédiatement du lemme c) du numéro 2, [5]) C. Q. F. D.

---

[5]) Pendant la revision des épreuves j'apprends que M. *Gillis*, Bull. Soc. R. Sc. Liège, Déc. 1940, pp. 197—212, a trouvé indépendamment le théorème de M. *Schmidt*. La démonstration de M. *Gillis* repose sur les mêmes principes que celle de M. *Schmidt*.

(Reçu le 28 juillet 1942.)