Engouffrement symplectique et intersections lagrangiennes.

Autor(en): **Laudenbach, Francois**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **70 (1995)**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-53013

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 70 (1995) 558–614 0010–2571/95/040558–57$1.50 + 0.20/0
© 1995 Birkhäuser Verlag, Basel

Engouffrement symplectique et intersections lagrangiennes

FRANÇOIS LAUDENBACH

Abstract. Let $\{L_t\}$, $t \in [0, 1]$, be a path of exact Lagrangian submanifolds in an exact symplectic manifold that is convex at infinity and of dimension ≥ 6. Under some homotopy conditions, an engulfing problem is solved: the given path $\{L_t\}$ is conjugate to a path of exact submanifolds in T^*L_0. This implies L_t must intersect L_0 at as many points as known by the generating function theory. Our Engulfing theorem depends deeply on a new flexibility property of symplectic structures which is stated in the first part of this work.

En topologie différentielle la méthode d'*engouffrement* a été introduite par E. C. Zeeman utilisée par J. Stallings [St] pour établir l'unicité de la structure différentielle sur $\mathbf{R}^n$, $n \geq 5$. Elle a été aussitôt reprise par B. Mazur [Ma] pour l'équivalence stable des variétés. Dans le deux cas elle est mise en oeuvre dans un procédé de *répétition infinie*.

Dans [EG], Y. Eliashberg et M. Gromov ont donné une version symplectique du théorème de Mazur. Les champs de Liouville complets (voir la définition ci-dessous) y jouent une rôle majeur, le plus souvent grâce aux avatars du "truc d'Alexander" c'est-à-dire des propriétés magiques de l'expression $\frac{1}{t}f(tx)$.

Notre travail développe aussi une méthode d'engouffrement symplectique et propose une alternative topologique dans des problèmes étudiés par M. Gromov puis par A. Floer avec les courbes holomorphes.

La situation

(a) (M^{2n}, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$, supposée exacte, c'est-à-dire $\omega = d\lambda$. La forme λ, comme toute primitive d'une forme symplectique, est appelée forme de Liouville. Le champ de Liouville associé $\vec{\lambda}$ est le champ de vecteurs défini par $i(\vec{\lambda})\omega = d\lambda$. On fait l'hypothèse de *convexité à l'infini* (au sens de Eliashberg–Gromov [EG]):

Il existe une hypersurface compacte sans bord, transverse à $\vec{\lambda}$, bordant un domaine compact de M, et dont le saturé positif par le flot de $\vec{\lambda}$ est complet et constitue un voisinage de l'infini de M.

AMS Subject Classification (1991). 58 F 05.

(b) On considère une sous-variété lagrangienne L compacte connexe sans bord et λ-exacte, c'est-à-dire que λ y induit la différentielle d'une fonction. Il est connu qu'il existe une forme de Liouville λ_L, ne différant de λ que par la différentielle d'une fonction à support compact, et un plongement symplectique (non propre en général) $T^*L \to M$ prolongeant l'inclusion $L \to M$ et tel que λ_L y induise la forme de Liouville canonique du cotangent. On désigne par $U(L)$ un ouvert de M image d'un tel plongement (on dira que $U(L)$ est un ouvert cotangent).

On fait les hypothèses homotopiques:

$$\pi_1(M, L) = 0, \qquad \pi_2(M, L) = 0.$$

On peut dire aussi: $\pi_1(M, U(L)) = 0$, $\pi_2(M, U(L)) = 0$.

(c) On se donne une isotopie de sous-variétés lagrangiennes compactes λ-exactes, $L_t \subset M$, $t \in [0, 1]$, partant de $L_0 \subset U(L)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que L_0 est transverse à L

Le principe d'engouffrement

Il énonce qu'il *existe une isotopie hamiltonienne ambiante* $\varphi_t : M \to M$, $t \in [0, 1]$, $\varphi_0 =$ *identité, à support compact coïncidant avec l'identité sur* L *et telle que, pour tout* $t \in [0, 1]$, $\varphi_t(U(L))$ *contienne* $L \cup L_t$.

On dit aussi que $U(L)$ peut engouffrer l'isotopie $\{L_t\}$ relativement à L (rel. L). On se propose d'étudier la validité de ce principe.

Pour en souligner l'importance, notons tout de suite sa conséquence dans le cas où $L_0 = L$ (ou une approximation générique de L): *la persistance d'intersection*, c'est-à-dire que $L_t \cap L$ reste non vide pour tout t. En effet, l'isotopie $t \mapsto \varphi_t^{-1}(L_t)$ est hamiltonienne dans le cotangent de L donc persiste à recontrer la section nulle L (Hofer [Ho]), en autant de points que le prescrit la théorie des fonctions génératrices (Sikorav [Si]).

THÉORÈME D'ENGOUFFREMENT. *On considère la situation décrite ci-dessus et on suppose* $n \geq 3$. *Alors quitte à remplacer* $\{L_t\}$ *par une* ε*-approximation le principe d'engouffrement est valide.*

Grâce au théorème d'engouffrement, on retrouve par voie topologique certains des résultats sur les intersections lagrangiennes que Gromov [G1] a établis par la méthode des courbes holomorphes; cependant nos hypothèses homotopiques et dimensionnelles sont plus restrictives. Par exemple, $\mathbf{C}^n$ muni de sa structure symplectique standard est convexe à l'infini. Par ailleurs, par translation n'importe quel

compact peut être disjoint de lui-même. Donc par l'absurde, le théorème d'engouffrement et son corrollaire sur la persistance d'intersection donne que, pour $n \geq 3$, $\mathbf{C}^n$ ne contient aucune sous-variété lagrangienne 1-connexe (une telle sous-variété vérifierait l'hypothèse homotopique du théorème d'engouffrement).

Signalons que le théorème d'engouffrement ne peut être vrai sans une hypothèse très forte à l'infini. Dans [Mu] M.-P. Muller a construit une 3-sphère lagrangienne plongée dans $\mathbf{R}^6$ muni d'une structure symplectique (exotique) qui possède néanmoins un champ de Liouville complet dont le flot envoie tout compact à l'infini. Le principe d'engouffrement n'y est donc pas valide.

Le travail est divisé en trois chapitres.

- chapitre I: *Déformation de structures symplectiques: un exemple de flexibilité*
- chapitre II: *Engouffrement de cylindres de Liouville*
- chapitre III: *Engouffrement de sous-variétés lagrangiennes*

Comme le titre l'indique, on résout au chapitre I un problème de déformation de structures symplectiques. Le théorème qui y est établi trouve au chapitre II une application immédiate à un premier problème d'engouffrement. A partir de là on peut démontrer au chapitre III le théorème d'engouffrement annoncé. Chacun des chapitres a sa situation propre, une variété symplectique M vérifiant certaines hypothèses précisées à chaque fois, et enfin sa numérotation propre.

Chapitre I
DÉFORMATION DE STRUCTURES SYMPLECTIQUES; UN EXEMPLE DE FLEXIBILITÉ

Le h-principe de Gromov offre un outil très général pour étudier les déformations de certaines structures géométriques, en particulier des structures symplectiques, sur les variétés ouvertes. Ce principe interdit tout contrôle du support de la déformation et on sait bien que si l'on se fixe un compact comme support, on se trouve confronté aux phénomènes de rigidité de la géométrie symplectique. On propose ici une situation intermédiaire où la déformation cherchée doit être à support compact, mais dans un compact qui n'est pas donné à l'avance. Cela a un sens en géométrie symplectique car les compacts ont une "taille".

Soit donc M une variété de dimension $2n$ munie d'une forme symplectique ω. Un champ de vecteurs X sur M est un *champ de Liouville* si son flot χ satisfait l'identité:

$$\omega = e^t \chi_*^t \omega \tag{1}$$

Ici $\chi^t_* \omega$ désigne l'image directe de ω par le difféomorphisme χ^t. En termes de dérivée de Lie, (1) s'écrit $L_X \omega = \omega$ et par la formule de Cartan $L_X = i_X d + d i_X$, où i_X désigne le produit intérieur par X, le champ X est de Liouville si et seulement si

$$d(i_X \omega) = \omega. \tag{2}$$

Puisque ω est symplectique, $X \mapsto i_X \omega$ est un isomorphisme entre les champs de Liouville et les *formes de Liouville*, i.e. les primitives de ω. Donc un champ de Liouville n'existe sur M que si ω est exacte, ce que l'on suppose dans la suite. On note $\lambda \mapsto \vec{\lambda}$ l'isomorphisme inverse et on dit que $\vec{\lambda}$ est le champ de vecteurs ω-dual de la 1-forme λ.

Quand le flot χ n'est pas engendré par un champ de Liouville, la formule

$$\omega(t) = e^t \chi^t_* \omega \tag{3}$$

définit une déformation de ω parmi les formes symplectiques. On résout ici, dans un cas particulier, le problème d'étendre à tout M une déformation donnée au voisinage du bord par des formules locales du type (3). L'originalité majeure de la solution résidera dans une technique de *chirurgie*.

§1. Énoncé du résultat principal

La variété symplectique considérée est de la forme $M = S \times \mathbf{R}^+$, où S est une variété compacte, à bord éventuellement non vide, et $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$. La variété M peut donc être à coins. On note $u: M \to \mathbf{R}^+$ la coordonnée "verticale" (projection sur le second facteur): on note T^t le (semi)-flot $(x, u) \mapsto (x, u + t)$ et ∂_u son générateur infinitésimal. On fait l'hypothèse:

(H_1) Il existe une primitive λ de ω dont le ω-dual $\vec{\lambda}$ coïncide avec ∂_u près de $\{u = +\infty\}$ et de $\partial S \times \{0\}$.

Pour tout $t \geq 0$, la forme symplectique $e^t T^t_* \omega$ n'est définie que sur $T^t(M) = S \times [t, +\infty)$. Cependant comme ∂_u est un champ de Liouville sur $V \times [0, a]$, où V est un voisinage collier de ∂S dans S et $a > 0$, la structure symplectique ω admet un prolongement canonique à $V \times \mathbf{R}$ de sorte que ∂_u soit un champ de Liouville sur $V \times (-\infty, a]$. Ce prolongement étant admis, la formule

$$\omega(t) = e^t T^t_* \omega \tag{4}$$

a un sens pour $t \geq 0$ sur $V \times \mathbf{R}^+$ et y définit une forme symplectique qui coïncide avec ω sur $V \times [0, a]$.

1.1 THÉORÈME. *Il existe un chemin* $(\tilde{\omega}(t))_{0 \leq t \leq 1}$ *de formes symplectiques sur* M *avec les propriétés suivantes*:

(i) $\tilde{\omega}(0) = \omega$;

(ii) $\tilde{\omega}(t)$ *a le même germe le long de* $\partial S \times \mathbf{R}^+$ *que le* $\omega(t)$ *défini par* (4);

(iii) *le chemin* $(\tilde{\omega}(t))$ *est constant, égal à* ω, *près de* $\{u = 0\}$ *et de* $\{u = +\infty\}$.

Le même résultat vaut avec un paramètre $\theta \in [0, 1]^k$ *pour une famille* $(\omega_\theta = d\lambda_\theta)$ *de formes symplectiques exactes, où toutes les primitives* λ_θ *vérifient les propriétés suivantes*:

(iv) λ_θ *est indépendant de* θ *sur un voisinage fixe de* $\{u = +\infty\}$,

(v) ∂_u *est le* ω_θ*-dual de* λ_θ *sur un voisinage fixe de l'infini et de* $\partial S \times \{0\}$.

1.2 *Remarques*. Si ∂_u est un champ de Liouville au voisinage de $S \times \{0\}$, le résultat est évident, le prolongement étant donné par (4) avec $V = S$. Il en est de même s'il existe un champ de Liouville Z au voisinage de $S \times \{0\}$ qui pointe vers l'intérieur de M et qui coïncide avec ∂_u au voisinage de $\partial S \times \{0\}$. Malheureusement il y a en général une obstruction à trouver un tel champ Z; elle sera expliquée plus loin.

En revanche il n'est pas difficile de résoudre le problème de prolongement pour un temps petit $\varepsilon > 0$. Pour le prolongement global le problème est d'exhiber une procédure de prolongement en temps petit qui possède la propriété de *microcompressibilité* au sens de Gromov [G2, chapter 2], de sorte que la même procédure puisse être appliquée pour $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, $t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon]$, etc... L'ingrédient principal permettant cette démarche est l'existence de *bandes caractéristiques* [La], qui repose sur le fait que ∂_u est un champ de Liouville près de l'infini. Le problème est finalement résolu par une suite de *chirurgies*.

1.3 *Terminologie*. Dans la suite et sauf mention du contraire, par *forme de Liouville* (resp. *champ de Liouville*) on entend une primitive de ω de la forme $\lambda + dH$, où H est une fonction à support *compact*, (resp. le ω-dual d'une telle primitive).

§2. Réduction à un cas particulier

On rappelle que les caractéristiques d'une hypersurface N sont les lignes $L \subset N$ dont l'espace tangent $T_x L$ est le ω_x-orthogonal de $T_x N$. Si N est le niveau régulier d'une fonction H, le champ hamiltonien $\overrightarrow{dH}$ est tangent à N et les caractéristiques de N sont les courbes intégrales de $\overrightarrow{dH}_{|N}$.

2.1 *Cylindres de Darboux et bandes caractéristiques*

Un *cylindre de Darboux* $\tilde{B}$ est une sous-variété de dimension $2n$, proprement plongée dans M, munie d'une sous-variété symplectique Δ de dimension $2n-2$ et d'un difféomorphisme $x \mapsto (\pi(x), v(x), h(x))$ de $\tilde{B}$ sur $\Delta \times \mathbf{R}^+[-\delta, +\delta]$, $\delta > 0$, avec les propriétés suivantes:

(i) si $x \in \Delta$, on a $\pi(x) = x$, $v(x) = 0$, $h(x) = 0$;
(ii) sur $\tilde{B}$, on a $\omega = \pi^*\omega_0 \pm dv \wedge dh$ où ω_0 est la forme symplectique induite par ω sur Δ.

La *base* du cylindre de Darboux est définie par $\tilde{\Delta} = \{v = 0\}$. D'autre part on dira que $\tilde{B}$ est un cylindre de Darboux *normal* si

(iii) ∂_u pointe à l'extérieur de $\tilde{B}$ le long de $\partial\tilde{B}$ quand u (ou v, par propreté) est assez grand.

Si cette propriété est satisfaite pour $u \geq u_0$, on dira parfois que $\tilde{B}$ est en *forme normale* pour $u \geq u_0$.

Une *bande caractéristique* (normale) B est l'âme $\{h = 0\}$ d'un cylindre de Darboux (normal). Alors B est une hypersurface propre de M, avec une sous-variété symplectique Δ (appelée la *base* de B) et un difféomorphisme $x \mapsto (\pi(x), v(x))$ de B sur $\Delta \times \mathbf{R}^+$ tels que $\pi(x) = x$ si $x \in \Delta$ et que les fibres de π soient les caractéristiques de B.

L'hypothèse (H_1) garantit l'existence de beaucoup de bandes caractéristiques normales. De façon précise on a le résultat suivant prouvé dans [La].

2.2 THÉORÈME. *Soit $\beta_1, \ldots, \beta_p$ des boules de dimension $2n-2$ mutuellement disjointes, plongées dans* $\operatorname{int}\{u = 0\}$ *transversalement aux caractéristiques (elles sont donc symplectiques). Soit $\tilde{\beta}_i \subset \operatorname{int}\{u = 0\}$, $i = 1, \ldots, p$, obtenu en épaississant β_i dans la direction des caractéristiques de $\{u = 0\}$. Alors il existe des bandes caractéristiques normales $B_1, \ldots, B_N$ de bases $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ avec les propriétés suivantes:*

(i) *elles sont les âmes de cylindres de Darboux normaux et mutuellement disjoints, de bases contenues dans $\{u = 0\}$;*

(ii) *toute caractéristique de $\tilde{\beta}_i$ rencontre l'intérieur d'un Δ_k.*

2.3 *Une construction*

Soit $U \subset \operatorname{int} U' \subset U' \subset U''$ des voisinages colliers de ∂S dans S, U et U' étant compacts et U'' ouvert, assez petits pour que ∂_u soit un champ de Liouville au voisinage de $U'' \times \{0\}$. Identifiant un instant $\{u = 0\}$ avec S, on choisit des boules de dimension $2n-2$, $\beta_1, \ldots, \beta_p$, qui *détruisent la récurrence* du feuilletage caractéristique de $S = \{u = 0\}$ hors de U au sens suivant:

(a) toute caractéristique de $\{u=0\}$, ou demi-caractéristique infinie, non contenue dans U intersecte l'intérieur d'un des β_i;
(b) de même pour tout segment caractéristique non contenu dans U'' et dont les extrémités sont dans U';
(c) tout segment caractéristique dont les extrémités sont dans un même β_i coupe l'intérieur d'un autre β_k.

On applique le théorème 2.2 à ces boules et on trouve des bandes caractéristiques normales $B_1, \ldots, B_N$, dont les bases $\Delta_1, \ldots, \Delta_N \subset \operatorname{int}\{u=0\}$ détruisent aussi la récurrence du feuilletage caractéristique, c'est-à-dire qu'ils vérifient aussi (a)–(c). Les $\tilde{B}_i$ sont les cylindres de Darboux donnés par 2.2 et les $\tilde{\Delta}_i$ désignent leurs bases respectives. On note alors S' l'adhérence de $S \backslash \bigcup \tilde{\Delta}_i$.

2.4 LEMME. *Il existe un champ de Liouville Y qui pointe vers les $u>0$ le long de $S' \times \{0\}$ et qui coïncide avec ∂_u près de $\partial S \times \{0\}$.*

Preuve. (Chaperon) On veut construire un hamiltonien à support compact H sur M tel que le ω-dual Y de $\lambda + dH$ vérifie $Y = \partial_u$ près de $\partial S \times \{0\}$ et $Y \cdot u > 0$ sur $S' \times \{0\}$. La dernière condition peut être réécrite $\vec{\lambda} \cdot u + \{H, u\} > 0$, où $\{H, u\}$ désigne le crochet de Poisson, ou encore:

$$\vec{du} \cdot H < \vec{\lambda} \cdot u \quad \text{sur } S' \times \{0\},$$

Puisque $\vec{du}$ est tangent à $\{u=0\}$, cette condition ne fait intervenir que les deux fonctions $h(x) := H(x, 0)$ et $g(x) := (\vec{\lambda} \cdot u)(x, 0)$, $x \in S$, ainsi que le champ de vecteurs Z sur S' obtenu en prenant la restriction de $\vec{du}$ à $S' \times \{0\}$. Le problème est de construire $h\colon S' \to \mathbf{R}$ satisfaisant

$$Z \cdot h < g \tag{5}$$

et (par exemple) $h=0$ près du bord de S, sachant que $g(x) = \partial_u \cdot u = 1$ si $x \in U''$.

On pose $h=0$ comme germe de fonction le long de U. On introduit une fonction $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\theta(t) < t$ pour tout t et $\theta(t) = 0$ pour $t \geq 1$. Soit K_0 la réunion de toutes les lignes du champ Z (c.-à-d. les caractéristiques de $S' \times \{0\}$) qui rencontrent U. D'après 2.3(a) K_0 est compact. On affirme qu'il existe exactement une extension de h en un germe de fonction le long de K_0 solution de l'équation différentielle

$$Z \cdot h = \theta \circ g \tag{6}$$

(ce qui implique (5) au voisinage de K_0). En effet, si ζ désigne le flot de Z, (6) définit h par la formule

$$h(\zeta^t(x)) = \int_0^t \theta \circ g(\zeta^s(x))\, ds, \tag{7}$$

pour tout $(x, t) \in U \times \mathbf{R}$ appartenant au domaine de définition de ζ. Tant que l'orbite de x reste dans U'', la fonction vaut 0 et si elle sort de U'' elle ne revient jamais dans U, d'après 2.3(b). Donc la définition de h est univoque sur K_0. Elle vaut aussi pour un germe de fonction le long de K_0 car la formule (7) convient encore pour $x \in U'$. Alors, comme germe de fonction le long de K_0, on a l'identité

$$h(\zeta^t(x)) = h(x) + \int_0^t \theta \circ g(\zeta^s(x))\, ds. \tag{8}$$

Chaque $\partial\tilde{\Delta}_j$ est l'union disjointe d'une face d'entrée $\tilde{\Delta}_j^+$ le long de laquelle Z pointe vers l'intérieur de $\tilde{\Delta}_j$, d'une face de sortie $\tilde{\Delta}_j^-$ le long de laquelle Z pointe vers l'extérieur et d'un face latérale à laquelle Z est tangente. Par 2.3(c), toute orbite dans $S'\backslash K_0$ va d'un $\tilde{\Delta}_j^-$ à un $\tilde{\Delta}_k^+$. On peut donc définir des compacts $K_1 \subset \cdots \subset K_N = S'$ contenant K_0 comme suit: pour $0 < j \leq N$, K_j est l'union de K_{j-1} et des orbites de Z qui rencontrent l'adhérence de $\tilde{\Delta}_j^-$. On suppose que h est construite au voisinage de K_{j-1}, satisfaisant (6)–(8). On étend le germe induit le long de $K_{j-1} \cap \mathrm{adh}(\tilde{\Delta}_j^-)$ en un germe le long de $\mathrm{adh}(\tilde{\Delta}_j^-)$ tout entier satisfaisant (6). Comme cette hypersurface est transverse à Z, il n'y a pas d'obstruction à le faire. Puis on utilise la formule (8), avec x voisin de $\mathrm{adh}(\tilde{\Delta}_j^-)$, pour prolonger h comme germe le long de K_j. cfqd

2.5 *Remarque.* L'obstruction mentionnée en 1.2 est claire. Par exemple si un segment caractéristique de $S \times \{0\}$ a ses extrémités a, b dans $\partial S \times \{0\}$, (5) peut interdire à H de prendre la même valeur en a et b.

2.6 *Le situation modèle*

Elle est définie par les hypothèses suivantes:

(H_2) S est elle-même le produit $D \times [0, 1]$, où D est une boule fermée standard de $\mathbf{R}^{2n-2}$. Ainsi tout point de M s'écrit $(x, y, u) \in D \times [0, 1] \times \mathbf{R}^+$.

(H_3) Les caractéristiques de $\{u=0\}$ sont les segments $\{x\} \times [0, 1]$ et la forme induite par ω sur $\{u=0\}$ relève la structure symplectique standard de $\mathbf{R}^{2n-2}$.

(H_4) Il existe un voisinage collier compact U de ∂S et une bande caractéristique normale B dans M vérifiant:
- ∂_u est un champ de Liouville au voisinage de $U \times \{0\}$;
- la base Δ de B rencontre transversalement et en un seul point toutes les caractéristiques $\{x\} \times \{0, 1\}$ de $\{u=0\}$ non contenues dans U.

Remarque. Sauf sous des hypothèses de convexité, il est impossible d'avoir $\partial\Delta \subset \partial S$.

2.7 LEMME. *Pour obtenir le théorème* 1.1 (*sans paramètres*), *il suffit de le prouver sur la situation modèle* (H_1)–(H_4).

Preuve. On peut changer la structure produit $M = S \times \mathbf{R}^+$ qui n'a aucune signification particulière vis-à-vis de la structure symplectique sauf au voisinage de l'infini et de $\partial S \times \{0\}$. On reprend la construction 2.3. Disons que dans $\{u \geq u_0\}$ les cylindres de Darboux $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_N$ sont sous forme normale. Comme $2n \neq 3$, un arc allant de $\{u=0\}$ à $\{u=u_0\}$ dans $\{0 \leq u \leq u_0\}$ n'est jamais noué et deux tels arcs ne sont jamais enlacés. De là on déduit que l'adhérence de $\{0 \leq u \leq u_0\} \setminus \bigcup \tilde{B}_i$ est un produit $S' \times [0, u_0]$ prolongeant la structure produit des $\tilde{B}_i$. On élargit chaque base Δ_j de B_j en une boule Δ'_j transverse aux caractéristiques de $\{u=0\}$ et contenant Δ_j en son intérieur, puis on épaissit Δ'_j en $\tilde{\Delta}'_j$ dans la direction des caractéristiques de sorte que int $\tilde{\Delta}'_j \supset \tilde{\Delta}_j$. A cause de la structure produit mentionnée plus haut, il existe un champ de vecteurs Z sur M avec les propriétés suivantes:

(i) Z coïncide avec ∂_u dans $\{u \geq u_0\}$ et au voisinage de $\partial M \cap \{u > 0\}$;

(ii) Z coïncide avec le champ de Liouville Y donné par 2.4 au voisinage de $S' \times \{0\}$;

(iii) toute orbite de Z va de $\{u=0\}$ à l'infini;

(iv) toute orbite issue d'un point de $\{u=0\}$ n'appartenant pas aux $\tilde{\Delta}'_j$ évite les cylindres $\tilde{B}_k$ jusqu'à $\{u=u_0\}$ et définitivement à cause de leur forme normale.

La nouvelle structure produit sur M est alors donnée par le flot de Z. Dans cette structure, notons M' l'adhérence de $(S \setminus \bigcup \tilde{\Delta}'_j) \times \mathbf{R}^+$. Comme $Z = \partial_u$ est un champ de Liouville au voisinage de $\{u=0\}$ dans M', le prolongement cherché $\tilde{\omega}(t)$ peut être donné par la formule (4) au voisinage de M'. Il ne reste plus qu'à boucher les trous $\tilde{\Delta}'_j \times \mathbf{R}^+$, qui correspondent chacun à une situation modèle. cqfd

§3. Démonstration du théorème 1.1 (sans paramètre)

3.1 *Hypothèses et notations*

Par le lemme 2.7, on peut supposer (H_1)–(H_4). Par (H_3) on a $\{u, y\} = \vec{du} \cdot y \neq 0$ le long de $\{u = 0\}$. Alors, quitte à changer y en $1 - y$, on peut supposer $\{u, y\} < 0$ le long de $\{u = 0\}$. Autrement dit ∂_y et $\vec{du}$ orientent les caractéristiques de $\{u = 0\}$ dans des sens opposés.

On note U_0 et U_1 des voisinages colliers compacts de ∂D dans D avec $U_0 \subset \operatorname{Int} U_1$, $U_1 \times [0, 1] \subset U$ et $\partial \Delta \subset U_0 \times [0, 1] \times \{0\}$ (voir (H_4)); leurs bords intérieurs sont des sphères euclidiennes. On choisit des constantes positives ε et δ satisfaisant (9)–(11) ci-dessous;

$$\vec{\lambda} = \partial_u \text{ près de } \{1 - \delta \leq y \leq 1, u = 0\} \text{ et de } \{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}. \tag{9}$$

En fait au départ, on peut choisir δ et ε tel que $\vec{\lambda} = \partial_u$ près de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$, mais seule la condition indiquée sera utilisée et aura son analogue à chaque étape du prolongement.

Concernant l'orientation de l'axe des y, on voit que $\lambda(\partial_y) > 0$ sur les domaines indiqués. En effet, le long de $\{u = 0\}$, cela revient à $\lambda(\vec{du}) < 0$ ou encore $\omega(\vec{\lambda}, \vec{du}) < 0$, ce qui se lit $du(\partial_u) > 0$, qui est vrai. La même conclusion vaut sur les autres niveaux de u au voisinage de $\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$, puisque le flot du champ de Liouville ∂_u préserve λ à un facteur positif près.

Maintenant δ est fixé. La condition suivante sur ε est relative aux caractéristiques de $\{y = 1 - \delta\}$: comme cette hypersurface est transversale aux caractéristiques de $\{u = 0\}$, ses propres caractéristiques sont transversales aux niveaux de u de valeurs voisines de 0. Donc pour ε assez petit on a:

toute caractéristique de $\{y = 1 - \delta\}$ allant de $\{u = 0\}$ à $U_0 \times \{1 - \delta\} \times [0, \varepsilon]$ vient d'un point de $U_1 \times \{1 - \delta\} \times \{0\}$ (Figure 1). (10)

Pour ε assez petit et quitte à changer les verticales sauf au voisinage du bord de M et de l'infini, on peut encore satisfaire à la condition suivante:

Il existe un cylindre de Darboux propre $\tilde{B} \subset \{1 - \delta < y < 1, u \geq 0\}$ dont la base $\tilde{\Delta}$ dans $\{u = 0\}$ intersecte en un unique intervalle toutes les caractéristiques de $\{u = 0\}$ qui ne sont pas contenues dans $U_0 \times [0, 1] \times \{0\}$. (11)

En effet on prend la bande caractéristique donnée par (H_4). Par une isotopie hamiltonienne à support compact on déplace chaque point de Δ sur sa propre

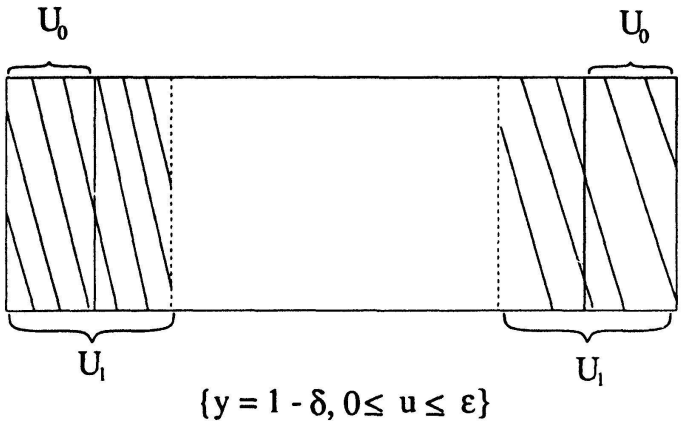


Figure 1

caractéristique dans $\{u = 0\}$ jusqu'à ce qu'on ait $\Delta \subset \{y > 1 - \delta\}$. On procède alors comme dans la preuve de 2.7: on change les verticales sauf au voisinage du bord de M et de l'infini de sorte que B soit contenu dans $\{y > 1 - \delta\}$. Si ε est assez petit, ∂_u n'est pas changé dans $\{u \leq \varepsilon\}$ et les conditions (9)–(10) sont préservées.

Remarque. En fait $\tilde{B}$ peut être choisi *normal*, mais on n'insiste plus sur cette propriété qui ne sert en fait que pour l'argument 2.7.

3.2 LEMME. *Il existe un hamiltonien $H: M \to \mathbf{R}$ dont le champ de Liouville associé $X = \vec{\lambda} + \overrightarrow{dH}$ a les propriétés suivantes:*

$$H = 0 \text{ près de } U_1 \times [0, 1] \times \{0\} \text{ et de } \{y = 0, u = 0\}; \tag{12}$$

$$X \cdot u > 0 \text{ et } H \geq 0 \text{ le long de } \{0 \leq y \leq 1, u = 0\}; \tag{13}$$

$$X \cdot y = 0 \text{ le long de } \{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$$
$$\text{et } H(x, 1 - \delta, u) = 0 \text{ si } x \in U_0, u \in [0, \varepsilon]; \tag{14}$$

$$X \cdot u = 1 \text{ près de } \{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}. \tag{15}$$

Preuve. Sur $\{u = 0\}$, la condition $X \cdot u > 0$ revient à $\overrightarrow{du} \cdot H < \vec{\lambda} \cdot u$. Ecrivant $\partial_y = -\alpha \overrightarrow{du}$ avec $\alpha > 0$, la condition s'écrit $\partial_y \cdot H > -\alpha \vec{\lambda} \cdot u$. On peut renforcer cette condition en demandant en plus: $\partial_y \cdot H \geq 0$ et $\partial_y \cdot H = 0$ près de $\{y = 0\}$, de $\{y = 1 - \delta\}$ et de $U_1 \times [0, 1]$ dans $\{u = 0\}$. Autrement dit, on peut construire $H_{|\{u=0\}}$ satisfaisant (12)–(13) en lui demandant d'être nulle près de $\{y = 0\}$ et de croîte suffisamment vite avec y. Dans la suite on choisit un tel H sur $\{u = 0\}$.

Comme $\partial_u = \vec{\lambda}$ le long de $\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$, (14) revient à $\overrightarrow{dH} \cdot y = 0$ ou $\overrightarrow{dy} \cdot H = 0$. Autrement dit, H doit être constant le long de chaque caractéristique de

$\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$. Alors, si un tel segment caractéristique γ vient de $\{u = 0\}$, $H_{|\gamma}$ est déterminé par la valeur qui lui est attribuée dans l'étape précédente. A cause de (10), si λ aboutit dans $U_0 \times [1 - \delta\} \times [0, \varepsilon]$, $H_{|\gamma}$ est nul. On complète la construction de $H_{|\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}}$ en prenant $H = 0$ le long des autres caractéristiques; alors (14) est satisfaite.

La condition (15) revient à $\vec{du} \cdot H = 0$, ce qui est facile à satisfaire à partir

$H_{|\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}}$ puisque $\vec{du}$ est transversal à $\{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$. cqfd

Remarque. Si les conditions (9)–(15) sont satisfaites, elles le sont encore si on diminue ε, sans toucher ni à δ ni à H. Compte tenu de cette remarque une dernière condition de petitesse sera imposée à ε en 3.10 (21). Son énoncé nécessite d'autres préliminaires.

3.3 *Un champ de vecteurs Z*

On fixe une fois pour toutes un champ de vecteurs Z sur un voisinage de $\{y \leq 1 - \delta\}$ égal au champ de Liouville X (donné par 3.2) au voisinage de $\{u = 0\} \cup \{y = 1 - \delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$ et vérifiant les hypothèses additionnelles suivantes:

Z est tangent à $\{y = 1 - \delta\}$ et $Z \cdot u = 1$ au voisinage de $\{y = 1 - \delta\}$; (16)

$Z = \partial_u$ près de $\partial S \times [0, +\infty)$ dans $\{0 \leq y \leq 1 - \delta\}$ et au voisinage de l'infini. (17)

On note ζ^t le flot de Z et on rappelle que T^t est le flot de ∂_n. On va utiliser ζ^t pour obtenir une "solution naïve" du problème de prolongement pour $0 \leq t \leq \varepsilon$. Cette "solution" présente une discontinuité le long de $\{y = 1 - \delta\}$ qui sera résorbée par une technique de *chirurgie* (coupure et recollement). On verra ensuite sous quelle condition la même procédure peut être appliquée pour $\varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon$, etc...

3.4 *Un prolongement naïf*

Pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, on pose

$$\tilde{\omega}_1(t) = e^t \zeta^t_* \omega \quad \text{sur } \{0 \leq y \leq 1 - \delta\}, \tag{18}$$

$$\tilde{\omega}_2(t) = e^t T^t_* \omega \quad \text{sur } \{1 - \delta \leq y \leq 1, u \leq \varepsilon\}. \tag{19}$$

La formule (18) définit bien $\tilde{\omega}_1(t)$ sur $\zeta'(\{0 \leq y \leq 1-\delta\})$. Mais comme Z est un champ de Liouville au voisinage de $\{u=0\}$, $\tilde{\omega}_1(t)$ se prolonge canoniquement sur la partie manquante (voir (4)). La même remarque doit être faite pour la formule (19). Par ces formules on a $\tilde{\omega}_1(t) = \omega = \tilde{\omega}_2(t)$ au voisinage de $\{y = 1-\delta, 0 \leq u \leq \varepsilon\}$; cependant, les formules (18) et (19) ne se recollent pas le long de $\{y = 1-\delta, u \geq \varepsilon\}$, excepté à l'infini.

On va résorber cette discontinuité seulement pour $t = \varepsilon$; cela pourrait être fait de la même façon pour $0 \leq t \leq \varepsilon$. On observe d'abord que les formes induites sur $\{y = 1-\delta, u \geq \varepsilon\}$ par $\tilde{\omega}_1(\varepsilon)$ et $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ sont conjuguées: la seconde est l'image directe de la première par

$$\Phi := T^{\varepsilon} \circ \zeta^{-\varepsilon} \mid \{y = 1-\delta, u \geq \varepsilon\},$$

qui d'après (15) et (16) est bien un difféomorphisme de cette hypersurface. De plus *la restriction ϕ de Φ à $\{y = 1-\delta, u = \varepsilon\}$ est l'extrémité d'une isotopie partant de l'identité,*

$$\phi^t = T^t \circ \zeta^{-t}, \qquad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

qui est hamiltonienne pour la forme symplectique induite par ω. D'ailleurs on peut vérifier, ce qui ne servira pas dans la suite, que le hamiltonien correspondant est la fonction $-e^t H \circ T^{-t}$, négative on nulle.

On préfèrera utiliser une isotopie hamiltonienne légèrement différente; on prendra ϕ^t allant de Id à ϕ et stationnaire pour t voisin de 0 et de ε. Par exemple si $\alpha: [0, \varepsilon] \to [0, \varepsilon]$ est une fonction croissante telle que $\alpha(t) = 0$ près de 0 et $\alpha(t) = \varepsilon$ près de ε, on prendra

$$\phi^t = T^{\alpha(t)} \circ \zeta^{-\alpha(t)}.$$

Son hamiltonien $K_t = -\alpha'(t) e^t H \circ T, (\leq 0)$, vu comme une fonction définie sur D, est nul pour t voisin de 0 et de ε et aussi pour $x \in U_0$ d'après (14).

3.5 *Graphe d'un hamiltonien*

On considère le cylindre de Darboux $\tilde{B}$ donné par (11). Son image $T^{\varepsilon}(\tilde{B})$ est un cylindre de Darboux pour la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$. Soit (x', τ, v) un système de coordonnées de Darboux sur $T^{\varepsilon}(\tilde{B}) \cong \Delta \times [0, \varepsilon] \times [0, +\infty)$ (noter que le τ-intervalle peut être choisi arbitrairement). Sa base $\{v = 0\}$ est contenue dans $\{u = \varepsilon\}$ et l'espace *réduit* Δ est muni d'une forme symplectique que l'on peut identifier (en suivant les

caractéristiques de $\{u = \varepsilon\}$) à la forme ω_0^ε induite par $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ sur $\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}$. Le vecteur ∂_v dirige les caractéristiques de $\{\tau = const\}$ et, le long de $\{v = 0\}$, il pointe vers $\{u > \varepsilon\}$. On choisit ∂_τ de sorte que le long de $(v = 0\}$ il oriente les caractéristiques de $\{u = \varepsilon\}$ dans le même sens que $\overrightarrow{du}$. A priori $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)(\partial_v, \partial_\tau) = \pm 1$. Comme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)(\partial_u, \overrightarrow{du}) = -1$, on déduit que $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)(\partial_v, \partial_\tau) = -1$ et donc sur $T^\varepsilon(\tilde{B})$ on a

$$\tilde{\omega}_2(\varepsilon) = \omega_0^\varepsilon + d\tau \wedge dv.$$

On note Σ le *graphe du hamiltonien*, c'est-à-dire l'hypersurface de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u \geq \varepsilon\}$ définie par l'équation

$$v = -K_\tau(x')$$

dans $T^\varepsilon(\tilde{B})$ et par $u = \varepsilon$ en dehors.

Remarque. Si on ne connaît pas le signe du hamiltonien, on considère le cylindre doublement infini $T^\varepsilon(\tilde{B})^0 \cong \Delta \times [0, \varepsilon] \times R$ et Σ est alors une hypersurface de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u \geq \varepsilon\} \cup T^\varepsilon(\tilde{B})^0$.

LEMME. *Le difféomorphisme d'holonomie $\Delta \times \{0\} \times \{0\} \to \Delta \times \{\varepsilon\} \times \{0\}$ obtenu en suivant les caractéristiques de Σ est donné par ϕ^ε, si on identifie la source et le but à la même boule de l'espace réduit.*

Preuve. On rappelle que le générateur infinitésimal de ϕ^τ est $\overrightarrow{dK_\tau}$. Il s'agit de voir que les caractéristiques de Σ se projettent (dans les coordonnées de Darboux) sur les graphes dans $\Delta \times [0, \varepsilon]$ des solutions de l'équation différentielle $\dot{x}' = \overrightarrow{dK_\tau}(x')$, ou encore que $\overrightarrow{dK_\tau} + \partial_\tau$ dirige le noyau de $\omega_0^\varepsilon - d\tau \wedge dK_\tau$ dans $\Delta \times [0, \varepsilon]$. Or

$$i(\overrightarrow{dK_\tau} + \partial_\tau)(\omega_0^\varepsilon - d\tau \wedge dK_r) = i(\overrightarrow{dK_\tau})\omega_0^\varepsilon - dK_\tau = 0. \qquad \text{cqfd}$$

3.6 *Chirurgie*

On prolonge le difféomorphisme de conjugaison Φ de $\{y = 1 - \delta, u \geq \varepsilon\}$ en un difféomorphisme, noté encore Φ, de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}$ sur Σ avec les propriétés suivantes:

(i) Φ envoie les caractéristiques de $\{u = \varepsilon\}$ sur celles de Σ pour la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$;
(ii) Φ est l'identité au voisinage de $\{y = 1\}$;
(iii) $\Phi = T^\varepsilon \circ \zeta^{-\varepsilon}$ au voisinage de $\{y = 1 - \delta\}$.

D'après (15), la dernière formule opère bien de $\{u = \varepsilon\}$ dans lui-même au voisinage de $\{y = 1 - \delta\}$. Ce difféomorphisme se prolonge en un germe de symplectomorphisme pour la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ d'un voisinage de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}$ sur un voisinage de Σ. On peut pour cela invoquer un argument général de Givental (voir [Be]) ou vérifier que, dans les coordonnées de Darboux,

$$(x', \tau, v) \mapsto (\phi^{\tau}(x'), \tau, v - K_{\tau}(x'))$$

est un difféomorphisme symplectique.

On pose $M'_g = \{0 \leq y \leq 1 - \delta\}$ que l'on munit de la forme symplectique $\tilde{\omega}_1(\varepsilon)$. On pose $M'_d = \{1 - \delta \leq y \leq 1, 0 \leq u \leq e\}$ que l'on munit de la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$. Au voisinage de $M'_g \cap M'_d$, on a $\tilde{\omega}_1(\varepsilon) = \omega = \tilde{\omega}_2(\varepsilon)$. Donc $M' = M'_g \cup M'_d$ est muni d'une forme symplectique. Enfin on note M'' la partie de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u \geqslant \varepsilon\} \cup T^{\varepsilon}(\tilde{B})^0$ au-dessus de Σ, que l'on munit de la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$.

La chirurgie consiste à couper M le long de $\{y = 1 - \delta, u \geq \varepsilon\} \cup \{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}$ et à recoller M' à M'' par le difféomorphisme Φ. On pose

$$M(\Phi) = M' \cup_{\Phi} M''.$$

Les propriétés de Φ et de son prolongement comme germe impliquent l'énoncé suivant (Figure 2).

LEMME. *De façon naturelle, il existe sur $M(\Phi)$ une structure différentiable et une forme symplectique $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ telles que*:

(a) *$M(\Phi)$ soit difféomorphe à M par un difféomorphisme qui est l'identité au voisinage du bord et de l'infini*;

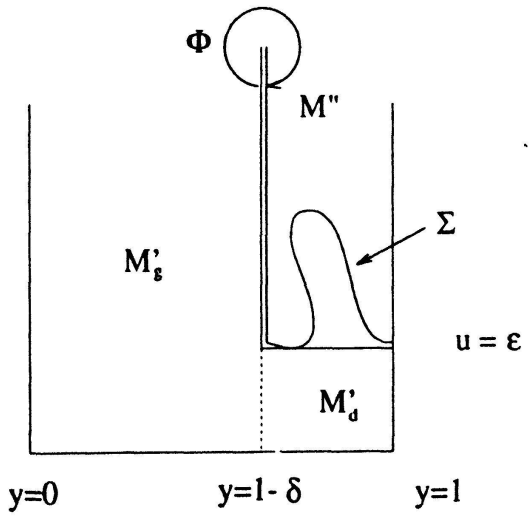


Figure 2

(b) *par la projection* $M' \sqcup M'' \to M(\Phi)$, *la forme* $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ *induise* $\tilde{\omega}_1(\varepsilon)$ *sur* M'_g *et* $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ *sur* $M'_d \cup M''$.

Si on identifie M et $M(\Phi)$ par ce difféomorphisme, on obtient la forme cherchée $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ sur M qui coïncide avec $e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\omega$ près de $\partial M \cap \{u > 0\}$ et avec ω près de $\{u = 0, +\infty\}$. La chirurgie a résorbé la discontinuité du prolongement naïf.

3.7 *Peut-on faire la seconde étape* $\varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon$?

Sur la partie gauche $\{y \leq 1 - \delta\}$, on continue avec la formule (18) $\tilde{\omega}_1(t) = e^t \zeta^t_{*}\omega$. Vu au voisinage de $\{y = 1 - \delta\}$ dans M'', le champ utilisé pour ce prolongement est $\Phi_{*}Z = T^{\varepsilon}_{*}Z$. Il est de Liouville au voisinage de $\{y = 1 - \delta, \varepsilon \leq u \leq 2\varepsilon\}$ pour la forme $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$. Le champ ∂_u a aussi cette propriété. De plus les champs $\Phi_{*}Z$ et ∂_u coïncident au voisinage de $U_0 \times \{1 - \delta\} \times [\varepsilon, 2\varepsilon]$ d'après (14).

D'autre part, $(M'', \tilde{\omega}_2(\varepsilon))$ contient un cylindre de Darboux propre dont la base recontrent toutes les caractéristiques de Σ qui ne sont pas contenues dans $U_0 \times [1 - \delta, 1] \times \{\varepsilon\}$, à savoir la partie de $T^{\varepsilon}(\tilde{B})^0$ au-dessus de Σ. Tout est donc comme dans la figure initiale, sauf que l'on ne sait pas s'il existe un champ qui jouerait sur M'' le rôle joué par ∂_u sur $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u \geq 0\}$. Ou encore, on ne sait pas s'il existe un champ de Liouville pour $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ transverse à Σ et coïncidant avec ∂_u au voisinage de $U_0 \times [1 - \delta, 1] \times \{\varepsilon\}$ et de $\{y = 1 - \delta$ ou $1, u = \varepsilon\}$. On va contourner cette difficulté en se fondant sur la remarque suivante.

Remarque. A priori la classe d'isotopie de $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ dépend du choix qui a été fait pour l'isotopie hamiltonienne de l'identité à ϕ à travers les difféomorphismes symplectiques de $(D, \omega^{\varepsilon}_0)$ coïncidant avec l'identité au voisinage de U_0. Par un argument à la Moser, cette question dépend de savoir si l'espace de ces difféomorphismes symplectiques est simplement connexe; cette question est ouverte. Devant cette ignorance, on part à la recherche d'une isotopie hamiltonienne qui nous convienne. Pour cela on tire profit du *lemme de fragmentation* de Banyaga [Ba, III.2] (voir aussi l'appendice).

3.8 *Enoncé de lemme de fragmentation*

On considère la boule standard (D, ω_0) dans $(\mathbf{R}^{2n-2}$, *standard*$)$ et son voisinage collier U_0. Soit G le groupe des difféomorphismes symplectiques de (D, ω_0), coïncidant avec l'identité au voisinage de U_0. On se donne des domaines

$A_0, \ldots, A_{2n-2}$, dits *domaines de fragmentation*, dont les intérieurs forment un recouvrement de $\overline{D - U_0}$. *Alors il existe un C^∞-voisinage de l'identité dans G dans lequel tout élément ϕ peut être fragmenté, c'est-à-dire être écrit comme le produit de $2n-1$ diffeomorphismes symplectiques*

$$\phi = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_{2n-2},$$

où chaque ϕ_k est le temps 1 *d'une isotopie hamiltonienne à support dans* $\operatorname{int}(A_k \cap (D - D_0))$.

Il ne faut pas penser que les A_k sont connexes. Au contraire un procédé classique pour se donner les A_k consiste à partir d'une triangulation $\mathscr{T}$ d'un voisinage de $\overline{D - U_0}$ dans $\operatorname{int} D$. A chaque k-simplexe σ_i on associe une *anse* $A_{k,i}$ d'*indice* k qui recouvre la partie de σ_i non couverte par les anses d'indice inférieur; la construction des anses se fait par récurrence sur k et, pour $i \neq j$, $A_{k,i} \cap A_{k,j} = \varnothing$ (voir [Ba, p. 200]). On prend alors pour A_k la réunion des anses d'indice k. Par ce procédé, si la triangulation $\mathscr{T}$ est assez fine on peut rendre le diamètre (euclidien) des composantes connexes $A_{k,i}$ de A_k arbitrairement petit.

3.9 *Choix des domaines de fragmentation*

DÉFINITION. Soit $(\hat{A}, \hat{a})$ une $(2n-2)$-boule symplectique pointée dans $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = 0\}$ dont la projection par la réduction est un domaine (A, a) de D, *étoilé* par rapport à a. Soit $\lambda_{\hat{A}}$ la forme de Liouville induite par λ sur $\hat{A}$ et soit $\vec{\lambda}_{\hat{A}}$ le champ de Liouville dual pour la structure symplectique de $\hat{A}$. *On dira que $(\hat{A}, \hat{a})$ est λ-standard si $\vec{\lambda}_{\hat{A}}$ se projette sur le champ de Liouville linéaire radial de (A, a), $\frac{1}{2}\Sigma(x_i - a_i)\partial_{x_i}$, où (x_i) (resp. (a_i)) sont les coordonnées euclidiennes de x (resp. de a) dans $\mathbf{R}^{2n-2}$.*

Le lemme suivant montre qu'il existe beaucoup de boules λ-standard. Pour l'énoncer sous la forme qui sera utile, il convient d'introduire une nouvelle constante géométrique de la figure.

On définit $\theta_0 > 0$ comme la borne inférieure des longueurs, mesurées par $|\lambda|$, des caractéristiques complètes de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = 0\}$. (20)

Notant Θ le flot de $-\vec{du}$ et sachant que $\lambda(-\vec{du}) = +1$, on voit que Θ est bien défini sur $\{y = 1 - \delta, u = 0\} \times [0, \theta_0]$, à valeurs dans $\{u = 0\}$; son image est munie de coordonnées $(x, \theta) \in D \times [0, \theta_0]$, où θ est le temps du flot et où $\{y = 1 - \delta, u = 0\}$

est identifié à l'espace réduit D. On va fractionner la longueur θ_0 en $4n(2n-1)$ parties égales; la raison pour cet entier apparaîtra plus loin.

LEMME. *Il existe $r > 0$ tel que, pour toute boule euclidienne (A, a) centrée en un point a de $\overline{D - U_0}$ et de rayon $<r$, il existe un relèvement λ-standard*

$$(\hat{A}, \hat{a}) \subset \left\{u = 0, 0 < \theta < \frac{\theta_0}{4n(2n-1)}\right\}.$$

Preuve. Soit λ_0 la forme de contact induite par λ sur $\{u = 0, 0 \leq \theta \leq \theta_0/4n(2n-1)\}$. Comme $-\vec{du}$ est le champ de Reeb de λ_0 on peut écrire

$$\lambda_0 = \sum \alpha_i(x)\, dx_i + d\theta,$$

Comme $d\lambda_0 = \Sigma\, dx_{2j+1} \wedge dx_{2j+2}$, pour tout $a \in \overline{D - U_0}$ il existe une fonction h_a, unique à une constante additive près, vérifiant l'identité

$$\sum \alpha_i(x)\, dx_i + dh_a(x) = \frac{1}{2} \sum [(x_{2j+1} - a_{2j+1})\, dx_{2j+2} - (x_{2j+2} - a_{2j+2})\, dx_{2j+1}].$$

Soit C une constante de Lipschitz uniforme pour h_a, $a \in \overline{D - U_0}$. On prend

$$r = \frac{\theta_0}{8n(2n-1)C}.$$

On définit alors $\hat{A}$ par: $\theta = h_a(x)$, $x \in A$. Si on choisit $h_a(a) = \theta_0/8n(2n-1)$, $\hat{A}$ est bien dans la région prescrite. cqfd

Remarques. (1) *La* θ-translation laisse aux boules leur caractère λ-standard. Donc on peut également prendre

$$\hat{A} \subset \left\{\frac{k\theta_0}{4n(2n-1)} < \theta < \frac{(k+1)\theta_0}{4n(2n-1)}\right\}.$$

(2) Le lemme vaut aussi lorsque (A, a) est seulement un domaine étoilé de rayon $<r$.

On note Δ_0 la projection de Δ dans l'espace réduit, où, rappelons-le, Δ est la base de la bande caractéristique donnée par (11). On choisit une triangulation $\mathscr{T}$ d'un voisinage de $\overline{D - U_0}$ dans int Δ_0, où le diamètre de chaque simplexe est $<2r$.

Pour chaque simplexe σ de $\mathscr{T}$, de barycentre $a(\sigma)$, on associe une anse $A(\sigma)$ étoilée par rapport à $a(\sigma)$. Si σ et σ' sont de même dimension, $A(\sigma) \cap A(\sigma') = \emptyset$. Enfin la réunion des anses $A(\sigma)$ associées aux cellules de dimension $\leq k$ recouvre le k-squelette de $\mathscr{T}$. Soit A_k la réunion des $A(\sigma)$ avec $\dim \sigma = k$. *Les A_k sont les domaines de fragmentation cherchés.*

On note $(\hat{A}(\sigma), \hat{a}(\sigma))$ le relèvement λ-standard de $(A(\sigma), a(\sigma))$ dans $\{u = 0\}$, où la θ-coordonnée de $\hat{a}(\sigma)$ ne dépend que de la dimension k de σ et est donnée par

$$\theta(k) = \frac{(k + 1/2)}{4n(2n-1)}\theta_0.$$

On note $\hat{A}_k$ la réunion des $\hat{A}(\sigma)$ où σ parcourt l'ensemble des simplexes de dimension k (Figure 3).

3.10 *Utilisation des domaines de fragmentation pour la première étape*

LEMME. *Les $\hat{A}_k$ sont les bases de bandes caractéristiques propres B_k dans $(\{y \geq 1 - \delta\}, \omega)$, mutuellement disjointes et disjointes de B, et tangentes à ∂_u au voisinage de la base.*

Preuve. Soit (x', τ, v) des coordonnées de Darboux pour le cylindre $\tilde{B}$ donné par (11). Le lemme est évident si on remplace $\hat{A}_k$ par un relèvement A'_k de A_k dans $\{\tau - \tau(k)\}$, où $\tau(k)$ est une constante ne dépendant que de k, avec $\tau(0) > \tau(1) > \cdots > \tau(2n-2)$, l'axe des τ étant orienté dans le même sens que $\vec{du}$. Or $\cup \hat{A}_k$ se déduit de $\cup A'_k$ par glissement le long des caractéristiques de $\{u = 0\}$,

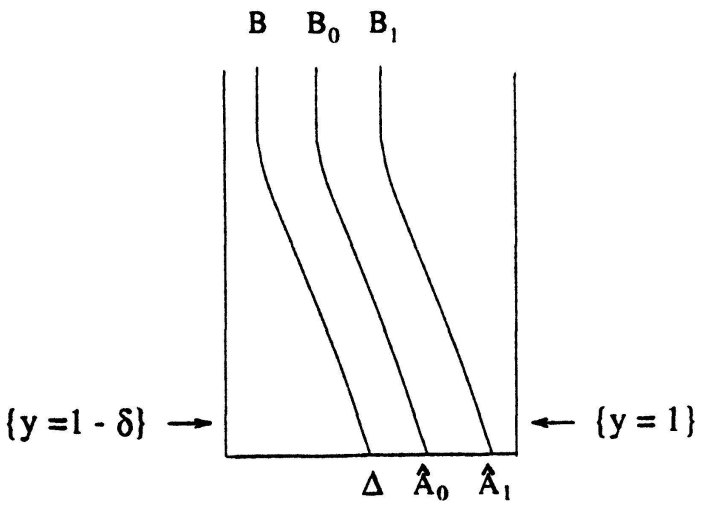


Figure 3

c'est-à-dire par une isotopie (hamiltonienne) qui déplace chaque point sur sa propre caractéristique. La base étant fixée, le germe de la bande caractéristique au voisinage de la base peut être choisi arbitrairement, à condition d'être transversal à $\{u = 0\}$; cela permet de satisfaire la dernière condition. cqfd

On considère de nouveau le difféomorphisme $\phi^\varepsilon = T^\varepsilon \circ \zeta^{-\varepsilon}$ de $\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}$. Le difféomorphisme $T^{-\varepsilon}\phi^\varepsilon T^\varepsilon$ peut être vu comme un difféomorphisme symplectique de l'espace réduit de $\{u = 0\}$ à support dans $D - U_0$. Voici enfin la dernière condition de petitesse imposée à ε. D'après le lemme de Banyaga, pour ε assez petit:

$T^{-\varepsilon}\phi^\varepsilon T^\varepsilon$ est fragmentable relativement à la famille des domaines A_k. (21)

On fixe définitivement un tel ε et on écrit

$$T^{-\varepsilon}\phi^\varepsilon T^\varepsilon = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_{2n-2},$$

où ϕ_k est isotope à l'identité avec un hamiltonien $h_k : A_k \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ à support dans l'intérieur de $(A_k \cap (D - U_0)) \times [0, 1]$.

Soit $\tilde{B}_k$ un cylindre de Darboux pour ω d'âme B_k et de base dans $\{u = 0\}$; les $\tilde{B}_k$ sont choisis mutuellement disjoints. On obtient $\tilde{B}_k$ à partir de B_k en l'épaississant au moyen d'un champ hamiltonien qui lui est transversal. Pour la suite, on impose qu'au voisinage de la base,

$\tilde{B}_k$ s'obtienne en appliquant le flot de $\rho\overrightarrow{du}$, où ρ est une constante assez petite pour que le flot existe sur l'intervalle de temps $[-1, +1]$. (22)

Sur l'image $T^\varepsilon(\tilde{B}_k)$ on a des coordonnées de Darboux $(\hat{x}, \hat{\tau}, \hat{v}) \in A_k \times [-1, 1] \times [0, +\infty)$ qui s'étendent au cylindre doublement infini $T^\varepsilon(\tilde{B}_k)^0$, dont la partie $\{\hat{v} < 0\}$ est extérieure à $\{u \geq \varepsilon\}$. On convient aussi que $\partial_{\hat{\tau}}$ dirige les caractéristiques de $\{u = \varepsilon\}$ dans le même sens que $\overrightarrow{du}$, que l'âme $\{\hat{\tau} = 0\}$ est $T^\varepsilon(B_k)$ et qu'au voisinage de la base on a

$$\hat{v} = \rho(u - \varepsilon). \tag{23}$$

Comme en 3.5, on a dans chacun des cylindres de Darboux

$$\tilde{\omega}_2(\varepsilon) = \omega_0^\varepsilon + d\hat{\tau} \wedge d\hat{v}.$$

On définit l'hypersurface Σ de $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u \geq \varepsilon\} \cup T^\varepsilon(\tilde{B}_0)^0 \cup \cdots \cup T^\varepsilon(\tilde{B}_{2n-2})^0$

par l'équation

$$\hat{v} = -h_k \tag{24}$$

dans le k-ième cylindre de Darboux et, en dehors de ces cylindres, Σ coïncide avec $\{u = \varepsilon\}$. L'holonomie globale de Σ est bien le difféomorphisme ϕ^ε. On peut donc procéder à la chirurgie comme en 3.6. Cela achève la première étape et va permettre la poursuite du prolongement sans toucher à ε.

3.11 *En vue de la seconde étape* $\varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon$

On rapelle que $(M, \tilde{\omega}(\varepsilon))$ est présentée en deux morceaux M' et M'' et que l'on a $\Sigma \subset \partial M''$. Par 3.10, $T^\varepsilon(B)$ est contenu dans M''; c'est une bande caractéristique pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ dont la base coupe toutes les caractéristiques de Σ non contenues dans $U_0 \times [1-\delta, 1] \times \{\varepsilon\}$ (comme ici, les coordonnées (x, y, u) ne seront utilisées dans la suite que là où elles ont un sens canonique).

LEMME. *Il existe dans M'' une hypersurface Σ' munie d'un germe de forme de Liouville λ' pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *Σ' se déduit de Σ par une isotopie dans M'' laissant fixe un voisinage de $\partial\Sigma$*;

(ii) *toute caractéristique de Σ' va de $\{y = 1\}$ à $\{y = 1-\delta\}$*;

(iii) *$\vec{\lambda'}$ est transverse à Σ' et coïncide avec ∂_u au voisinage de $\partial\Sigma' = \partial\Sigma$*;

(iv) *l'intégrale de λ' sur toute caractéristique complète de Σ' est $\geq e^\varepsilon\theta_0(1 - 1/4n)$, où θ_0 est défini en* (20).

Remarque. On pourrait être tenté de prendre $\Sigma' = \Sigma$ et $\lambda' = e^\varepsilon T^\varepsilon_* \lambda$. Mais la condition (iii) (première partie) n'a pas de raison d'être satisfaite.

Preuve. En dehors des cylindres $T^\varepsilon(\tilde{B}_k)$, Σ' coïncide avec Σ et donc avec $\{u = \varepsilon\}$. Dans le k-ième cylindre, Σ' est défini par l'équation

$$\hat{v} = m_k(\hat{x}, \hat{\tau}), \hat{x} \in A_k, \qquad \hat{\tau} \in [-1, +1]$$

où la fonction $m_k \geq 0$ est choisie comme suit:

(a) $m_k \geq -h_k$, ce qui garantit $\Sigma' \subset M''$;

(b) m_k est nulle si $\hat{x}$ est proche de ∂A_k ou si $\hat{\tau}$ est proche de ± 1;

(c) $\hat{\tau}\, \partial_{\hat{\tau}} m_k \leq 0$;

(d) (décroissance radiale à $\hat{\tau}$ fixé) pour toute composante $A(\sigma)$ de A_k, de barycentre $a(\sigma)$,

$$\langle \hat{x} - a(\sigma), \partial_{\hat{x}} m_k \rangle \leq 0.$$

Il n'y a pas de difficulté à trouver une telle fonction. Les conditions (i) et (ii) sont alors satisfaites.

SOUS-LEMME. *Sous la condition* (23), *au voisinage de* $\{\hat{v} = 0\}$, *le champ* ∂_u (*qui est de Liouville pour* $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$) *est sous forme normale*:

$$\partial_u = \frac{1}{2}(\hat{x} - a(\sigma)) \cdot \partial_{\hat{x}} + \hat{\tau}\, \partial_{\hat{\tau}} + \rho\, \partial_{\hat{v}}.$$

Preuve. D'après (23), $\partial_u = \alpha(\hat{x}, \hat{\tau}, \hat{v})\, \partial_{\hat{x}} + \beta(\hat{x}, \hat{\tau}, \hat{v})\, \partial_{\hat{\tau}} + \rho\, \partial_{\hat{v}}$. Dualement, il vient $e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda = \alpha'\, d\hat{x} + \beta\, d\hat{v} - \rho\, d\hat{\tau}$, où α' se déduit de α par la dualité symplectique.

Ecrivons que $d(e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda) = \tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ est la forme symplectique canonique dans les coordonnées de Darboux. On obtient que α' ne dépend pas de $\hat{\tau}$ et que $\beta = \hat{\tau} + \beta'(\hat{x}, \hat{v})$. Comme ∂_u est tangent à $\{\hat{\tau} = 0\}$ au voisinage de $\hat{v} = 0$ (lemme 3.10), on a $\beta' = 0$. On déduit alors que α' est aussi indépendant de $\hat{v}$.

Dualement, il en est de même de α. L'écriture de α est alors déterminée par l'hypothèse que $\{\hat{\tau} = 0, \hat{v} = 0\}$ est standard vis-à-vis de $e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda$. Cela termine la preuve du sous-lemme.

La forme de Liouville λ' au voisinage de Σ' est définie hors des cylindres par $\lambda' = e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda$ (dans ce cas $\overrightarrow{\lambda'} = \partial_u$) et dans les cylindres par

$$\overrightarrow{\lambda'} = \frac{1}{2}(\hat{x} - a(\sigma)) \cdot \partial_{\hat{x}} + \hat{\tau}\partial_{\hat{\tau}} + \rho\partial_{\hat{v}}. \tag{25}$$

Les conditions (c) et (d) impliquent la transversalité requise en (iii).

Le point (iv) est une estimation grossière qui sera affinée ci-dessous. Notons θ' la fonction définie sur $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}$ comma la distance à $\{y = 1 - \delta\}$ mesurée le long de ses caractéristiques avec la forme $e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda$. Par définition de θ_0, toutes ces caractéristiques sont de longueur $\geq e^{\varepsilon}\theta_0$, et la base $T^{\varepsilon}(\tilde{B}_k)$ est contenue dans

$$\left\{\frac{ke^{\varepsilon}\theta_0}{4n(2n-1)} < \theta' < \frac{(k+1)\, e^{\varepsilon}\theta_0}{4n(2n-1)}\right\}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, 2n - 2$. Alors toute caractéristique de Σ' court dans $\{u = \varepsilon\}$ de $\theta' = e^{\varepsilon}\theta_0/4n$ à $\theta' = e^{\varepsilon}\theta_0$.

3.12 *Analyse de la longueur des caractéristiques de* Σ'

On précise le choix des fonctions m_k et donc le choix de Σ'. Pour cela on note A'^{ε}_k le domaine de $\mathbf{R}^{2n-2}$ obtenu en retirant à A_k un petit collier du bord de sorte

que $\bigcup_k A'^{\varepsilon}_k$ contienne $\overline{D - U_0}$ en son intérieur. La fonction m_k est alors notée m^{ε}_k et on impose:

$$\text{pour } \hat{x} \in A'^{\varepsilon}_k, m^{\varepsilon}_k(\hat{x}, \hat{\tau}) \text{ est indépendante de } \hat{x}. \tag{26}$$

On note $\mathscr{C}^{\varepsilon}_k$ un anneau fermé de int A_k, collier extérieur de A'^{ε}_k et contenant tous les points où $\partial_x m^{\varepsilon}_k \neq 0$. On note $\mathscr{C}^{\varepsilon} = \bigcup_k \mathscr{C}^{\varepsilon}_k$. On note U^{ε}_0 la composante connexe du complémentaire de $\mathscr{C}^{\varepsilon}$ dans D contenant ∂D.

L'espace réduit de $(\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}, \tilde{\omega}_2(\varepsilon))$ est $(D, e^{\varepsilon}$ *standard*$)$ que l'on identifie à $(\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}, \omega^{\varepsilon}_0)$ (voir 3.5). On repère une caractéristique γ de Σ' pour $\tilde{\omega}_2(\varepsilon)$ par son extrémité $e(\gamma)$ dans $\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}$, c'est-à-dire par un point de D; $l(\gamma)$ désigne la longueur de γ mesurée par λ'.

LEMME. *Si* $e(\gamma) \in \mathscr{C}^{\varepsilon}$, *on a* $l(\gamma) \geq e^{\varepsilon}\theta_0(1 - 1/4n)$. *Sinon, on a* $l(\gamma) \geq e^{\varepsilon}\theta_0$.

Preuve. Si $e(\gamma) \in \mathscr{C}^{\varepsilon}$, on applique le (iv) du lemme 3.11. Si $e(\gamma) \in U^{\varepsilon}_0$, γ est contenue dans $\{1 - \delta \leq y \leq 1, u = \varepsilon\}$; elle est alors mesurée par $e^{\varepsilon}T^{\varepsilon}_{*}\lambda$ et la conclusion est claire. Sinon, $e(\gamma)$ appartient à au moins l'un des A'^{ε}_k. Dans ce cas γ est contenu dans $\{u = \varepsilon\}$, excepté lors de la traversée des $T^{\varepsilon}(\tilde{B}_k)$; chacune de celles-ci se fait en restant dans $\hat{x} = const.$ et on a:

$$\int_{\gamma \cap T^{\varepsilon}(\tilde{B}_k)} |\lambda'| = \int_{-1}^{+1} \rho \, d\hat{\tau} + \int_{-1}^{+1} m^{\varepsilon}_k \, d\hat{\tau}.$$

Le premier terme est la longueur d'un arc caractéristique de la base de $T^{\varepsilon}(\tilde{B}_k)$ formant avec $\gamma \cap T^{\varepsilon}(\tilde{B}_k)$ un lacet et le second terme est l'aire entourée par ce lacet mesurée par $\omega_2(\varepsilon)$. On a l'inégalité voulue. cqfd

3.13 *La seconde étape*

La variété M'' n'a pas une structure produit canonique. En revanche, d'après 3.11, si on note N'' la partie de M'' au-dessus de Σ', il existe sur $N'' \cong D \times [1 - \delta, 1] \times [0, +\infty)$ des coordonnées (x', y', u') avec les propriétés suivantes:

(i) $\partial_{u'} = \partial_u$ au voisinage de $\partial M'' \backslash \Sigma = \partial N'' \backslash \Sigma'$ et en particulier le long de $\{y = 1 - \delta\}$;

(ii) $\partial_{u'} = \vec{\lambda}'$ au voisinage de Σ'; $\partial_{u'}$ est donc un champ de Liouville pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ au voisinage de Σ' (Figure 4).

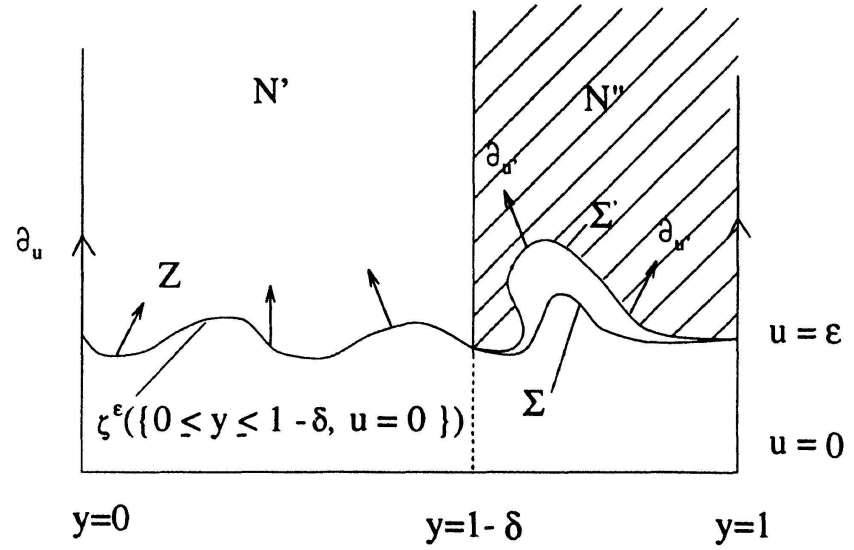


Figure 4

Notons $N' = \zeta^\varepsilon(\{0 \leq y \leq 1 - \delta\})$. Le champ Z (voir 3.3) est un champ de Liouville pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ au voisinage du bord inférieur de N', à savoir $\zeta^\varepsilon(\{0 \leq y \leq 1 - \delta, u = 0\})$. A la seconde étape ($\varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon$) le prolongement naïf consiste à prendre sur N' (et même au voisinage)

$$\tilde{\omega}_1(t) = e^{t-\varepsilon}\zeta^t_* \tilde{\omega}(\varepsilon), \tag{27}$$

avec la même convention qu'en (4) pour définir $\tilde{\omega}_1(t)$ sur $N' \backslash \zeta^t(\{0 \leq y \leq 1 - \delta\})$, et à prendre sur N''

$$\tilde{\omega}_2(t) = e^{t-\varepsilon}T'^t_* \tilde{\omega}(\varepsilon), \tag{28}$$

où T' est le flot de $\partial_{u'}$. En dessous de $N' \cup N''$, on garde $\tilde{\omega}(\varepsilon)$.

Regardons $t = 2\varepsilon$. Comme Z (resp. ∂_u) est de Liouville pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ au voisinage de $\{y = 1 - \delta, \varepsilon \leq u \leq 2\varepsilon\}$ (voir 3.7), les deux formes $\tilde{\omega}_1(2\varepsilon)$ et $\tilde{\omega}_2(2\varepsilon)$ coïncident avec $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ sur ce voisinage. En revanche, on a une discontinuité de la structure symplectique le long de $\{y = 1 - \delta, u \geq 2\varepsilon\}$. Vu au voisinage de $\{y = 1 - \delta, u \geq \varepsilon\}$ dans (la carte) N'', le champ Z, générateur de ζ, se lit $T^\varepsilon_* Z$. Donc au voisinage de $\{y = 1 - \delta, u \geq 2\varepsilon\}$ dans N'', on a:

$$\tilde{\omega}_1(2\varepsilon) = e^\varepsilon(T^\varepsilon \zeta^\varepsilon T^{-\varepsilon})_* \tilde{\omega}(\varepsilon)$$

$$\tilde{\omega}_2(2\varepsilon) = e^\varepsilon T^\varepsilon_* \tilde{\omega}(\varepsilon);$$

les formes $\omega_1(2\varepsilon)$ et $\tilde{\omega}_2(2\varepsilon)$ sont donc conjuguées par $T^\varepsilon_*(\Phi) := T^\varepsilon \Phi T^{-\varepsilon}$. En particulier sur $\{y = 1 - \delta, u = 2\varepsilon\}$ on a $\tilde{\omega}_2(2\varepsilon) = \phi^{2\varepsilon}_*(\tilde{\omega}_1(2\varepsilon))$, où par définition

$\phi^{2\varepsilon} = T^{\varepsilon}_{*}(\phi^{\varepsilon})$. En suivant les caractéristiques, l'espace réduit de Σ' s'identifie à $\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}$ muni de la forme $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ donc à (D, e^{ε} *standard*). Le difféomorphisme ϕ^{ε} vérifie $\phi^{\varepsilon} = T^{-\varepsilon}\phi^{2\varepsilon}T^{\varepsilon}$ et, dans le réduit (D, e^{ε} *standard*), ϕ^{ε} se lit $T^{-\varepsilon}\phi^{\varepsilon}T^{\varepsilon}$ (voir (21)); il est donc fragmentable dans les domaines A_k.

LEMME. *Les A_k admettent des relèvements λ'-standards $\hat{A}^{\varepsilon}_k$ dans Σ' mutuellement disjoints. Plus précisement $\hat{A}^{\varepsilon}_k$ prend place dans une bande caractéristique de Σ' de base $\{y = 1 - \delta, u = \varepsilon\}$ dont les caractéristiques sont toutes de λ'-longueur égale à $e^{\varepsilon}\theta_0/4n(2n-1)$.*

Preuve. Comme dans le lemme 3.9, ce résultat dépend d'une part de la λ'-longueur des caractéristiques de Σ' et d'autre part d'une constante de Lipschitz uniforme pour une primitive de

$$\lambda'_{|\{y=1-\delta, u=\varepsilon\}} - \frac{1}{2}\sum e^{\varepsilon}[(x_{2j+1} - a_{2j+1})\, dx_{2j+2} - (x_{2j+2} - a_{2j+2})\, dx_{2j+1}]$$

lorsque $a = (a_i)$ parcourt $\overline{D - U_0}$. Or cette primitive, à une constante près, est $e^{\varepsilon}h_a$, de constante de Lipschitz uniforme $e^{\varepsilon}C$ (voir 3.9). D'autre part la λ'-longueur des caractéristiques de Σ' est $\geq e^{\varepsilon}\theta_0(1 - 1/4n)$ (lemme 3.11); c'est $\geq e^{\varepsilon}\theta_0(1/4n)$, qui est la longueur suffisante pour faire ces relèvements. cqfd

La bande caractéristique $T^{\varepsilon}(B)$ pour $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ est contenue dans N''. Donc les $\hat{A}^{\varepsilon}_k$ sont les bases de bandes caractéristiques mutuellement disjointes B^{ε}_k, disjointes de $T^{\varepsilon}(B)$ et tangentes à $\partial_{u'}$ au voisinage de la base (comparer avec 3.10). La fragmentation du difféomorphisme ϕ^{ε} donne lieu à la construction de graphes de hamiltoniens dans des cylindres de Darboux qui ont pour âme les translatés "verticaux" $T'^{\varepsilon}(B^{\varepsilon}_k)$. L'hypersurface $\Sigma^{2\varepsilon}$ ainsi obtenue (son bord est dans $\{u = 2e\}$) intervient dans la chirurgie de la seconde étape qui résorbe la discontinuité existant entre les formules (27) et (28). Ceci termine la construction de $\tilde{\omega}(2\varepsilon)$.

3.14 *Fin de la démonstration du théorème* 1.1 (*sans paramètres*)

En vue de la troisième étape on met en place une hypersurface $\Sigma'^{2\varepsilon}$, au-dessus de $\Sigma^{2\varepsilon}$ et de même bord dans $\{u = 2\varepsilon\}$, et une forme de Liouville $\lambda^{2\varepsilon}$ pour $\tilde{\omega}_2(2\varepsilon)$ avec des propriétés analogues à celles du lemme 3.11. En particulier au voisinage du bord de $\Sigma'^{2\epsilon}$ on a: $\lambda^{2\varepsilon} = e^{2\varepsilon}T^{2\varepsilon}_{*}\lambda$. L'hypersurface $\Sigma'^{2\varepsilon}$ est faite avec des graphes de fonctions ≥ 0

$$m^{2\varepsilon}_k : A_k \times [-1, +1] \to \mathbf{R},$$

tracés dans des cylindres de Darboux. Pour contrôler les longueurs des caractéristiques de $\Sigma'^{2\varepsilon}$ mesurées par $\lambda^{2\varepsilon}$, on choisit judicieusement les supports de ces fonctions:

l'ensemble des points où $\partial_{\hat{x}} m_k^{2\varepsilon} \neq 0$ est contenu dans un anneau $\mathscr{C}_k^{2\varepsilon}$ disjoint de $\mathscr{C}_k^{\varepsilon}$ et l'entourant.

On note $A_k'^{2\varepsilon}$ la réunion des composantes du complémentaire de $\mathscr{C}_k^{2\varepsilon}$ dans A_k ne rencontrant pas ∂A_k. Comme en 3.12 on forme la réunion

$$\mathscr{C}^{2\varepsilon} = \mathscr{C}_0^{2\varepsilon} \cup \mathscr{C}_1^{2\varepsilon} \cup \cdots \cup \mathscr{C}_{2n-2}^{2\varepsilon}$$

et on note $U_0^{2\varepsilon}$ la composante connexe du complémentaire de $\mathscr{C}^{2\varepsilon}$ dans D contenant ∂D.

Concernant les longueurs des caractéristiques γ tracées sur $\Sigma'^{2\varepsilon}$ et mesurées par $\lambda^{2\varepsilon}$ on a les résultats suivants.

LEMME.

(1) *Si $e(\gamma)$ n'appartient ni à $\mathscr{C}^{\varepsilon}$ ni à $\mathscr{C}^{2\varepsilon}$, on a $l(\gamma) \geq e^{2\varepsilon}\theta_0$.*

(2) *Si $e(\gamma)$ appartient exactement à un des colliers $\mathscr{C}^{\varepsilon}, \mathscr{C}^{2\varepsilon}$, on a $l(\gamma) \geq e^{2\varepsilon}\theta_0(1 - 1/4n)$.*

(3) *Si $e(\gamma) \in \mathscr{C}^{2\varepsilon} \cap \mathscr{C}^{\varepsilon}$, on a $l(\gamma) \geq e^{2\varepsilon}\theta_0(1 - 2/4n)$.*

Preuve. Pour une extrémité fixée dans le réduit, on a trois caractéristiques: γ_0 dans $(\{u = 0\}, \omega)$, γ_1 dans $(\Sigma'^{\varepsilon} := \Sigma', \tilde{\omega}_2(\varepsilon))$, et $\gamma_2 = \gamma$ dans $(\Sigma'^{2\varepsilon}, \tilde{\omega}_2(2\varepsilon))$; elles sont mesurées respectivement par λ, $\lambda^{\varepsilon} := \lambda'$, $\lambda^{2\varepsilon}$ Dans le cas 1), on a $l(\gamma_2) \geq e^{\varepsilon} l(\gamma_1) \geq e^{2\varepsilon} l(\gamma_0) \geq e^{2\varepsilon}\theta_0$. Dans le cas 2), on a $l(\gamma_2) \geq e^{\varepsilon} l(\gamma_1) - e^{2\varepsilon}\theta_0/4n$ et $l(\gamma_1) \geq e^{\varepsilon} l(\gamma_0)$. Dans le cas 3), on a $l(\gamma_2) \geq e^{\varepsilon} l(\gamma_1) - e^{2\varepsilon}\theta_0/4n$ et $l(\gamma_1) \geq e^{\varepsilon} l(\gamma_0) - e^{\varepsilon}\theta_0/4n$. cqfd

Ces minorations permettent de trouver des relèvements $\lambda^{2\varepsilon}$-standards pour les A_k, mutuellement disjoints.

Si on itère la construction, en prenant les colliers $\mathscr{C}_k^{q\varepsilon}$ à chaque fois à l'extérieur du précédent, on observe que, pour toute suite de $2n + 1$ entiers $q_0 < \cdots < q_{2n}$, on a:

$$\mathscr{C}^{q_0\varepsilon} \cap \mathscr{C}^{q_1\varepsilon} \cap \cdots \cap \mathscr{C}^{q_{2n}\varepsilon} = \varnothing. \tag{29}$$

Cela implique que si l'on estime en fonction de q les longueurs des caractéristiques γ_q tracées sur les $\Sigma'^{q\varepsilon}$ ayant une extrémité fixée dans l'espace réduit, on ne peut trouver plus de $2n$ raccourcissements. On trouve donc pour tout $q < 1/\varepsilon$,

$$l(\gamma_q) \geq e^{q\varepsilon}\theta_0\left(1 - \frac{2n}{4n}\right) = e^{q\varepsilon}\frac{\theta_0}{2}.$$

Cette estimation a priori assure que la construction peut effectivement être poursuivie jusqu'à $q \sim 1/\varepsilon$, puisque, pour tout q, l'inégalité $l(\gamma_q) > e^{q\varepsilon}\,\theta_0/4n$ permet d'avoir des relèvements $\lambda^{q\varepsilon}$-standards de A_k dans $\Sigma'^{q\varepsilon}$, mutuellement disjoints. Ceci achève la démonstration du théorème 1.1 sans paramètres.

§4. Preuve du théorème 1.1 avec paramètres

Soit I le cube unité d'un espace euclidien. On considère une famille $\omega_\theta = d\lambda_\theta$, $\theta \in I$, de formes symplectiques satisfaisant les hypothèses du théorème 1.1. On note $\omega_\theta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, la déformation de ω_θ donnée au voisinage de $\partial S \times \mathbf{R}^+$ par la formule (4)

$$\omega_\theta(t) = e^t T'^*_t \omega_\theta.$$

On veut construire une famille $\tilde{\omega}_\theta(t)$ de formes symplectiques sur M satisfaisant (i)–(iii) du théorème 1.1

La difficulté principale tient au fait que la géométrie des caractéristiques de $S \times \{0\}$ peut changer avec θ. Pour éviter un problème de bifurcation similaire, A. Hatcher [Ha] a utilisé une technique de partition de l'unité, dont on va s'inspirer ici.

4.1 *Construction de bandes caractéristiques dans le cas à paramètres*

Étant donné une bande caractéristique B de ω_{θ_0}, de base Δ, et un voisinage $\mathcal{N}$ de Δ dans $\{u = 0\}$, la proposition 5 de [La] énonce ce qui suit: *si la forme induite par ω_θ sur Δ est assez proche de celle induite par ω_{θ_0}, il existe des bandes caractéristiques normales $B_1(\theta), \ldots, B_N(\theta)$ pour ω_θ, mutuellement disjointes et C^∞ en θ, dont les bases dans $\{u = 0\}$ rencontrent toutes les caractéristiques de $\mathcal{N}$ qui coupent Δ.*

Noter que la condition de proximité ne porte que sur les bases.

4.2 *Un recouvrement de l'espace des paramètres*

On recouvre I par des cubes I_k, $1 \leq k \leq p$. Si le recouvrement est assez fin, il existe des ensembles finis J_k et des $(2n-2)$-disques $\Delta_{k,j} \subset S \times \{0\}, j \in J_k$, munis de voisinages $\mathcal{N}_{k,j}$ avec les propriétés suivantes:

- les $\Delta_{k,j}$ détruisent la récurrence du feuilletage caractéristique de $(\{u = 0\}, \omega_\theta)$ hors d'un voisinage du bord (voir 2.3), pour tout $\theta \in I_k$;
- les formes induites sur $\Delta_{k,j}$ par ω_θ, $\theta \in I_k$, satisfont la condition de proximité de 4.1;

– les $\Delta_{k,j}$ sont les bases de bandes caractéristiques normales pour ω_{θ_k}, où θ_k est le centre de I_k.

Par hypothèse, le champ ∂_u est un champ de Liouville pour tous les ω_θ, $\theta \in I$, dans un voisinage fixe de $\partial S \times \{0\}$. Comme en 2.4, on peut étendre ce champ de Liouville en un champ Y_θ, $\theta \in I_k$, le long de $S \times \{0\}$, C^∞ en θ, qui est de Liouville pour ω_θ et qui pointe vers $\{u > 0\}$ excepté au voisinage des $\Delta_{k,j}$.

En effet, comme dans la preuve de 2.4, on doit construire une fonction avec une certaine propriété de croissance le long des caractéristiques. Pour chaque $\theta \in I_k$, le rôle de λ est joué par λ_θ. En fait, si on travaille dans $S \times I_k$, la construction est exactement la même qu'en 2.4.

4.3 *Fin de la preuve*

Comme dans le célèbre livre de Steenrod, on choisit une partition de l'unité α_k subordonnée au recouvrement (I_k). On peut supposer $\alpha_k(\theta_k) = 1$. On pose $A_k(\theta) = \alpha_1(\theta) + \ldots + \alpha_k(\theta)$. On construit la famille $(\tilde{\omega}_\theta(t))_{0 \leq t \leq A_k(\theta)}$ par récurrence sur k. Observer que $A_k(\theta) > A_{k-1}(\theta)$ implique $\theta \in I_k$.

Pour $\theta \in I_k$, on pose $\Omega_\theta = \tilde{\omega}_\theta(A_{k-1}(\theta))$. Cette forme coïncide avec ω_θ près de $\{u = 0\}$ et avec ω près de l'infini; en particulier elle satisfait la condition de proximité 4.1. Comme $A_{k-1}(\theta_k) = 0$, on a $\Omega_{\theta_k} = \omega_{\theta_k}$ sur M tout entier. Alors, par 4.2, le disque $\Delta_{k,j}$ est la base d'une bande caractéristique $B_{k,j}$ pour Ω_{θ_k}.

On applique 4.1 à Ω_θ, $\theta \in I_k$, avec $B = B_{k,j}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{k,j}$. Il existe donc un nombre fini de bandes caractéristiques normales $B_{k,j,l}(\theta)$, $l \in L_{k,j}$, pour la forme symplectique Ω_θ, C^∞ en $\theta \in I_k$; leurs bases $\Delta_{k,j,l}(\theta)$, $l \in L_{k,j}$, sont dans $\mathcal{N}_{k,j}$ et leur union sur l recontre toute caractéristique de $\mathcal{N}_{k,j}$ qui coupe $\Delta_{k,j}$. Le long de l'intérieur de $\mathcal{N}_{k,j}$, on peut modifier Y_θ en un champ de Liouville pour $\Omega_\theta = \omega_\theta$ et qui pointe vers $\{u > 0\}$ excepté le long des $\Delta_{k,j,l}(\theta)$; de nouveau cela peut se faire exactement comme en 2.4.

Pour $\theta \in I_k$, la procédure de prolongement décrite au paragraphe 3 s'applique en prenant Ω_θ comme condition initiale au lieu de ω_θ. Elle fournit une famille de formes symplectiques $\tilde{\Omega}_\theta(t)$. $0 \leq t \leq 1$, C^∞ en $\theta \in I_k$, qui coïncident avec $e^t T^t{}_* \Omega_\theta$ près de $\partial S \times \mathbf{R}^+$, avec $\Omega_\theta = \omega_\theta$ près de $S \times \{0\}$ et avec ω près de l'infini. On peut définir alors $\tilde{\omega}_\theta(t)$ pour $A_{k-1}(\theta) \leq t \leq A_k(\theta)$ par

$$\tilde{\omega}_\theta(t) = \begin{cases} \tilde{\Omega}_\theta(t - A_{k-1}(\theta)) & \text{pour } \theta \in I_k \\ \tilde{\omega}_\theta(A_{k-1}(\theta)) & \text{pour } \theta \notin I_k \end{cases}$$

Ces deux formules se recollent car $A_k(\theta) = A_{k-1}(\theta)$ près du bord de I_k. Les formes $\tilde{\omega}_\theta(t)$ ont les propriétés requises au voisinage du bord de M car T^t est un groupe à un paramètre.

4.4 *Compléments sur les primitives*

Concernant les formes symplectiques $\tilde{\omega}(t)$ données par le théorème 1.1, on sait qu'elles sont toutes exactes puisqu'à l'infini elles coïncident toutes avec une même forme exacte. De façon plus précise on a la proposition suivante.

PROPOSITION. *Soit* $(\omega_\theta) = (d\lambda_\theta)$ *une famille de formes symplectiques exactes satisfaisant les hypothèses du théorème* 1.1, *c'est-à-dire que*:

- $\lambda_\theta = \lambda$ *est indépendant de* θ *hors d'un compact fixe sur lequel* ∂_u *est le* $d\lambda$*-dual de* λ;
- ∂_u *est le* $d\lambda_\theta$*-dual de* λ_θ *dans un voisinage fixe de* $\partial S \times \{0\}$.

Dans ces conditions on peut choisir les formes $\tilde{\omega}(t)$ avec des primitives $\tilde{\lambda}(t)$ ayant les propriétés suivantes:

(i) $\tilde{\lambda}_\theta(0) = \lambda_\theta$;
(ii) $\tilde{\lambda}_\theta(t) = \lambda$ en dehors d'un compact fixe;
(iii) $\tilde{\lambda}_\theta(t) = \lambda_\theta$ au voisinage de $S \times \{0\}$
(iv) $\tilde{\lambda}_\theta(t) = e^t(T_t)_* \lambda_\theta$ au voisinage de $\partial S \times [0, +\infty)$.

Preuve. Le seul problème, qui n'existe pas lorsque S est simplement connexe, est de satisfaire la condition (iii).

Considérons d'abord le cas simple où il existe un champ de vecteurs Z_θ, rentrant dans M le long de $\{u = 0\}$, C^∞ en θ, qui coïncide avec ∂_u au voisinage de $\partial S \times \{0\}$ et de l'infini et qui au voisinage de $\{u = 0\}$ est le ω_θ-dual d'une forme de Liouville que l'on peut écrire globalement $\lambda'_\theta = \lambda_\theta + dH_\theta$, où H_θ est une fonction à support compact dans M. On considère

$$\tilde{\lambda}'(t) = e^t \zeta^t_{\theta *}(\lambda'_\theta),$$

où ζ_θ est le flot de Z_θ (comparer avec la remarque 1.2): cette formule est bien définie au-dessus de $\zeta^t_\theta(\{u = 0\})$ et se prolonge canoniquement en-dessous de $\zeta^t_\theta(\{u = 0\})$ en utilisant le fait que Z_θ est un champ de Liouville au voisinage de $\{u = 0\}$ (voir (4)); ce prolongement vaut $\tilde{\lambda}'_\theta(t) = \lambda'_\theta$ au voisinage de $\{u = 0\}$. Une solution du problème dans ce premier cas est alors donnée par

$$\tilde{\lambda}_\theta(t) = \tilde{\lambda}'_\theta(t) - dH_\theta.$$

Dans le complémentaire de cylindres bien choisis, on est dans cette situation, d'après 2.4 et 2.7. Les primitives choisies en dehors des cylindres se prolongent en primitives dans ces cylindres en vertu du lemme de Poincaré. Près de la base des cylindres, les primitives ainsi trouvées ne coïncident peut-être pas avec λ_θ, mais comme ces bases sont simplement connexes on récupère la bonne restriction à $\{u = 0\}$ en corrigeant les primitives par des différentielles de fonctions. cqfd

Appendice: démonstration du lemme de fragmentation

On donne ici une démonstration du lemme de fragmentation de Banyaga énoncé en 3.8.

Au départ on a des domaines $A_k, k = 0, \ldots, p$, formant un recouvrement de $\overline{D - U_0}$. Chaque A_k est une réunion finie de boules disjointes, mais cela ne servira pas. On se donne un rétrécissement $A'_k \subset \operatorname{int} A_k$ tel que les A'_k recouvrent encore $\overline{D - U_0}$. On choisit une fois pour toutes une fonction cloche indépendante du temps, $\alpha: D \to [0, 1]$, à support dans $\operatorname{int} A_0$ et valant 1 sur un voisinage de A'_0.

Soit $h: D \times [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ un hamiltonien dépendant du temps à support dans $(D - U_0) \times [0, 1]$ et soit ϕ^t, $t \in [0, 1]$, l'isotopie hamiltonienne correspondante. Si h est assez petit (en topologie C^1), $\phi^t(A'_0) \subset \operatorname{int} \alpha^{-1}(1)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On pose $h_0 = \alpha h$ et on note ϕ_0^t l'isotopie hamiltonienne correspondante. Si x est proche de A'_0, on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\phi_0^t(x) = \phi^t(x) \quad \text{et} \quad h(\phi_0^t(x), t) = h_0(\phi_0^t(x), t).$$

D'autre part le support de h_0 est contenu dans $(D - U_0) \times [0, 1]$.

On considère le difféomorphisme $\psi = (\phi_0^1)^{-1} \circ \phi^1$. Son support est dans $D - (U_0 \cup A'_0)$. La différence "tordue" de h et de h_0 est un hamiltonien pour une isotopie hamiltonienne de l'identité à ψ, à support dans $D - (U_0 \cup A'_0)$. La différence "tordue" est définie par la formule:

$$H(x, t) = h(\phi_0^t(x), t) - h_0(\phi_0^t(x), t).$$

Par récurrence sur le nombre de domaines de fragmentation, on sait que si H est assez petit, ψ peut être fragmenté comme produit

$$\psi = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_p$$

où chaque ψ_k est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne dont le hamiltonien est à support dans

$$[(D - (U_0 \cup A'_0)) \cap \operatorname{int} A_k] \times [0, 1].$$

Comme la petitesse de H en topologie C^∞ ne dépend que de celle de h, on a le résultat cherché:

$$\phi^1 = \phi_0^1 \circ \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_p. \qquad \text{cqfd}$$

Remarque. La démonstration montre aussi que si on part d'une isotopie hamiltonienne dont le hamiltonien est positif, on peut imposer aux "fragments" d'être donnés par des hamiltoniens positifs. D'autre part, le nombre de dérivées consommées est le nombre de domaines de fragmentation, à une unité près. Comme ce nombre est arbitraire, on doit utiliser la topologie C^∞.

Chapitre II
ENGOUFFREMENT DE CYLINDRES DE LIOUVILLE

Le problème qui est résolu dans ce chapitre est totalement trivial du point de vue de la topologie différentielle alors qu'en topologie symplectique il nécessite des hypothèses très fortes à l'infini. Le théorème de flexibilité établi au chapitre I en est la cheville ouvrière, il sera réénoncé sous la forme où il sera utilisé.

§1. Enoncés des résultats

1.1. On considère une variété symplectique exacte de dimension $2n$ $(M^{2n}, \omega = d\lambda)$, avec un bord $S = \lambda M$ compact. Le champ de vecteurs $\vec{\lambda}$, qui est le ω-dual de la forme de Liouville λ, est supposé positivement complet; en particulier, le champ de Liouville $\vec{\lambda}$ rentre dans la variété le long du bord S, qui est alors *concave* (au sens de [EG]) pour son orientation comme bord. Si φ_t est le flot d'un champ de Liouville pour ω et si φ_{t*} désigne l'opérateur *image directe* sur les formes différentielles, on a l'identité caractéristique

$$\omega \equiv e^t \varphi_{t*} \omega.$$

Tous les champs de Liouville de (M, ω) considérés dans ce chapitre rentrent dans M le long du bord et ne diffèrent de $\vec{\lambda}$ que par un hamiltonien à support compact; en revanche, ils peuvent différer le long du bord. On fait l'hypothèse de convexité à l'infini [EG]:

(H1) *Il existe une hypersurface compacte sans bord Σ, transverse à $\vec{\lambda}$, limitant avec S une variété compacte, et dont le saturé positif par $\vec{\lambda}$ est complet et constitue un voisinage de l'infini de M.*

1.2 *Engouffrement d'un cylindre de Liouville*

Soit A un domaine de S et $C \cong A \times [0, 1]$ un cylindre dans M de base A; on suppose que C est un *cylindre de Liouville*, c'est-à-dire qu'il existe un champ de Liouville Y défini seulement au voisinage de C et tangent aux lignes $a \times [0, 1]$, $a \in A$

(on ne demande pas que Y se prolonge en un champ de Liouville rentrant dans M le long de tout le bord). Enfin on note U_0 le saturé positif de S par $\vec{\lambda}$.

THÉORÈME A. *Sous l'hypothèse* (H1) *le cylindre C peut être engouffré par U_0: il existe une isotopie hamiltonienne ambiante à support compact dans* int M *poussant U_0 jusqu'à contenir C.*

On déduit ce théorème d'un théorème d'engouffrement plus technique.

1.3. Soit Y_1 et Y_2 deux champs de Liouville rentrant dans M le long de S; pour $i = 1, 2$, U_i désigne le saturé positif de S par le champ Y_i.

Soit alors A_1 et A_2 deux domaines compacts dans S; on note $A = A_1 \cap A_2$. On considère d'une part le cylindre R_1 (resp. R), difféomorphe à $A_1 \times [0, 1]$ (resp. $A \times [0, 1]$), qui est le saturé de A_1 (resp. A) par le champ Y_1 jusqu'au temps 1. On considère d'autre part un cylindre $R_2 \cong A_2 \times [0, 1]$ de base A_2, contenu dans U_2 (il n'est pas demandé que Y_2 soit tangent à R_2). On suppose:

(H2) $R = R_1 \cap R_2$ *et, au voisinage de cette intersection,* $Y_1 = Y_2$.

Enfin on fait l'hypothèse topologique suivante:

(H3) $A_1 - A$ *se rétracte par déformation sur un polyèdre de dimension k pour un entier k tel que le cobordisme compact W entre S et Σ ait une décomposition en anses à partir de S sans anses d'indice* $\geq 2n - k$.

Par exemple, l'hypothèse (H3) est satisfaite si $A_1 - A$ est une réunion de boules disjointes. En effet, à cause du champ de Liouville rentrant le long de S, toute

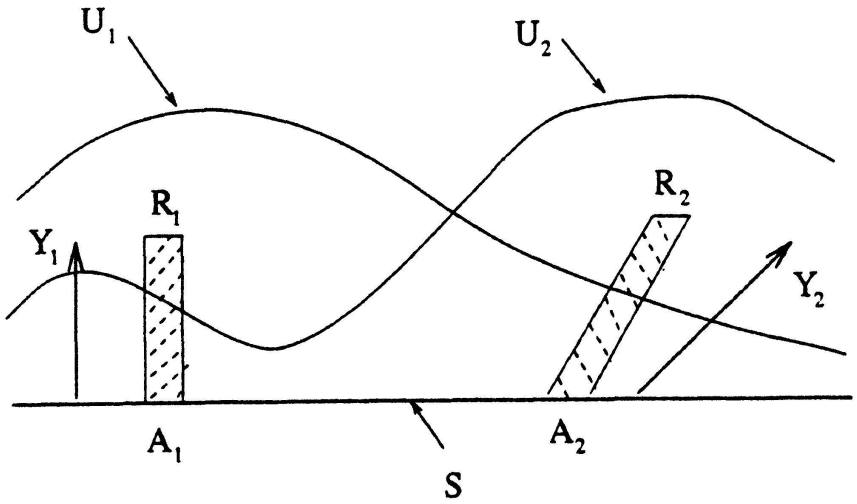


Figure 5

composante connexe de W touche Σ et admet donc une décomposition en anses sans anses d'indice $2n$. Dans la situation décrite ci-dessus on a cet autre théorème d'engouffrement de cylindres:

THÉORÈME B. *Il existe une isotopie hamiltonienne de plongement de R_2 dans $M-(R_1-R)$, stationnaire au voisinage de $R \cup A_2$, partant de l'inclusion et aboutissant dans U_1* (Figure 5).

Pour la démonstration, on pourra se limiter au cas où R_1 et R_2 sont disjoints. En effet soit M' la variété obtenue en retirant à M un petit voisinage régulier de $S \cup R$ qui s'y rétracte en suivant les lignes de champ de Y_1. Soit S' le bord de M'. Les champs de Liouville Y_1 et Y_2 pointent tous les deux vers l'intérieur de M' le long de S'. Soit $A'_i = R_i \cap S'$, $R'_i = R_i \cap M'$ pour $i = 1, 2$. Par construction $R'_1 \cap R'_2 = \varnothing$ et l'engouffrement dans M' donne ce que l'on veut dans M.

1.4 *Déformation de formes symplectiques*

On rappelle le théorème de prolongement de formes symplectiques établi au chapitre I (th. 1.1 et prop. 4.4). On considère une variété V, compacte à bord de dimension $2n-1$, et le produit $V \times [0, +\infty)$. Notant u la dernière coordonnée, on considère sur $V \times [0, +\infty)$ le semi-flot $t \in \mathbf{R}^+ \mapsto T_t$ engendré par $\partial/\partial u$. On se donne une famille de formes symplectiques exactes $\omega_s = d\lambda_s$ dépendant d'un paramètre $s \in [0, 1]^k$. On fait les hypothèses suivantes:

a) *hors d'un compact fixe $\{u \geq u_0\}$, λ_s est indépendant de s;*
b) *$\partial/\partial u$ est le champ de Liouville ω_s-dual de λ_s dans $\{u \geq u_0\}$ et au voisinage de $\partial V \times \{0\}$.*

On considère, pour $t \in [0, 1]$, le chemin $\omega_s(t)$ de germes de formes symplectiques le long du bord de $V \times [0, +\infty)$ défini par les deux formules suivantes:

$$\omega_s(t) = e^t (T_t)_* \omega_s \quad \text{au voisinage de } \partial V \times [0, +\infty) \tag{1}$$

$$\omega_s(t) = \omega_s \quad \text{au voisinage de } V \times \{0\}. \tag{2}$$

Pour donner complètement un sens à la formule (1), on observe que $\partial/\partial u$ étant un champ de Liouville au voisinage de $\partial V \times \{0\}$, la structure symplectique ω_s se prolonge canoniquement comme germe le long de $\partial V \times (-\infty, 0]$, en imposant que $\partial/\partial u$ y soit un champ de Liouville; la formule (1) est alors bien définie et produit une déformation de ω_s stationnaire au voisinage de $\partial V \times \{0\}$.

THÉORÈM DE PROLONGEMENT. *Dans les conditions ci-dessus, il existe des formes symplectiques exactes $\tilde{\omega}_s(t)$ et des primitives $\tilde{\lambda}_s(t)$ dépendant continûment*

des deux paramètres et vérifiant:

(a) *hors d'un compact fixe* $\{u \geq u_1\}$, $\tilde{\lambda}_s(t)$ *est indépendant de* s *et de* t;

(b) *au voisinage du bord,* $\tilde{\omega}_s(t)$ *est donné par les formules* (1) *et* (2);

(c) *au voisinage de* $\{u = 0\}$, $\tilde{\lambda}_s(t) = \lambda_s$;

(d) *au voisinage de* $\partial V \times [0, +\infty)$, $\tilde{\lambda}_s(t) = e^t(T_t)_* \lambda_s$;

(e) *pour* $t = 0$, $\tilde{\lambda}_s(0) = \lambda_s$.

1.5 NOTATION. Revenant à la variété M de 1.1, pour un ouvert U de M contenant S, on note $\mathscr{K}(U)$ l'ensemble des formes symplectiques exactes de M dont une primitive coïncide avec λ au voisinage de S et hors d'un compact de U. On ne considère pas $\mathscr{K}(U)$ comme un espace topologique mais comme un ensemble simplicial; les k-simplexes sont les familles à k paramètres de formes symplectiques exactes se relevant en une famille de primitives qui coïncident avec λ au voisinage de S et hors d'un compact *fixe* de U. D'après le lemme de Moser [Mo], dans un k-simplexe de $\mathscr{K}(U)$ tous les éléments se déduisent les uns des autres par une isotopie ambiante à support dans le compact indiqué.

§2. Démonstration du théoréme B

Comme on l'a dit, on peut se limiter au cas où R_1 et R_2 sont disjoints.

Voici le plan de la démonstration: on pousse R_2 dans U_1 par une isotopie hamiltonienne du type "Alexander"; on crée ainsi des intersections de R_2 avec R_1. On fait fuir ces intersections par le bord libre de R_1, ce qui détruit la structure symplectique. Le théorème de prolongement rappelé précédemment, joint au lemme de Moser, permet le redressement de la structure symplectique tout en laissant R_1 disjoint de R_2. On établit enfin que cette construction est le résultat d'une isotopie hamiltonienne.

Voici les détails. On note $\eta_i(t)$ le semi-flot de Y_i et S_i l'hypersurface $\eta_i(1)(S)$.

LEMME 1. *L'hypersurface* S_2 *est isotope à* S_1 *par une isotopie hamiltonienne ambiante fixe près du bord.*

Preuve (à la Alexander). La formule $\eta_1(\theta)\eta_2(\theta)^{-1}|S_2$ est une isotopie hamiltonienne que l'on prolonge à support compact dans int M et qui convient. cqfd

Quitte à remplacer le temps 1 du flot η_2 par un temps plus grand, on peut supposer que R_2 est dans la composante compacte limitée par S et S_2. On récolte ainsi une isotopie hamiltonienne $\phi_t: R_2 \to M$, $t \in [0, 1]$, où ϕ_0 est l'inclusion de R_2 dans M où $\phi_1(R_2) \subset U_1$. Mais $\phi_1(R_2)$ n'a aucune raison d'être disjoint de R_1. Soit $\chi_u: M \to M$, $u \in [0, 1]$, une isotopie (non hamiltonienne), fixe près du bord, à support compact dans $U_1 - R_2$ et déplaçant chaque point sur son Y_1-orbite dans le

sens du champ. On demande que $\chi_1^{-1}(R_1)$, qui est contenu dans R_1, soit disjoint de $\phi_t(R_2)$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'isotopie $t \mapsto (\chi_1 \phi_t : R_2 \to M - R_1)$ est hamiltonienne pour $\omega' := \chi_{1*}\omega$ et non pour ω.

La forme symplectique ω' coïncide avec ω près de S. Ceci permet de considérer la formule suivante qui donne une déformation de ω' jusqu'à ω le long de R_1:

$$\omega'_s = e^s(\eta_1(s))_* \omega' \tag{3}$$

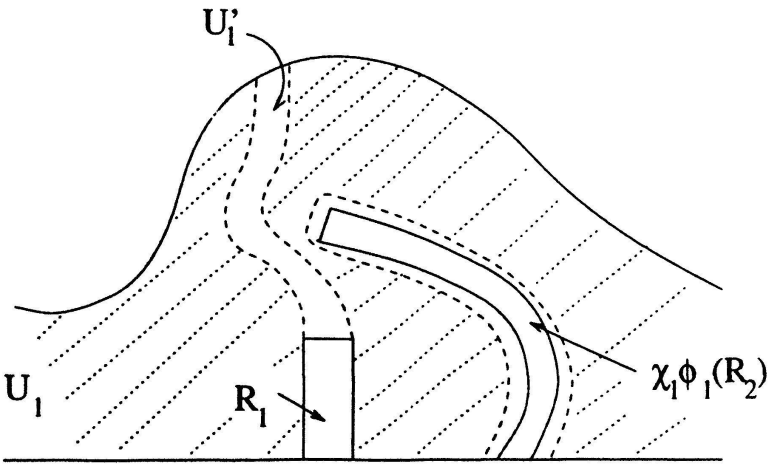
Pour $s = 0$, on a $\omega'_0 = \omega'$ et, pour s proche de 1, on a $\omega'_s = \omega$ le long de R_1 à cause de l'identité caractéristique des champs de Liouville. On applique alors le théorème de prolongement à cette déformation de formes symplectiques. Voici comment on le fait (Figure 6).

On considère un champ $\tilde{Y}_1$ (de flot $\eta_1(s)$), coïncidant avec Y_1 près de $S \cup R_1$ et hors d'un compact de U_1. On demande que le saturé de A_1 par $\tilde{Y}_1$ évite $\chi_1 \phi_1(R_2)$ et que U_1 soit encore le saturé de S par ce nouveau champ; ceci est facile à assurer car, topologiquement, $\chi_1 \phi_1(R_2)$ se rétracte sur A_2.

Si dans la formule (3), on remplace η_1 par $\tilde{\eta}_1$, on obtient une déformation de ω' définie par (4) sur l'adhérence de U'_1 dans U_1, où U'_1 est le $\tilde{Y}_1$-saturé d'un voisinage de R_1:

$$\omega'(s) = e^s(\tilde{\eta}_1(s))_* \omega'. \tag{4}$$

On considère U''_1, obtenu à partir de $U_1 - U'_1$ en retirant l'intérieur d'un voisinage régulier ouvert de $\chi_1 \phi_1(R_2)$. Cette variété est de la forme $V \times [0, +\infty)$, où V est une variété compacte à bord. La déformation, donnée par (4) le long de $\partial V \times [0, +\infty)$, et stationnaire égale à ω' le long de $V \times \{0\}$, s'étend à U''_1 d'après



(U''_1 est en pointillés)

Figure 6

le théorème de prolongement. Finalement, la déformation (4) de ω' à ω le long de R_1 se prolonge en une famille de formes symplectiques définies sur M tout entier et notées $\omega_{1,s}$. *La déformation est à support compact dans U_1 et est stationnaire sur* $\chi_1\phi_1(R_2)$; de plus les formes $\omega_{1,s}$ sont exactes et ont chacune une primitive $\lambda_{1,s}$ qui coïncide avec λ hors d'un compact fixe de U_1. Par le c) du théorème de prolongement, on peut choisir les primitives de sorte que $\lambda_{1,s} = \chi_{1*}\lambda$ sur un voisinage de $S \cup \chi_1\phi_1(R_2)$.

On pose $\omega_{1,1} =: \Omega_1$. Le plongement $\chi_1\phi_1$ est symplectique d'un voisinage de R_2 muni de ω vers $U_1 - R_1$ muni de Ω_1.

LEMME 2. *Ω_1 est isotope à ω par une isotopie à support compact dans U_1 et stationnaire au voisinage de R_1. De plus le lacet formé des chemins décrits de ω à ω' ($u \mapsto (\chi_u)_*\omega$) puis de ω' à Ω_1 ($s \mapsto \omega_{1,s}$), complété par l'isotopie rel R_1, de Ω_1 à ω, est contractile dans $\mathscr{K}(U_1)$.*

Preuve. D'après le lemme de Moser [Mo], pour établir la première partie du lemme, il suffit de trouver un chemin dans $\mathscr{K}(U_1)$ joignant Ω_1 à ω constitué de formes symplectiques qui coïncident avec ω au voisinage de R_1. En effet, comme ce cylindre se rétracte par déformation sur sa base, on peut trouver des primitives qui coïncident avec λ sur $R_1 \cup S$ et hors d'un compact fixe; le générateur infinitésimal de l'isotopie de Moser est alors nul sur ces deux domaines.

On obtient ce chemin dans $\mathscr{K}(U_1)$ en appliquant le théorème de prolongement avec un paramètre. Précisément, considérons la famille de formes symplectiques $\omega_u = \chi_{u*}\omega$, $u \in [0, 1]$, et sa déformation le long de l'adhérence de U_1' donnée par

$$\omega_{u,s} = e^s(\tilde{\eta}_1(s))_*\omega_u,\ s \in [0, 1].$$

Comme plus haut, par le théorème de prolongement elle s'étend à $U_1'' = V \times [0, +\infty)$ et donc à U_1 en prenant $\omega_{u,s} = \omega_u$ sur $U_1 - (U_1' \cup U_1'')$ pour tout s. C'est un 2-simplexe dans $\mathscr{K}(U_1)$. Pour $u = 1$, le chemin $\omega_{1,s}$ est celui décrit précédemment de ω' à Ω_1. Pour $s = 1$ et tout $u \in [0, 1]$, on a $\omega_{u,1} = \omega$ au voisinage de R_1 (Figure 7).

On peut faire mieux car, en même temps que l'on change la condition initiale ω' en ω_u, on peut changer le plongement de $V \times [0, +\infty)$, sans changer celui de $\partial V \times [0, +\infty)$, de sorte que, pour $u = 0$, $V \times \{0\}$ soit contenu dans S: la rétraction de R_2 sur A_2 fournit une isotopie de U_1'' jusqu'à $U_1 - U_1'$. Dans ce cas, comme $\tilde{Y}_1$ est un champ de Liouville le long de S tout entier, la déformation de formes symplectiques pour $u = 0$ peut être globalement donnée par $\omega_{0,s} = e^s(\tilde{\eta}_1(s))_*\omega$.

Cependant ce dernier chemin n'est pas encore stationnaire, car $\tilde{Y}_1$ n'est pas un champ de Liouville pour ω sur tout U_1. Pour y parvenir, on choisit, pour

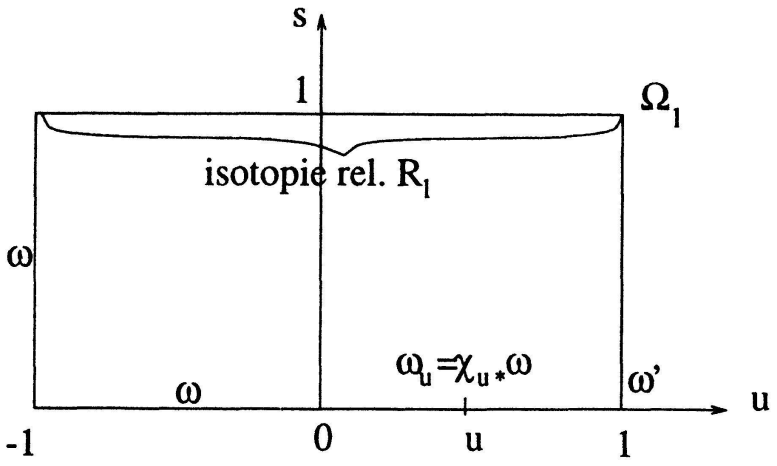


Figure 7

$u \in [-1, 0]$, une famille de champs de vecteurs Z_u, de flots ζ_u, joignant $Z_0 = \tilde{Y}_1$ à $Z_{-1} = Y_1$ parmi les champs de vecteurs qui coïncident avec Y_1 au voisinage de $S \cup R_1$ et hors d'un compact de U_1 et dont les orbites sont propres dans U_1 (donc le saturé de S est toujours U_1). On applique alors la formule globale

$$\omega_{u,s} = e^s(\xi_u(s))_*\omega, \qquad u \in [-1, 0], \quad s \in [0, 1].$$

Pour $u = -1$, $\omega_{-1,s} = \omega$ pour tout s. Finalement $\omega_{u,1}$ pour u variant de -1 à $+1$ joint ω à Ω_1, avec les propriétés requises.

Enfin, la contractibilité du lacet décrit dans l'énoncé résulte de la construction même du chemin de Ω_1 à ω. cqfd

L'isotopie de Moser à support dans $U_1 - R_1$ qui ramène Ω_1 sur ω modifie le plongement $\chi_1\phi_1 \mid R_2$ en un plongement $\Psi_1 : (R_2, \omega) \to (U_1 - R_1, \omega)$. Il reste à voir que ce plongement symplectique est isotope, de façon hamiltonienne dans $(M - R_1, \omega)$, à l'injection de R_2.

Dit brièvement, le chemin de R_2 à $\Psi_1(R_2)$ est "hamiltonien vis-à-vis de formes variables". On applique à ce chemin de formes une procédure de redressement de la structure symplectique analogue à la précédente; mais cette fois-ci, elle est appliquée à M et non à U_1 et c'est là que l'on utilise les hypothèses à l'infini.

Notons Ψ_t, $t \in [0, 1]$, la famille de plongements $R_2 \to M - R_1$ obtenue en mettant bout à bout le chemin $\chi_1\phi_t \mid R_2$ puis l'isotopie de Moser; Ψ_0 est l'inclusion et Ψ_1 est ω-symplectique à valeurs dans $U_1 - R_1$.

LEMME 3. *Il existe un lacet* $\{\omega(t)\}$ *contractile dans* $\mathcal{K}(M)$ *tel que* $\Psi_t : (R_2, \omega) \to (M - R_1, \omega(t))$ *soit symplectique.*

Preuve. Essentiellement le lacet $\{\omega(t)\}$ est donné par le bord du rectangle de la figure 7. En changeant le paramétrage, on peut supposer que $\Psi_t = \Psi_0$ sur un intervalle de temps au cours duquel on déforme ω en ω' par $(\chi_u)_*$; cette déformation est stationnaire sur R_2. Ensuite Ψ_t varie comme $\chi_1\varphi_1$ et est symplectique de (R_2, ω) vers $(M - R_1, \omega')$. Puis on déforme ω' en Ω_1 selon le chemin de la figure 7; cette déformation est constante sur $\chi_1\varphi_1(R_2)$. On finit en déformant $\chi_1\varphi_1$ et Ω_1 par l'isotopie de Moser. (cqfd)

Pour la fin, on peut oublier comment Ψ_t et $\omega(t)$, $t \in [0, 1]$, ont été fabriqués et partir simplement du lemme 3. Par commodité, on suppose que l'un et l'autre sont indépendants de t pour t voisin de 0 et de 1. Le lemme suivant permettra de conclure grâce à Moser.

LEMME 4.

(1) *Il existe une famille de formes symplectiques* $\omega_s(t) \in \mathscr{K}(M)$, $s, t \in [0, 1]$ *vérifiant*:

(i) $\omega_s(t) = \omega(t)$ *le long de* $\Psi_t(R_s)$,

(ii) $\omega_0(t) = \omega(t)$,

(iii) $\omega_1(t) = \omega$ *le long de* R_1,

(iv) *pour tout* s, $\omega_s(0) = \omega_s(1) = \omega$.

(2) *Le lacet* $t \mapsto \omega_1(t)$ *est contractile dans le sous-espace* $\mathscr{K}(M \bmod R_1)$ *des formes symplectiques qui coïncident avec* ω *voisinage de* R_1.

Preuve. 1) Comme les anses de la paire (M, S) peuvent s'attacher sur S sans toucher A_1 (hypothèse H2), il est facile de trouver un champ de vecteurs Z_0, coïncidant avec Y_1 sur un voisinage $V(R_1)$ de R_1 et hors d'un compact, tel que le saturé de $V(R_1)$ par Z_0 évite R_2 et soit proprement plongé dans M. Soit $\tilde{\Psi}_t$ une isotopie ambiante prolongeant Ψ_t à support compact dans $M - R_1$; on pose $Z_t = \tilde{\Psi}_{t*} Z_0$ et on note $s \mapsto \xi_t(s)$ son flot. Le Z_t-saturé de $V(R_1)$ est proprement plongé, évite $\Psi_t(R_2)$ et est indépendant de t hors d'un compact; dans ce domaine, on considère la formule:

$$\omega_{s,t} = e^s(\xi_t(s))_* \omega(t). \tag{5}$$

Soit M_t la variété obtenue à partir de M en retirant le Z_t-saturé de $V(R_1)$, un voisinage de $\Psi_t(R_2)$ et un voisinage des anses de la paire $(M, S \cup \Psi_t(R_2)$. Cette variété est de la forme $V \times [0, +\infty)$ où V est une variété compacte à bord.

La formule $s \mapsto \omega_{s,t}$ donne une déformation de $\omega(t)$ le long de $\partial V \times [0, +\infty)$, que l'on étend de façon stationnaire égale à $\omega(t)$ le long de $V \times \{0\}$. Son prolongement à $V \times [0, +\infty)$ donne le $\omega_s(t)$ cherché, vérifiant (i)–(iii). La propriété (iv)

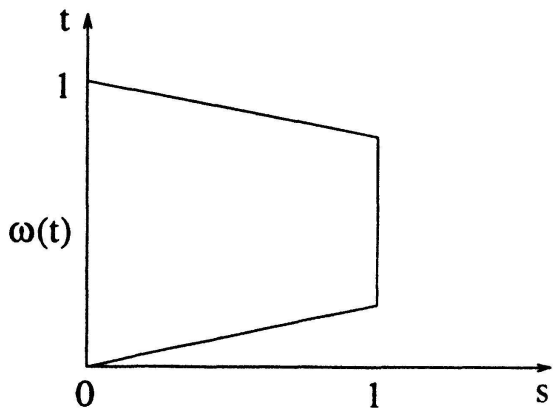


Figure 8

s'obtient en jouant sur l'intervalle où varie s (voir Figure 8). En effet, pout $t = 0$, 1, le champ Z_t, qui coïncide avec Y_1 au voisinage de R_1, est un champ de Liouville pour ω sur R_1 et la formule (5) donne une forme symplectique indépendante de s sur R_1; donc si on tronque l'intervalle de variation de s pour t voisin de 0 et 1, on ne perd pas la propriété (iii) et on gagne la propriété (iv).

2) Le lacet $\{\omega(t)\}$ est contractile dans $\mathscr{K}(M)$; il en est donc de même du lacet homotope $\{\omega_1(t)\}$. Mais ce dernier se trouve dans $\mathscr{K}(M \bmod R_1)$. On considère la contraction de $\{\omega_1(t)\}$ dans $\mathscr{K}(M)$ et on lui applique la formule habituelle (voir (3)) pour redresser les formes le long de R_1, puis le théorème de prolongement avec deux paramètres pour obtenir une contraction dans $\mathscr{K}(M \bmod R_1)$. cqfd

On achève la démonstration du théorème comme suit: d'après le (i) du lemme 4, Ψ_t est un plongement symplectique de (R_2, ω) dans $(M - R_1, \omega_1(t))$. Le lemme de Moser (à paramètre) permet de redresser $\omega_1(t)$ en ω par une isotopie à support compact dans $M - R_1$, dépendant continûment de t et valant l'identité pour $t = 0$, 1. En modifiant Ψ_t par cette isotopie on obtient l'engouffrement cherché, ce qui termine la démonstration du théorème B.

§3. Démonstration du théorème A

3.1 En remplaçant A par un voisinage dans S, on peut supposer que A est un polyèdre.

LEMME. *Si la triangulation est assez fine, on a la propriété de prolongement suivante*:

(H4) *Pour tout* $(2n-1)$*-simplexe* σ *de* A, *le germe de* Y *au voisinage de* σ *se prolonge en germe de champ de Liouville* Y_σ *le long de* S *rentrant dans* M.

Preuve. Au départ Y est le champ dual d'une forme de Liouville $\mu = \lambda + df$. Soit u une fonction sans point critique au voisinage de S telle que $S = u^{-1}(0)$ et que $du(\vec{\lambda}) = 1$ le long de A. Les caractéristiques de S sont dirigées par $\vec{du}$, le champ hamiltonien dual de du. La question de prolonger Y en un champ de Liouville le long de S rentrant dans M, c'est-à-dire vérifiant $du(Y) > 0$ ou encore $\omega(\vec{du}, Y) > 0$, revient à prolonger à S la fonction f de sorte que:

$$\omega(\vec{df}, \vec{du}) + \omega(\vec{\lambda}, \vec{du}) < 0, \tag{6}$$

ou encore $df(\vec{du}) < 1$.

En général l'application de l'inégalité des accroissements finis sur un segment caractéristique de S ayant ses deux extrémités dans A interdit l'existence d'un prolongement. En revanche si σ est assez petit, il n'y a pas d'obstruction à trouver un prolongement de $f_{|\sigma}$ satisfaisant (6) en tout point de S. Précisément l'obstruction est nulle s'il existe $T > 0$ vérifiant:

- $\max f_{|\sigma}$-$\min f_{|\sigma} < T$;
- σ est contenu dans une boîte B du flot de $\vec{du}$ telle que le temps de retour de B dans lui-même soit $> T$ (voir chap. I, 2.4).

Cette condition est satisfaite si le diamètre de σ est assez petit. cqfd

3.2. La démonstration du théorème A se fait maintenant par récurrence sur le nombre de $(2n-1)$-simplexes de A dans une triangulation vérifiant (H4).

Soit σ un $(2n-1)$-simplexe de A. On écrit $A = \sigma \cup A'$ avec $\sigma \cap A' = \tau \subset \partial\sigma$; τ est un sous-polyèdre de A'. Par hypothèse de récurrence, l'ouvert U_0 saturé positif de S par $\vec{\lambda}$ contient le cylindre de Liouville $C' = A' \times [0, 1]$ après une isotopie hamiltonienne convenable à support compact dans int M. Soit $Y_1 = Y_\sigma$ le champ de Liouville donné au voisinage de S par le lemme 3.1 et globalisé par partition de l'unité de sorte que $Y_1 = Y$ le long de $\sigma \times [0, 1]$. Notons U_1 le saturé positif de S par Y_1. En vertu du lemme 1 du §2, U_1 peut engouffrer C' par une isotopie hamiltonienne à support compact dans int$M$. Notons U_2 le résultat sur U_1 de cette isotopie: $U_2 \supset C'$. Cet ouvert est muni naturellement d'un champ de Liouville Y'_2, transporté de Y_1 par l'isotopie. Considérons les polyèdres P_1 et P_2 respectivement saturé positif de τ jusqu'au temps 1 par les champs Y_1 et Y'_2. On a $P_1 \subset C'$ car $Y_1 = Y$ au voisinage de $\tau \times [0, 1]$. Donc P_1 et P_2 sont tous les deux dans U_2.

LEMME. *Il existe une isotopie hamiltonienne à support compact dans $U_2 - S$ transportant P_2 sur P_1 avec leurs champs de Liouville respectifs.*

Preuve. La structure symplectique au voisinage d'un cylindre de Liouville est

conjuguée à celle d'un modèle Q déterminé par la structure symplectique et le champ de Liouville au voisinage de la base du cylindre. Comme $Y_1 = Y'_2$ au voisinage de τ, P_1 et P_2 ont des voisinages symplectomorphes. L'isotopie va être donnée par une interpolation. A l'aide d'une partition de l'unité, on choisit un champ de Liouville Y'_1 coïncidant avec Y_1 au voisinage de $S \cup P_1$ et avec Y'_2 hors d'un compact de U_2. Cette dernière condition assure que le saturé positif de S par Y'_1 est contenu dans U_2. Soit $Y'_t = (t-1)Y'_2 + (2-t)Y'_1$, $t \in [1, 2]$; c'est un champ de Liouville coïncidant avec Y'_2 hors d'un compact de $U_2 - S$. Soit P_t le saturé positif de τ par Y'_t jusqu'au temps 1; P_t est l'image d'un plongement canonique $\phi_t : \tau \times [0, 1] \to U_2$ et $t \in [1, 2] \mapsto \phi_t$ est une isotopie d'un plongement canonique $\phi_t : \tau \times [0, 1] \to U_2$ et $t \in [1, 2] \mapsto \phi_t$ est une isotopie hamiltonienne de plongements. L'isotopie cherchée s'obtient par extension des isotopies. cqfd

On note alors Y_2 le transporté de Y'_2 par cette isotopie. L'ouvert U_2 est le saturé positif de S par Y_2 et contient C'. Par construction $Y_2 = Y_1$ au voisinage de $\tau \times [0, 1]$. Les hypothèses du théorème B sont satisfaites, avec $R_1 = \sigma \times [0, 1]$, $R_2 = C' = A' \times [0, 1]$, ce qui achève la démonstration du théorème A.

Chapitre III
ENGOUFFREMENT DE SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES

On revient à la situation décrite dans l'introduction et en se fondant sur le théorème d'engouffrement des cylindres de Liouville on va établir le théorème d'engouffrement des sous-variétés lagrangiennes qui y a été annoncé.

On rappelle que:

- $(M^{2n}, \omega = d\lambda)$ est une variété symplectique exacte convexe à l'infini de dimension ≥ 6,
- L est une sous-variété lagrangienne exacte compacte connexe,
- $U(L)$ est un ouvert de M isomorphe à T^*L,
- $\pi_1(M, L) = 0$, $\pi_2(M, L) = 0$,
- $\{L_t\}$ est un chemin de sous-variétés lagrangiennes compactes λ-exactes avec $L_0 \subset U(L)$.

THÉORÈME D'ENGOUFFREMENT GÉNÉRIQUE. *L'ouvert cotangent $U(L)$ peut engouffrer rel. L une ε-approximation de $\{L_t\}$.*

Tous les champs de Liouville considérés dans ce chapitre sont équivalentes à $\vec{\lambda}$ au sens où ils ne diffèrent de $\vec{\lambda}$ que par un hamiltonien à support compact.

§1 Préliminaires

1.1 *Stratification associée à L.*

Considérons l'espace $\mathscr{L}$ des sous-variétés lagrangiennes λ-exactes difféomorphes à L_0, muni de la topologie C^∞. Le type de contact d'un élément $L' \in \mathscr{L}$ avec L permet de stratifier $\mathscr{L}$ comme suit:

- $\mathscr{L}^0$ est formé des sous-variétés transverses à L; c'est un ouvert dense;
- $\mathscr{L}^1$ est formé des sous-variétés ayant exactement un point de contact avec L, lequel est quadratique; $\mathscr{L}^1$ est une "sous-variété de codimension 1";
- $\mathscr{L}^2 := \mathscr{L} - (\mathscr{L}^0 \cup \mathscr{L}^1)$; c'est un fermé de codimension >1.

Le théorème de transversalité de Thom énonce que génériquement un chemin $\{L_t\}$ dans $\mathscr{L}$ est transversal à $\mathscr{L}^1$ et évite $\mathscr{L}^2$.

Dans ce cas l'isotopie est formée d'un nombre fini de chemins des types suivants:

- chemin où L_t reste transverse à L;
- chemin conjugué à un chemin élémentaire d'elimination ou de naissance d'une paire de points d'intersection avec L.

Cette dernière définition sera précisée ultérieurement. Pour le théorème d'engouffrement générique, il suffit de considérer successivement ces deux types de chemins. Dans les deux cas, l'ingrédient essentiel est le théorème suivant, établi au chapitre II.

1.2 *Le théorème d'engouffrement des cylindres de Liouville*

On considère une hypersurface S compacte connexe, bordant un domaine compact. La composante non compacte du complémentaire est notée Ext S (extérieur de S) et la composante compacte est notée Int S (intérieur de S).

On suppose que S est transverse à un champ de Liouville X (qui pointe nécessairement vers Ext S); on note U_X le saturé positif de S par X. On se donne un cylindre $C = A \times [0, 1]$ dans Ext S, dont la base $A = A \times \{0\}$ est contenue dans S. On suppose que C est un *cylindre de Liouville*, c'est-à-dire qu'il existe au voisinage de C un champ de Liouville Y, transverse à S et tangent aux lignes $\{a\} \times [0, 1]$, $a \in A$.

THÉORÈME. *Il existe une isotopie hamiltonienne de* Ext S, *stationnaire sur* S, *à support compact et poussant* U_X *jusqu'à contenir* C.

1.3 *Première réduction, chemin de type constant*

Deux chemins $\{L_t\}$ et $\{L'_t\}$ sont dits *conjugués* s'il existe une isotopie hamiltonienne préservant L, $\psi_t : (M, L) \to (M, L)$, telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, $L'_t = \psi_t(L_t)$. Si l'ouvert $U(L)$ peut engouffrer le chemin $\{L_t\}$ rel. L, il peut aussi engouffrer tout autre chemin qui lui est conjugué.

LEMME. *Un chemin dans $\mathscr{L}^0$ est conjugué à un chemin, dit de type constant, où $L_t \cap L$ est fixe et où $\{L_t\}$ est stationnaire au voisinage de l'intersection avec L.*

En effet, d'une part il existe une isotopie de L en lui-même qui ramène $L_t \cap L$ à sa position initiale. Comme L est lagrangienne cette isotopie s'étend en isotopie hamiltonienne ambiante. D'autre part l'espace des germes de disques lagrangiens transverses à L en un point donné est contractile. Une seconde isotopie hamiltonienne permet donc de redresser L_t au voisinage de $L_t \cap L$. cqfd

1.4 *Seconde réduction, chemin linéaire*

Soit $U(L_0) \cong T^*L_0$ un ouvert cotangent muni de sa structure fibrée. Soit f: $L_0 \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞. Le graphe de df dans T^*L_0 donne une sous-variété lagrangienne λ-exacte. Réciproquement tout élément de $\mathscr{L}$ assez proche de L_0 est un tel graphe car la λ-exactitude équivaut à l'exactitude dans le cotangent.

Le chemin $\{L_t\}$ formé des graphes des différentielles $t\,df$, $t \in [0, 1]$, est le prototype d'un *chemin linéaire* dans $\mathscr{L}$ et la fonction f est sa fonction génératrice. On obtient un chemin linéaire par morceaux en mettant bout à bout un nombre fini de chemins linéaires (à reparamétrage près).

Si L_0 est transverse à L et si df est assez petite, le chemin linéaire associé est dans $\mathscr{L}^0$. Si de plus f est constante au voisinage de chaque point d'intersection avec L, le chemin linéaire est de type constant.

Grâce à la compacité de l'intervalle $[0, 1]$ et sachant que tout élément de $\mathscr{L}$ donne lieu à un ouvert cotangent, on établit immédiatement:

LEMME. *Pour tout chemin de type constant $\{L_t\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un chemin linéaire par morceaux $\{L'_t\}$ ayant les mêmes extrémités et tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, L'_t soit ε-proche de L_t.*

Au §2 on établira que le théorème d'engouffrement vaut pour les chemins linéaires de type constant. Comme conséquence on aura l'engouffrement des chemins de type constant linéaires par morceaux et donc l'engouffrement des isotopies génériques $\{L_t\}$ où L_t reste transverse à L. L'engouffrement des chemins élémentaires de naissance ou d'élimination d'une paire de points d'intersection avec L sera traité au §3, achevant ainsi la démonstration du théorème d'engouffrement générique.

Pour finir ce paragraphe de préliminaires, on dégage une idée d'équivalence très utile pour l'engouffrement.

1.5 *Principe d'équivalence*

Si S est une hypersurface transverse à un champ de Liouville Y et borde un domaine compact, on note $W(S, Y)$ la réunion de ce domaine et du saturé positif de S.

LEMME. *Soit* (S_t, Y_t), $t \in [0, 1]$, *une famille à un paramètre d'hypersurfaces et de champs de Liouville transverses (où* Y_t *diffère de* Y_0 *par un champ hamiltonien). Alors* $W(S_0, Y_0)$ *et* $W(S_1, Y_1)$ *engouffrent les mêmes compacts; autrement dit, tout compact du premier ouvert peut être poussé dans l'autre par une isotopie hamiltonienne.*

Preuve. Observant que $S_{t+\delta t}$ est encore transverse à Y_t pour δt assez petit, par une discrétisation du paramètre il suffit de considérer le cas où $S_t = S_0$ pour tout t. Soit K un compact de $W(S_0, Y_0)$ et soit S'_0 l'image de S_0 par le flot de Y_0 au temps T choisi assez grand pour que S'_0 soit au-delà de K (Ext $S'_0 \cap K = \emptyset$). Soit S'_1 l'image de $S_1 = S_0$ par le flot de Y_1 au même temps T. On sait qu'il existe une isotopie hamiltonienne rel. S_0 poussant S'_1 sur S'_0 (truc d'Alexander, lemme 1 §2 Chap. II) et donc $W(S_1, Y_1)$ jusqu'à contenir K. cqfd

Le principe d'équivalence s'applique évidemment

(1) à des hypersurfaces isotopes en restant transverses à un même champ de Liouville;
(2) à une hypersurface munie de deux champs de Liouville transverses;
(3) à deux hypersurfaces se déduisant l'une de l'autre par isotopie hamiltonienne.

Avec l'hypothèse du lemme ci-dessus, on dira que S_0 et S_1 sont des *hypersurfaces équivalentes*. Si toutes les S_t sont au-delà d'un compact K on les dira équivalentes rel. K. On donne ci-dessous un critère d'équivalence.

1.6 *Critère d'équivalence*

Soit (S, X) une hypersurface munie d'un champ de Liouville transverse. Soit A une sous-variété compacte de S et $C \cong A \times [0, 1]$ un cylindre de Liouville engendré par un champ de Liouville Y (défini seulement au voisinage de C); Y est transverse à S le long de A et $C \cap S = A \times \{0\}$. Soit S' une hypersurface obtenue à partir de S par un glissement le long des orbites de Y.

LEMME. *Si* dim $A \leq n-2$ *et quitte à remplacer* S *par une hypersurface voisine,* S' *est équivalente à* S.

Remarque. S est bien équivalente à toutes ses approximations; cela ne prouve pas qu'après glissement elles restent équivalentes.

Preuve. D'après 1.5 il suffit de prouver que Y se prolonge en un champ de Liouville transverse à S. Au voisinage de C on a $Y = X + \overrightarrow{df}$, où $\overrightarrow{df}$ est un champ hamiltonien. Si u est une fonction, telle qu'en tout point de S on ait $u = 0$ et $du(X) > 0$, et si $\overrightarrow{du}$ est le champ hamiltonien correspondant, la transversalité de Y à S s'écrit:

$$df(\overrightarrow{du}) < du(X).$$

Disons que $du(X) \geq 1$. Soit $T = \max f_{|A} - \min f_{|A}$. Génériquement sur S, le flot de $\overrightarrow{du}$ ne va pas de A sur lui-même en temps $< T$; en effet l'espace des orbites de $\overrightarrow{du}$ est de dimension $2n-2 > 2$ dim A. Le prolongement de la fonction f vérifiant l'inégalité ci-dessus se fait sans difficulté (voir chap. I, 2.4). cqfd

Si dim $A = n-1$, il y a un nombre fini de retours en temps $< T$. Si de tels retours n'existent pas, S' est équivalente à S.

§2. Rideau d'un chemin linéaire

2.1 DÉFINITION. Etant donné un chemin linéaire de type constant de fonction génératrice $f\colon L_0 \to \mathbf{R}$, *le rideau* associé est la réunion $R(f)$ des graphes des différentielles $t\,df$, $t \in [0, 1]$ dans $U(L_0) \cong T^*L_0$.

Le rideau $R(f)$ est une sous-variété singulière de dimension $n+1$, difféomorphe à $L_0 \times [0, 1]$, chaque segment au-dessus d'un point critique de f étant écrasé sur un point.

L'engouffrement d'un chemin linéaire de type constant est réalisé par l'engouffrement du rideau associé.

2.2 PROPOSITION (Engouffrement d'un rideau). *Il existe une isotopie hamiltonienne* $\varphi_t\colon M \to M$, $t \in [0, 1]$, *à support compact, stationnaire sur* $L \cup L_0$ *et telle que* $h_1(U(L))$ *contienne* $R(f)$.

2.3 *Réduction à l'engouffrement d'un rideau régulier*

Via la projection $R(f) \to L_0$ induite par la projection $T^*L_0 \to L_0$, on étend $f\colon L_0 \to \mathbf{R}$ en une fonction $\tilde{f}\colon R(f) \to \mathbf{R}$. Une sous-variété de dimension n contenue dans un niveau de $\tilde{f}$ est lagrangienne.

Remarque. Comme toute isotopie interne à une sous-variété lagrangienne s'étend en une isotopie hamiltonienne ambiante préservant celle-ci, on peut supposer au départ que $U(L)$ contient la préimage par $\tilde{f}$ des valeurs critiques de f. Ainsi il reste à réaliser l'engouffrement d'un rideau régulier (définition ci-dessous) disjoint de L.

DÉFINITION. Un rideau régulier R est une sous-variété (non singulière) de dimension $n+1$, munie d'une submersion $\pi: R \to [a, b] \times [0, 1]$, avec les deux propriétés suivantes:

(i) la forme induite par ω sur R est $\pi^*(ds \wedge du)$, où (s, u) désigne les coordonnées du but;

(ii) les fibres de π sont des sous-variétés compactes sans bord λ-exactes.

EXEMPLE. Si $R \subset R(f)$ est la préimage par $\tilde{f}$ d'intervalles de valeurs régulières de $\tilde{f}$, alors R est un rideau régulier. Sur chaque composante connexe de R on a $s \circ \pi = \tilde{f}$ et $u \circ \pi = 1 - t$ (la raison de ce retournement de la verticale apparaît plus loin).

Le bord principal du carré $[a, b] \times [0, 1]$ est la réunion F_p des trois côtés $\{a\} \times [0, 1], [a, b] \times \{1\}, \{b\} \times [0, 1]$. Le *bord libre* F_l est le quatrième côté $[a, b] \times \{0\}$ (Figure 9).

Le bord principal du rideau R est $\partial_p R = \pi^{-1}(F_p)$ et le bord libre du rideau est $\partial_l R = \pi^{-1}(F_l)$.

D'après la remarque ci-dessus l'engouffrement d'un rideau se réduit à la proposition suivante.

PROPOSITION (Engouffrement d'un rideau régulier). *Soit R un rideau régulier. Soit K un compact de $U(L)$ tel que $K \cap \partial_p R$ et qui se rétracte sur un polyèdre de codimension ≥ 3. Alors, sous l'hypothèse de convexité à l'infini, il existe une isotopie hamiltonienne $\varphi_t: M \to M$, $t \in [0, 1]$, à support compact, stationnaire sur K et telle que $h_1(U(L))$ contienne R.*

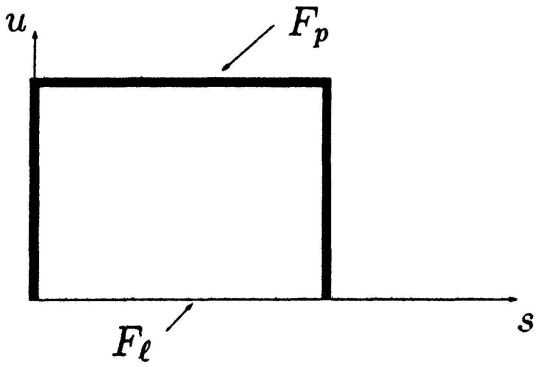


Figure 9

Pour déduire 2.2, on prend R comme dans l'exemple ci-dessus et $K = L \cup L_0 \cup \overline{(R(f) - R)}$.

La stratégie est la suivante: on considère une hypersurface S dans $U(L)$ au-delà de K et un champ de Liouville X, transverse à S, tel que Ext $S \cap U(L)$ soit le saturé positif de S. On prend S transverse à R. Supposons provisoirement qu'il existe un champ de Liouville Y transverse à S et tangent à R. L'image de S en un temps T assez grand du flot de Y est au-delà de R. Le principe d'équivalence 1.5 donne l'engouffrement cherché.

En fait, cette méthode se heurte à des obstructions mais on peut au moins simplifier $S \cap R$ jusqu'à pouvoir appliquer le théorème d'engouffrement des cylindres de Liouville (1.2) qui a une hypothèse moins restrictive concernant le champ Y.

2.4 *Champ de Liouville sur un rideau régulier*

Les deux remarques suivantes sont élémentaires:

(1) Tout champ de vecteurs sur $[a, b] \times [0, 1]$ dont les orbites vont du bord principal au bord libre peut être rendu de Liouville pour $ds \wedge du$ (resp. anti-Liouville = l'opposé d'un champ de Liouville) en le multipliant par une fonction positive convenable, de sorte que son flot dilate (resp. contracte) les aires exponentiellement.

(2) Tout champ tangent à R relevant un champ de Liouville de $[a, b] \times [0, 1]$ est la restriction d'un champ de Liouville pour ω, équivalent à $\vec{\lambda}$ car les cycles de dimension 1 de R sont dans les fibres de π sur lesquelles λ est exacte. Bien entendu, ce champ global ne peut pas généralement être transverse à S; dans ce qui suit cette question est étudiée de plus près.

2.5 *Contour apparent*

Si S est une hypersurface transverse à R, $S \cap R$ est une variété de dimension n dont le rang symplectique est non constant. Elle est de rang 2, sauf le long du contour apparent à la source de $\pi \mid S \cap R$, lieu qui génériquement est une courbe Γ et en chaque point duquel le plan tangent à $S \cap R$ est lagrangien.

Pour $s \in [a, b]$ tel que S soit transversal à $\pi^{-1}(\{s\} \times [0, 1])$ on note h_s la fonction hauteur $u \circ \pi | S \cap \pi^{-1}(\{a\} \times [0, 1])$. Les points critiques de h_s sont les points de Γ d'abscisse s. Génériquement Γ est l'adhérence de $\bigcup_s \operatorname{crit} h_s$.

On a une autre caractérisation de Γ:

LEMME. *Γ est le lieu des points où R est tangent aux caractéristiques de S.*

Preuve. Si $z \in \Gamma$, le plan tangent à $S \cap R$ en z est lagrangien donc il doit contenir la direction caractéristique de $T_z S$. Si $z \notin \Gamma$, il existe un vecteur v tangent à la fibre de π contentant z et transverse à S; si τ est un vecteur tangent à R, $\omega(v, \tau) = 0$ ce qui interdit que τ soit dans la direction caractéristique de S. cqfd

Le contour apparent au but $\pi(\Gamma)$ est une courbe qui génériquement ne présente pas de points triples et un nombre fini de *points remarquables*:

- points doubles à croisement normaux,
- points de rebroussement,
- points à tangente verticale (parallèle à $\partial/\partial u$).

Pour chaque arc $\alpha \subset \Gamma$ tel que $\pi(\alpha)$ ne contienne aucun point à tangente verticale et aucun point de rebroussement sauf éventuellement aux extrémités, on peut associer un *indice*, l'indice de Morse de la fonction hateur h_s au point de α d'abscisse s (qui est indépendant de s). On peut associer aussi la variété instable $W^u(\alpha)$ pour un champ descendant tangent aux feuilles $S \cap \pi^{-1}(\{s\} \times [0, 1])$ et qui sur chaque feuille est de gradient pour h_s au sens d'une métrique auxiliaire.

2.6 LEMME. *Soit A une bande verticale dans $[a, b] \times [0, 1]$. On suppose que $\pi(\Gamma) \cap A = \pi(\alpha)$ où α est un arc de Γ dont la projection n'a pas de tangente verticale. Alors il existe un champ de Liouville Z tangent à $\pi^{-1}(A)$ avec les propriétés suivantes:*

(a) *Z relève un champ de Liouville vertical sur A.*

(b) *Z est transverse à S le long de $S \cap \pi^{-1}(A)$ et pointe vers* Ext S.

Preuve. En un point de α, un vecteur tangent au rideau et pointant vers l'extérieur de S a une composante sur $\partial/\partial u$ dont le signe $+$ ou $-$ est indépendant du point sur α, car $\pi(\alpha)$ n'a pas de tangente verticale. Connaissant ce signe on détermine sur A un champ de Liouville ξ vertical dirigé dans le même sens. On choisit des relèvements locaux de ξ que l'on recolle par partition de l'unité. En un point de $S \cap R$ qui n'est pas sur le contour apparent, on est libre de choisir le relèvement pointant vers l'extérieur ou l'intérieur de S; on fait le premier choix. cqfd

2.7 *Un lemme de la théorie de Morse*

Le lemme suivant est bien connu en théorie de Morse. La situation est la même que dans le lemme précédent.

LEMME. *Soit $\{\pi(\alpha)_\tau\}$, $\tau \in [0, 1]$, un glissement descendant de l'arc $\pi(\alpha)$ le long des verticales, fixe près du bord. Alors il existe un glissement de $S \cap \pi^{-1}(A)$ le long de*

Z, à bord fixe, tel que pour tout $\tau \in [0, 1]$, $\pi(\alpha)_\tau$ soit le contour apparent de $[S \cap \pi^{-1}(A)]_\tau$. De plus le glissement est fixe hors d'un voisinage de $W^u(\alpha)$.

Commentaire. Tout se passe dans un voisinage du Z-saturé descendant de $W^u(\alpha)$, noté $W^u_Z(\alpha)$. C'est une sous-variété (à bord et coins) et chaque orbite de Z qui lui est tangente descend jusqu'au niveau $u = 0$.

2.8 *Descente d'un point*

LEMME. *Soit A un sous-rectangle $[a', b'] \times [0, 1]$ de $[a, b] \times [0, 1]$. On suppose que $\pi(\Gamma) \cap A$ est connexe et ne contient qu'un point remarquable $\pi(z_0)$. Alors:*

(1) *il existe une isotopie hamiltonienne de A à support dans* $\operatorname{int} A$ *descendant $\pi(z_0)$ jusqu'à un niveau inférieur $\{u = u_1\}$ donné à l'avance. De plus, au cours de l'isotopie l'image de tout segment vertical descendant d'un point de $\pi(\Gamma)$ reste verticale au-dessus du niveau u_1.*

(2) *Le relèvement à R est la restriction d'une isotopie hamiltonienne ambiante préservant R. L'allure du contour apparent au but est préservée (même nombre de points remarquables).*

(3) *Les mêmes conclusions valent encore si $\pi(\Gamma) \cap A = \varnothing$ et si z_0 est un point quelconque de $\pi^{-1}(A) \cap S$.*

Preuve. (1) Il existe une isotopie de plongements de $\pi(\Gamma) \cap A \to A$, déplaçant $\pi(z_0)$ comme on le veut, déplaçant chaque point de $\pi(\Gamma)$ sur sa verticale et préservant l'aire de chaque composante du complémentaire. Elle n'introduit aucun point remarquable. La figure 10 représente le cas d'un point de croisement. Cette isotopie se prolonge en isotopie de A préservant l'aire. Si on prend soin des deux conditions suivantes, on peut avoir le résultat complémentaire demandé sur les verticales:

- l'aire balayée par tout arc de $\pi(\Gamma) \cap A$ est plus petite que l'aire en-dessous du niveau $\{u = u_1\}$;
- le déplacement vertical des points qui montent est inférieur à u_1 (Figure 10).

(2) Soit φ_t un relèvement à R de cette isotopie. C'est une isotopie hamiltonienne pour $\omega|R$ qui donc se prolonge en isotopie hamiltonienne ambiante par prolongement de fonctions. Enfin le contour apparent de $\varphi_t(S \cap R)$ est l'image par φ_t du contour apparent de $S \cap R$. Le point (3) est évident. cqfd

2.9 *Démonstration de l'engouffrement du rideau*

Sans le répéter, il est entendu que toutes les isotopies sont stationnaires sur le compact K donné dans la proposition 2.3.

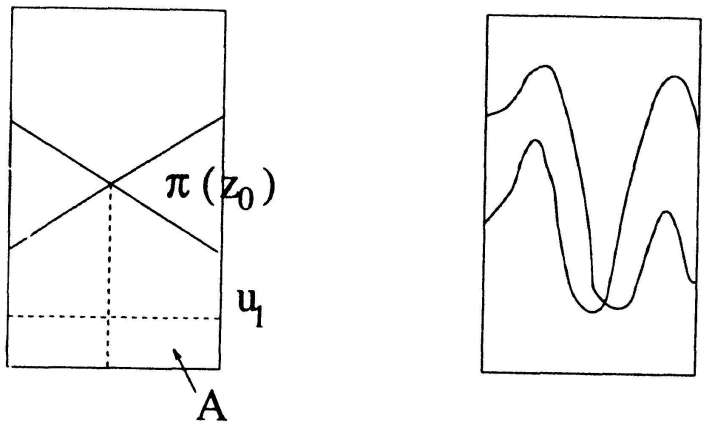


Figure 10

LEMME 1. *Il existe une isotopie hamiltonienne de M poussant S en S' de sorte que le contour apparent au but de $S' \cap R$ n'ait aucun point remarquable.*

Preuve. On considère le point remarquable z_0 le plus bas, puis sur la même verticale le point $\pi(z_1)$ le plus bas de $\pi(\Gamma)$. On applique le lemme 2.8 à ce point et ainsi de suite jusqu'à l'appliquer à $\pi(z_0)$. A chaque fois on utilise une bande verticale qui descend un peu en-dessous de $\{u = 0\}$. On fait ainsi fuir $\pi(z_0)$ vers le bas du rideau et on diminue d'une unité le nombre de points remarquables. cqfd

Après ce lemme, le contour apparent au but se présente comme suit (on appelle de nouveau S l'hypersurface). Chaque branche du contour apparent porte un indice compris entre 0 et $n-1$.

LEMME 2. *Il existe une hypersurface S' équivalente à S* (rel. K) *telle que le contour apparent au but de $S' \cap R$ ne présente aucun point remarquable et que des branches d'indice $n-1$* (Figure 11).

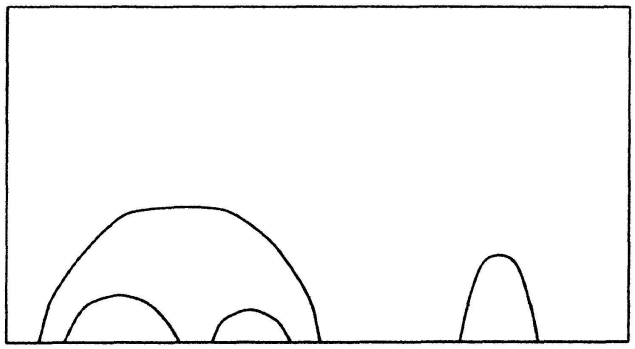


Figure 11

Preuve. Soit α une branche du contour apparent d'indice $k < n - 1$, minimal; on prend la branche la plus basse parmi celles d'indice minimal. Alors, pour un champ de gradient générique, $W^u(\alpha)$ descend jusqu'au niveau $\{u = 0\}$ et pour chaque $z \in \alpha$ d'abscisse s on a une membrane m_s, disque (à coins) de dimension $k + 1$, contenue dans $\pi^{-1}(\{s\} \times [0, 1])$, s'appuyant sur $W^u(z)$ et descendant jusqu'au niveau $\{u = 0\}$; l'intérieur de m_s évite $S \cap R$. La collection des membranes forme un cylindre de Liouville C dont une des extrémités est la variété $W^u(\alpha)$ de dimension $k + 1 < n$ et dont le champ de Liouville générateur Y est tangent aux membranes.

1er cas: $k < n - 2$. Les hypothèses du lemme 1.6 sont satisfaites. Par glissement on fait fuir cette branche du contour apparent par le bas du rideau.

2ème cas: $k = n - 2$. On est en présence d'une obstruction. Précisément si $\overrightarrow{dH}$ est un champ hamiltonien tangent à S, il existe un temps T (dépendant de C et du choix de $\overrightarrow{dH}$) tel que les retours du flot de $\overrightarrow{dH}$ de $W^u(\alpha)$ sur lui-même en temps >0 et $<T$ soient une obstruction à trouver un champ de Liouville transverse à S et tangent à C. Or génériquement il n'y a qu'un nombre fini de points de $W^u(\alpha)$ ayant un tel retour. De plus si s est l'abscisse d'un tel point z_0, génériquement le retour n'a pas la même abscisse. On fait fuir z_0 vers le bas du rideau par application du lemme 2.8.

Après cette isotopie le temps T à considérer est le même qu'initialement car S, $\overrightarrow{dH}$ et le champ de Liouville Y tangent à C le long de $W^u(\alpha)$ sont transportés par la même isotopie en vertu du complément au 1 du lemme 2.8. Une fois qu'on a fait fuir ces obstructions, le champ Y se globalise en un champ de Liouville transverse à S et le glissement de S au voisinage de C donne des hypersurfaces équivalentes.

cqfd

Le contour apparent au but se présente maintenant de la même façon, mais toutes les branches ont l'indice maximum $n - 1$. Chaque composante de $S \cap R$ est un disque D^n bordant, avec un n-disque de $\{u = 0\}$, une $(n + 1)$-boule anguleuse. L'ensemble de ces disques est muni d'un ordre partiel (un disque est au-dessus d'un autre); supposons pour simplifier qu'il n'existe qu'un disque maximal. On peut alors réaliser les sommes connexes au bord de certaines composantes de $S \cap R$. Précisément:

LEMME 3. *Il existe S' hypersurface équivalente à S* (rel. K) *telle que $S' \cap R$ ne soit formé que de disques maximaux et que le contour apparent au but de chacun d'eux ait l'allure ci-dessous* (Figure 12).

Preuve. Il suffit en fait de savoir faire la somme connexe du disque maximal avec un disque immédiatement inférieur dont le contour apparent au but est lui aussi immédiatement inférieur à celui du disque maximal; puis on poursuivra en

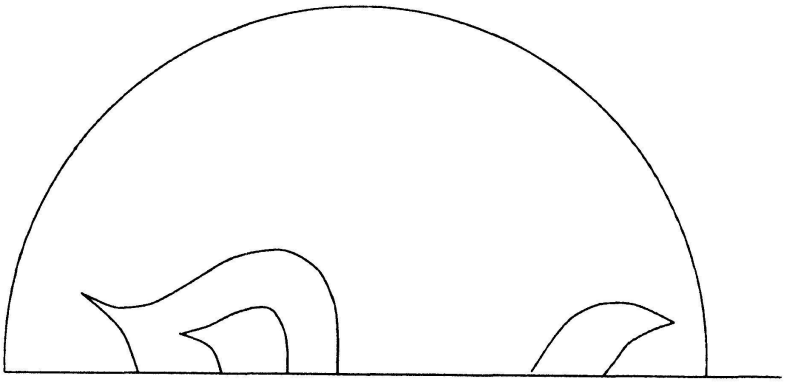


Figure 12

traitant séparement les disques maximaux ainsi obtenus. En topologie différentielle ordinaire, on sait modifier l'intersection d'une hypersurface séparante, ici S, et d'une sous-variété, ici L_1 (le bas du rideau), par une isotopie de S pour réaliser la somme connexe de deux composantes de $S \cap L_1$ joignables par un arc de L_1 qui ne retraverse pas S.

Il y a deux conditions homotopiques et une condition de dimension. Les conditoins homotopiques sont

$$\pi_1(\text{Ext } S, S) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Int } S, S) = 0.$$

Elles sont vérifiées car S est isotope au bord d'un voisinage tubulaire de L dans M avec $\pi_1(M, L) = 0$, ce qui garantit la première condition, et codim $L > 2$ ce qui garantit la seconde. La condition dimensionnelle est codim $L_1 > 2$. Dans ce cas il existe un 2-disque de Whitney Δ avec la moitié du bord dans S et l'autre dans L_1. L'isotopie est donnée par un modèle au voisinage de Δ.

Comme K se rétracte sur un polyèdre de codimension ≥ 3, Δ peut être pris disjoint de K et l'isotopie se fait loin de K.

Pour modifier l'intersection $S \cap R$ par somme connexe au bord, sachant que L_1 est dans le bord de R, on choisit Δ tangent à $\partial/\partial u$ le long de $L_1 \cap \Delta$, du côté de la tangente sortante de R; le modèle de Whitney fait le travail demandé.

Pour contrôler le contour apparent de la projection $\pi: S \cap R \to \mathbf{R}^2$ et le réaliser tel qu'il est demandé il suffit de choisir l'arc $L_1 \cap \Delta$ avec les deux propriétés suivantes:

(1) une extrémité de $L_1 \cap \Delta$ est sur le contour apparent de la composante "inférieure";
(2) $s \circ \pi | L_1 \cap \Delta$ est une fonction sans point critique.
(3) $s \circ \pi(L_1 \cap \Delta)$ ne recoupe pas le contour apparent au but.

En présence d'une structure symplectique, le disque Δ peut être symplectique. En effet on commence par le rendre symplectique au voisinage du bord, ce qui est

facile dès que la condition générique, que $\Delta \cap S$ soit non tangent aux caractéristiques de S, est satisfaite; on peut aussi supposer que l'intégrale de ω sur Δ est non nulle. Puis par le h-principe de Gromov, on déforme Δ rel. un voisinage du bord en un disque symplectique immergé, et donc plongé en position générale.

Lorsque Δ est symplectique, il peut être muni d'une structure de cylindre de Liouville. Comme son bord dans S est un arc, on peut appliquer 1.6 et conclure que l'hypersurface S' donnée par le modèle de Whitney est équivalente à S. cqfd

LEMME 4. *Dans la situation donnée par le lemme* 3, *il existe un champ de Liouville* ξ *sur le rectangle image de* π, *transversal à chaque branche du contour apparent, pointant dans le sens indiqué par* Ext S *et dont toutes les orbites coupent* $\{u = 0\}$.

Remarque. Le sens en question ne se lit pas sur le contour apparent au but car, s'il est vrai que deux disques ordonnés de $S \cap R$ (avant la somme connexe) donnent des branches ordonnées du contour apparent au but, deux disques non comparables peuvent aussi donner des branches ordonnées.

Preuve. On la fait par récurrence sur le nombre de branches de $\pi(\Gamma)$. D'après 2.4 1), la question est purement topologique. Soit ξ_0 une solution pour $k-1$ branches. On considère une bande A d'orbites de ξ_0 aboutissant dans $\{u = 0\}$ et on y insère une courbe γ avec un point de rebroussement, munie d'un champ transverse. Dans les deux cas de figures, on peut modifier ξ_0 sur A pour le rendre compatible avec cette donnée (Figure 13). cqfd

On peut maintenant conclure. Dans la situation donnée par le lemme 3, $S \cap R$ est un disque D bordant avec un disque D' de $\{u = 0\}$ un domaine C dans Ext S. Le champ de Liouville ξ donné par le lemme 4 se relève dans C en un champ de Liouville dont les orbites vont de D à D'. Donc C est contenu dans un cylindre de Liouville. Le théorème 1.2 est applicable et finit l'engouffrement du rideau. cqfd

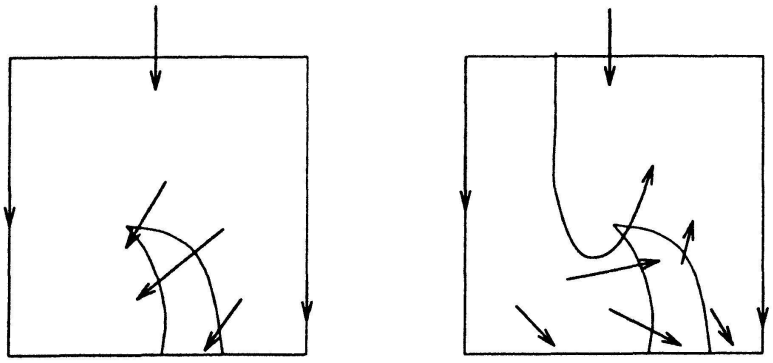


Figure 13

§3. Engrouffrement des chemins élémentaires de naissance ou d'élimination

On rappelle que $\mathscr{L}^1$ est l'ensemble des $L' \in \mathscr{L}$ ayant exactement un contact quadratique avec L.

3.1 *Modèle du contact quadratique*

Soit $L' \in \mathscr{L}^1$ et soit a le point de contact de L' avec L. D'après Darboux, il existe un voisinage de a isomorphe à un polydisque $D \times D^*$, muni de la forme symplectique standard de $T^*\mathbb{R}^n$, où $D \times \{0\}$ est un voisinage de a dans L et où les fibres $\{pt\} \times D^*$ coupent L' en un seul point et transversalement. Dans ces coordonnées, L' est le graphe de df pour une certaine fonction $f: D \to \mathbf{R}$ ayant à l'origine une singularité de codimension 1. Donc quitte à rétrécir D autour de a et à y choisir des coordonnées convenables $(x_1, \ldots, x_n)$, on a la forme normale:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^3 + q(x_2, \ldots, x_n)$$

où q est une forme quadratique non dégénérée. Par conséquent ce qui est connu sur cette singularité et sur son déploiement universel établit que $\mathscr{L}^1$ est une sous-variété de codimension 1 et que tout germe de chemin $\gamma: (\mathbf{R}, 0) \to (\mathscr{L}, \mathscr{L}^1)$, C^∞ et transverse à $\mathscr{L}^1$ en L' est conjugué (au sens 2.3) à un chemin dit "élémentaire" ou chemin de Cerf-Smale (voir Cerf [Ce]).

Le germe de chemin γ en $L' = \gamma(0)$ est *élémentaire* si, pour t voisin de 0, la sous-variété $\gamma(t)$ passe dans le polydisque $D \times D^*$ selon le graphe de la différentielle de la fonction

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^3 \pm tx_1 + q(x_2, \ldots, x_n).$$

Avec le signe $+$, le chemin est dit élémentaire d'élimination parce que deux points d'intersection avec L disparaissent lorsque t croît de 0_- à 0_+. Avec le signe $-$, le chemin est dit élémentaire de naissance.

3.2 *Un autre modèle de chemin élémentaire*

A partir des formules précédentes, on effectue un changement d'axes qui fait disparaître la notion d'indice pour q. Voici donc une nouvelle description du chemin élémentaire typique.

Le modèle est un polydisque B, voisinage du point de contact a de L' avec L. Il a des coordonnées

$$\{(x, \xi, y, \eta) \mid (x, \xi) \in [-\delta, \delta^2], (y, \eta) \in \mathbf{R}^{n-1} \times (\mathbf{R}^{n-1})^*, \|y\| \leq R, \|\eta\| \leq R\}$$

et, sur B, $\omega = dx \wedge d\xi + dy \wedge d\eta$.

L'intersection $L \cap B$ est définie par $\xi = 0$, $\eta = 0$, section nulle de $T^*\mathbb{R}^n$. L'intersection $L' \cap B$ est définie par $y = 0$, $\xi = x^2$. La situation de produit cartésien est résumée sur la figure, où il faut penser $\delta \leq 1$ (Figure 14).

Le chemin élémentaire *d'élimination*, vu dans B, consiste en une translation parallèle à l'axe ξ. Précisément, pour $t \in [0, 1]$,

$$L_t \cap B = \left\{y = 0, \xi = x^2 + (2t - 1)\frac{\delta^2}{4}\right\}.$$

Hors de B, L_t est seulement assujetti à rester transverse à L. Pour un chemin de naissance, on change t en $1 - t$.

Remarque. On peut modifier le modèle précédent pour que le chemin d'élimination soit à support dans le polydisque. Cela suppose que R soit assez grand devant δ. Nous n'avons pas besoin d'utiliser ce modèle.

Avec le modèle ci-dessus, on pose les deux définitions suivantes.

(a) Pour L_0, dont deux points d'intersection avec L sont en position de s'éliminer, on appelle *disque de Whitney* le disque défini par

$$\Delta = \left\{y = 0, \eta = 0, 0 \geq \xi \geq x^2 - \frac{\delta^2}{4}\right\}.$$

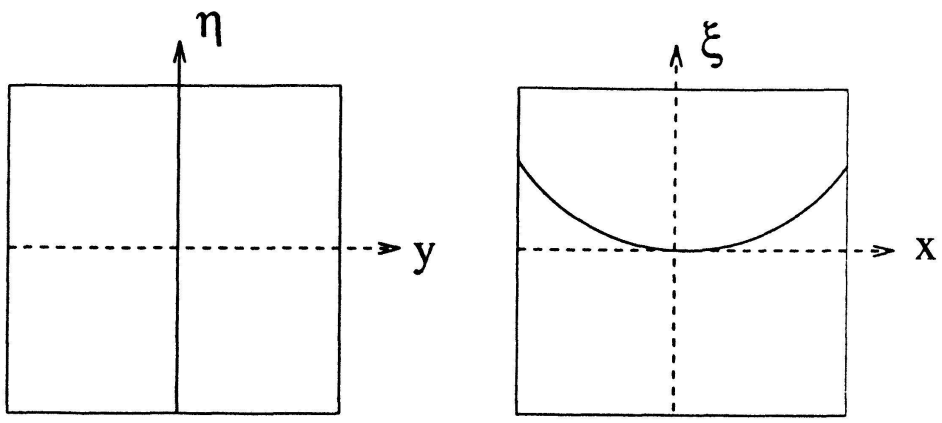


Figure 14

On dit que $\Delta^0 = \{y = 0, \eta = 0, x^2 - \delta^2/4 \leq \xi \leq x^2 + \delta^2/4\}$ est le disque de Whitney étendu.

(b) Pour L_1, qui ne rencontre pas $L \cap B$, on appelle *arc de naissance* le segment

$$J = \left\{y = 0, \eta = 0, x = 0, 0 \leq \xi \leq \frac{\delta^2}{4}\right\}.$$

3.3 *Engouffrement d'un chemin élémentaire*

PROPOSITION. *Le principe d'engouffrement est valide pour tout chemin élémentaire de naissance ou d'élimination.*

Preuve. Disons que $\{L_t, t \in [0, 1]\}$ est un chemin élémentaire d'élimination; $L_0 \subset U(L)$. La première étape consiste à engouffrer le disque de Whitney Δ. Comme $\pi_2(M, U(L)) = 0$ et que $\dim \Delta < \frac{1}{2} \dim M$, on peut le faire en vertu du h-principe [G2]. Donc on peut supposer $\Delta \subset U(L)$. Comme le disque de Whitney étendu a la propriété que $L \cup L_0 \cup \Delta^0$ se rétracte sur $L \cup L_0 \cup \Delta$, le même argument permet de supposer que $\Delta^0 \subset U(L)$.

Ensuite, par les mêmes réductions qu'au §2, on peut supposer qu'en dehors du polydisque B, L_t est stationnaire au voisinage de son intersection avec L et que le chemin L_t est linéaire. On est ramené à l'engouffrement d'un rideau régulier R contenant B.

La projection $\pi: R \to [a, b] \times [0, 1]$ induit un plongement du disque de Whitney étendu Δ^0, allant du niveau $u = 0$ au niveau $u = 1$. Donc les mouvements de l'hypersurface S effectués en 2.9 pour simplifier le contour apparent ont tous lieu dans le complémentaire de Δ^0, donc dans le complémentaire de L, ce qui achève l'engouffrement du chemin d'élimination.

Pour un chemin de naissance (le même chemin $\{L_t\}$ parcouru de $t = 1$ à $t = 0$), on réalise d'abord l'engouffrement de l'arc de naissance en utilisant $\pi_1(M, U(L)) = 0$, puis l'engouffrement de Δ^0 car $L_1 \cup L \cup \Delta^0$ se rétracte sur $L_1 \cup L \cup J$. La fin de la preuve est la même que ci-dessus. cqfd

Remerciements

Je remercie Jean-Claude Sikorav et Claude Viterbo qui ont écouté patiemment plusieurs versions préliminaires. Je remercie aussi et plus particulièrement Marc Chaperon et Emmanuel Giroux qui ont participé de près à ce travail pendant un long moment.

REFERENCES

[Ba] A. BANYAGA, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. *53* (1978) 174–227.

[Be] D. BENNEQUIN, *Caustique mystique*, Séminaire Bourbaki 1984/5, Astérisque *133–134* (1986) 19–56.

[Ce] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publ. Math. IHES *39* (1970) 5–173.

[EG] Y. ELIAHSBERG, M. GROMOV, *Convex symplectic manifolds*, Proc. Symposia in pure math. *52* part *2* (1991) 135–162.

[G1] M. GROMOV, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. *82* (1985) 307–347.

[G2] M. GROMOV, *Partial differential relations*, Springer 1986.

[Ha] A. HATCHER, *Homeomorphisms of sufficiently large* $\mathbf{P}^2$*-irreducible* 3*-manifolds*, Topology *15* (1976) 343–347.

[Ho] H. HOFER, *Lagrangian embedding and critical point theory*, Ann. de l'Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire *2* (1985) 407–462.

[La] F. LAUDENBACH, *Bandes caractéristiques*, C. R. Acad. Sc. Paris *314* série I (1992) 557–562.

[Ma] B. MAZUR, *Stable equivalence of differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. *67* (1961), 377–384.

[Mo] J. MOSER, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 286–294.

[Mu] M.-P. MULLER, *Une structure symplectique sur* $\mathbf{R}^6$ *avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet*, Comment. Math. Helv. *65* (1990) 623–663.

[Si] J.-C. SIKORAV, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonnienne*, Comment. Math. Helv. *62* (1987) 62–73.

[St] J. STALLINGS, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. *58* (1962) 481–488.

Centre de Mathématiques, URA 169 du CNRS
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
e-mail: laudenbach@orphee.polytechnique.fr

Received February 18, 1994